2024 届高三开学测试

数学

本试卷分选择题和非选择题两部分，共 5 页，满分为 150 分.考试用时 120 分钟.

注意事项：

1、答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和学号填写在答题卡和答卷密封线内相应的位置上，用 2B 铅笔将自己的学号填涂在答题卡上.

2、选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案；不能答在试卷上.

3、非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔在答卷纸上作答，答案必须写在答卷纸各题目指定区域内的相应位置上，超出指定区域的答案无效；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答的答案无效.

4、考生必须保持答题卡的整洁和平整.

第一部分选择题（共 60 分）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{y|\ y=\lg x,0<x<100\},B=\left\{x|-x^2+4x+5>0\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $(0,2)$　　B. $(-1,2)$　　C. $(1,2)$　　D. $(-1,5)$

2. 已知 $a\in R$，i 为虚数单位，若 $\dfrac{a-i}{3+i}$ 为实数，则 $a=$（　　）

A. -3　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. 3　　D. $-\dfrac{1}{3}$

3. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$，若 $a_3a_5=64,a_5+2a_6=8$，则 $a_2=$（　　）

A. 16　　B. 32　　C. 48　　D. 64

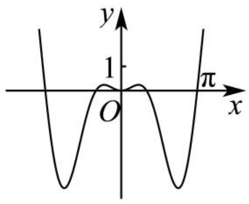
4. 已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}+\vec{b}|=7$，且 $|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$（　　）

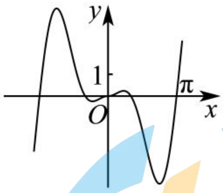
A. 5　　B. 3　　C. 2　　D. 1

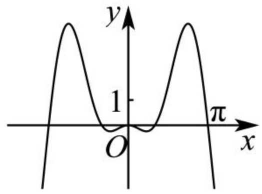
5. 甲、乙两人进行乒乓球比赛，采用七局四胜制，先赢四局者获胜，没有平局、甲每局赢的概率为 $\frac{1}{2}$，已知前两局甲输了，则甲最后获胜的概率为（　　）

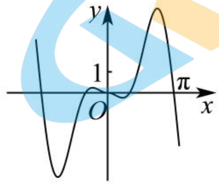
A. $\dfrac{1}{16}$　　B. $\dfrac{1}{8}$　　C. $\dfrac{3}{16}$　　D. $\dfrac{1}{4}$

6. 函数 $y = x(\sin x - \sin 2x)$ 的部分图象大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

7. 已知 $a = \dfrac{\ln 2}{2}$，$b = \dfrac{\ln 3}{e}$，$c = \dfrac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$，则（参考数据：$\ln 2 \approx 0.7$）（　　）

A. $a > b > c$　　B. $b > a > c$　　C. $b > c > a$　　D. $c > a > b$

8. 已知双曲线 $\Gamma: \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{2} = 1$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2，过 F_1 的直线分别交双曲线 Γ 的左右两支于 A, B 两点，且 $\angle F_2AB = \angle F_2BA$，则 $|BF_2| =$（　　）

A. $\sqrt{5}+4$　　B. $2\sqrt{5}+4$　　C. $2\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{5}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.在每小题给出的 4 个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 有一组样本数据 $x_1, x_2, \cdots, x_6$，其中 x_1 是最小值，x_6 是最大值，则（　　）

A. x_2, x_3, x_4, x_5 的平均数等于 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 的平均数

B. x_2, x_3, x_4, x_5 的中位数等于 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 的中位数

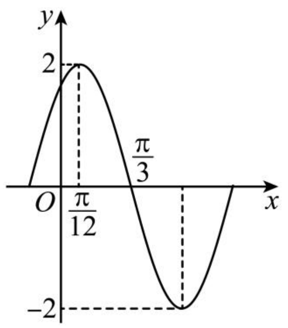
C. x_2, x_3, x_4, x_5 的标准差不小于 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 的标准差

D. x_2, x_3, x_4, x_5 的极差不大于 $x_1, x_2, \cdots, x_6$ 的极差

10. 已知 a, b, c 是两两异面的三条直线，$a \perp b$，$c \perp a$，直线 d 满足 $d \perp a$，$d \perp b$，$a \cap d = P$，$b \cap d = Q$，则 c 与 d 的位置关系可以是（　　）

A. 相交　　B. 异面　　C. 平行　　D. 垂直

11. 如图是函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$（$A > 0$，$\omega > 0$，$|\varphi| < \dfrac{\pi}{2}$）的部分图像，则（　　）



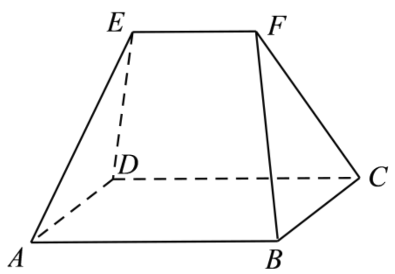
A. $f\left(x\right)$的最小正周期为π

B. $x=\dfrac{5\pi}{6}$是的函数$y=f\left(x\right)$的一条对称轴

C. 将函数$y=f\left(x\right)$的图像向右平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位后，得到的函数为奇函数

D. 若函数$y=f\left(tx\right)$（$t>0$）在$\left[0,\pi\right]$上有且仅有两个零点，则$t\in\left[\dfrac{5}{6},\dfrac{4}{3}\right)$

12. 我国古代《九章算术》里记载了一个“羡除”的例子，羡除，隧道也，其所穿地，上平下邪，如图是一个“羡除”模型，该“羡除”是以A,B,C,D,E,F为顶点的五面体，四边形$ABCD$为正方形，EF // 平面$ABCD, AB=2EF=4, AE=DE=BF=CF=2\sqrt{3}$，则（　　）



A. 该几何体的表面积为$8\sqrt{2}+6\sqrt{11}+16$

B. 该几何体的体积为$\dfrac{20\sqrt{7}}{3}$

C. 该几何体的外接球的表面积为40π

D. AE与平面FBC所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{42}}{12}$

第二部分非选择题（共 90 分）

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知函数$f(x)$的导函数为$f'(x)$，且满足$f(x)=x^3-x\cdot f'(2)$，则函数$f(x)$在点（2，$f(2)$）处的切线方程为________________.

14. 已知数列$\{a_n\}$各项均为正数，若$a_1=1$，且$\ln a_{n+1}=\ln a_n+1\left(n\in \mathrm{N}^*\right)$，则$\{a_n\}$的通项公式为______.

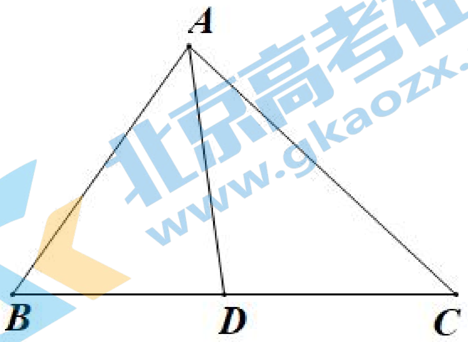
15. 已知二项式$\left(1-x+\dfrac{a}{y}\right)^5$的展开式中含$\dfrac{x^3}{y}$的项的系数为$-40$，则$a=$________.

16. 设$f(x)$为定义在整数集上的函数，$f(1)=1$，$f(2)=0$，$f(-1)<0$，对任意的整数x,y均有

$f(x+y)=f(x)f(1-y)+f(1-x)f(y)$．则$f(55)=$______.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 在$\triangle ABC$中，角A的平分线交线段BC于点D.



（1）证明$\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$；

（2）若$AB=6$，$AC=8$，$BC=7$，求AD.

18. 中国共产党第二十次全国代表大会于 2022 年 10 月 16 日在北京召开，为弘扬中国共产党百年奋斗的光辉历程，某校团委决定举办“中国共产党党史知识”竞赛活动.竞赛共有A和B两类试题，每类试题各 10 题，其中每答对 1 道A类试题得 10 分；每答对 1 道B类试题得 20 分，答错都不得分.每位参加竞赛的同学从这两类试题中共抽出 3 道题回答（每道题抽后不放回）.已知小明同学A类试题中有 7 道题会作答，而他答对各道B类试题的概率均为$\dfrac{2}{5}$.公众号：全元高考

（1）若小明同学在A类试题中只抽 1 道题作答，求他在这次竞赛中仅答对 1 道题的概率；

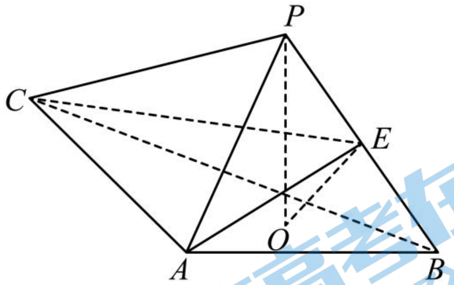
（2）若小明只作答A类试题，设X表示小明答这 3 道试题的总得分，求X的分布列和期望.

19. 已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=\dfrac{3}{5}$，且满足$a_{n+1}=\dfrac{3a_n}{2a_n+1}$.

（1）求证：数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}-1\right\}$为等比数列；

（2）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\begin{cases}\dfrac{1}{a_n}-3, n\text{为偶数时},\\ \dfrac{n+2}{n}+\dfrac{n}{n+2}, n\text{为奇数时},\end{cases}$ 求最小的实数 m，使得 $b_1+b_2+\cdots+b_{2k}<m$ 对一切正整数 k 均成立．

20. 如图，PO 是三棱锥 $P-ABC$ 的高，$PA=PB$，$AB\perp AC$，E 是 PB 的中点．



（1）证明：$OE//$ 平面 PAC；

（2）若 $\angle ABO=\angle CBO=30°$，$PO=3$，$PA=5$，求二面角 $C-AE-B$ 的正弦值．

21. 设 F_1，F_2 分别为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，P 是椭圆 C 的短轴的一个端点，已知 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\sqrt{2}$，$\cos\angle F_1PF_2=-\dfrac{1}{3}$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）是否存在与 PF_2 平行的直线 l，满足直线 l 与椭圆 C 交于两点 M，N，且以线段 MN 为直径的圆经过坐标原点？若存在，求直线 l 的方程；若不存在，请说明理由．

22．已知函数 $f(x)=a\ln x-ax+1$，$a\in\mathrm{R}$．

（1）若经过点 $(0,0)$ 的直线与函数 $f(x)$ 的图像相切于点 $(2,f(2))$，求实数 a 的值；

（2）设 $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{2}x^2-1$，若 $g(x)$ 有两个极值点为 x_1，$x_2(x_1\neq x_2)$，且不等式 $g(x_1)+g(x_2)<\lambda(x_1+x_2)$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围.公众号：全元高考

2024 届高三开学测试

数学

本试卷分选择题和非选择题两部分，共 5 页，满分为 150 分.考试用时 120 分钟.

注意事项：

1、答卷前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和学号填写在答题卡和答卷密封线内相应的位置上，用 2B 铅笔将自己的学号填涂在答题卡上.

2、选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案；不能答在试卷上.

3、非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔在答卷纸上作答，答案必须写在答卷纸各题目指定区域内的相应位置上，超出指定区域的答案无效；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液.不按以上要求作答的答案无效.

4、考生必须保持答题卡的整洁和平整.

第一部分选择题（共 60 分）

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A=\{y|\ y=\lg x,0<x<100\},B=\left\{x\middle|-x^2+4x+5>0\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\left(0,2\right)$　　B. $\left(-1,2\right)$　　C. $\left(1,2\right)$　　D. $\left(-1,5\right)$

【答案】B

【解析】

【分析】先求出集合 A,B，再由交集的定义可求出答案.

【详解】因为 $y=\lg x,0<x<100$，所以 $y<\lg 100=2$，所以 $A=\{y|y<2\}$，

$B=\left\{x\middle|-x^2+4x+5>0\right\}=\left\{x\middle|-1<x<5\right\}$，

所以 $A\cap B=\left(-1,2\right)$.

故选：B.

2. 已知 $a\in R$，i 为虚数单位，若 $\dfrac{a-i}{3+i}$ 为实数，则 $a=$（　　）

A. -3　　B. $\dfrac{1}{3}$　　C. 3　　D. $-\dfrac{1}{3}$

【答案】A

【解析】

【分析】

先进行分母实数化，化简$\dfrac{a-i}{3+i}$，再根据条件得虚部为零，计算即得结果.

【详解】因为$\dfrac{a-i}{3+i}=\dfrac{(a-i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\dfrac{3a-1-(a+3)i}{10}=\dfrac{3a-1}{10}-\dfrac{(a+3)}{10}i$为实数，则$-\dfrac{(a+3)}{10}=0$，即$a+3=0$，

所以$a=-3$.

故选：A.

3. 已知正项等比数列$\{a_n\}$，若$a_3a_5=64, a_5+2a_6=8$，则$a_2=$（　　）

A. 16　　B. 32　　C. 48　　D. 64

【答案】B

【解析】

【分析】根据等比中项，先求出a_4，然后根据$a_5+2a_6=8$求出公比，最后求a_2

【详解】根据等比中项，$a_3a_5=64=a_4^2$，

又$\{a_n\}$是正项数列，故$a_4=8$（负值舍去）

设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，由$a_5+2a_6=8$，

即$a_4q+2a_4q^2=8$，解得$q=\dfrac{1}{2}$（正项等比数列公比不可是负数，负值舍去），

故$a_2=\dfrac{a_4}{q^2}=32$

故选：B

4. 已知向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}+\vec{b}|=7$，且$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，则$|\vec{a}-\vec{b}|=$（　　）

A. 5　　B. 3　　C. 2　　D. 1

【答案】D

【解析】

【分析】根据向量的模长的计算即可求解.

【详解】$|\vec{a}+\vec{b}|^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}=49\Rightarrow 2\vec{a}\cdot\vec{b}=49-9-16=24$，所以

$|\vec{a}-\vec{b}|^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=9+16-24=1,\therefore |\vec{a}-\vec{b}|=1$，

故选：D

5. 甲、乙两人进行乒乓球比赛，采用七局四胜制，先赢四局者获胜，没有平局、甲每局赢的概率为$\frac{1}{2}$，已

知前两局甲输了，则甲最后获胜的概率为（　　）

A. $\frac{1}{16}$　　B. $\frac{1}{8}$　　C. $\frac{3}{16}$　　D. $\frac{1}{4}$

【答案】C

【解析】

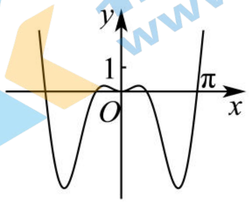
【分析】利用独立事件同时发生的概率公式，即可求得甲最后获胜的频率.

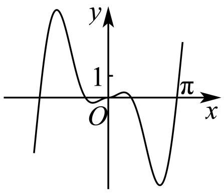
【详解】因为前两局甲都输了，所以甲需要连胜四局或第三局到第六局输 1 局且第七局胜，甲才能最后获胜，

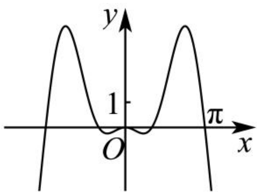
所以甲最后获胜的概率为$\left(\frac{1}{2}\right)^4+C_4^1\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$.

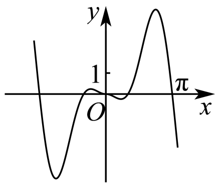
故选：C

6. 函数 $y=x(\sin x-\sin 2x)$ 的部分图象大致为（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】C

【解析】

【分析】判断函数的奇偶性，再用赋值法，排除 ABD，即可.

【详解】由 $y=f(x)=x(\sin x-\sin 2x)$，

得 $f(-x)=-x[\sin(-x)-\sin(-2x)]=-x(-\sin x+\sin 2x)=f(x)$，

所以 $f(x)$ 为偶函数，故排除 BD.

当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$y=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\pi)=\frac{\pi}{2}>0$，排除 A.

故选：C.

7. 已知 $a=\frac{\ln 2}{2}$，$b=\frac{\ln 3}{e}$，$c=\frac{\sqrt{2}}{e^{\sqrt{2}}}$，则（参考数据：$\ln 2\approx 0.7$）（　　）

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $b>c>a$　　D. $c>a>b$

【答案】B

【解析】

【分析】由 $a=\frac{\ln 2}{2}=\frac{2\ln 2}{4}=\frac{\ln 4}{4}$，$c=\frac{\ln \mathrm{e}^{\sqrt{2}}}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}$ 考虑构造函数 $f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}$，利用导数研究函数的单调性，利用单调性比较大小即可.

【详解】因为 $a=\frac{\ln 2}{2}=\frac{2\ln 2}{4}=\frac{\ln 4}{4}$，　$c=\frac{\ln \mathrm{e}^{\sqrt{2}}}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}$，

考虑构造函数 $f\left(x\right)=\frac{\ln x}{x}$，则 $f'\left(x\right)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，

当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)>0$，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(0,\mathrm{e}\right)$ 上单调递增，

当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f'(x)<0$，函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(\mathrm{e},+\infty\right)$ 上单调递减，

因为 $\ln 2\approx 0.7$，所以 $\mathrm{e}^{0.7}\approx 2$，即 $\mathrm{e}^{\sqrt{2}}>\left(\mathrm{e}^{0.7}\right)^2\approx 4$，

所以 $3<4<\mathrm{e}^{\sqrt{2}}$，

所以 $\frac{\ln 3}{3}>\frac{\ln 4}{4}>\frac{\ln \mathrm{e}^{\sqrt{2}}}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}$，即 $\frac{\ln 3}{3}>\frac{\ln 2}{2}>\frac{\ln \mathrm{e}^{\sqrt{2}}}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}$，

又 $\frac{\ln 3}{3}<\frac{\ln 3}{\mathrm{e}}$，

所以 $\frac{\ln 3}{\mathrm{e}}>\frac{\ln 2}{2}>\frac{\ln \mathrm{e}^{\sqrt{2}}}{\mathrm{e}^{\sqrt{2}}}$，故 $b>a>c$，

故选：B.

【点睛】关键点点睛：本题解决的关键在于将被比较的数化为结构相似的形式，考虑构造函数利用函数的单调性比较大小.

8. 已知双曲线 $\Gamma:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_1 的直线分别交双曲线 Γ 的左右两支于 A,B 两点，且 $\angle F_2AB=\angle F_2BA$，则 $\left|BF_2\right|=$（　）

A. $\sqrt{5}+4$　　B. $2\sqrt{5}+4$　　C. $2\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{5}$

【答案】C

【解析】

【分析】利用双曲线的定义和性质表示出各边长，再利用直角三角形的边角关系及余弦定理求出 $\left|BF_2\right|$ 即可.

【详解】由双曲线$\Gamma:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}=1$得出$a=2,b=\sqrt{2},c=\sqrt{6}$.

因为$\angle F_2AB=\angle F_2BA$，所以$|F_2A|=|F_2B|$.

作$F_2C\perp AB$于C，则C是AB的中点.

设$|F_2A|=|F_2B|=x$，则由双曲线的定义$|F_2A|-|F_1A|=2a,|F_1B|-|F_2B|=2a$，

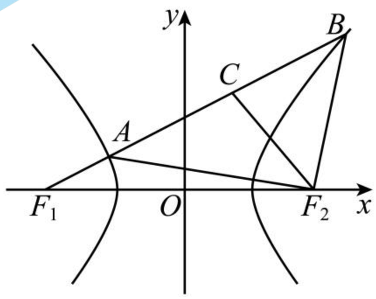
可得$|F_1A|=x-4,|F_1B|=x+4,|AB|=8$.

故$\cos\angle F_1BF_2=\frac{|CB|}{|BF_2|}=\frac{4}{x}$，

又由余弦定理得$\cos\angle F_1BF_2=\frac{(x+4)^2+x^2-(2\sqrt{6})^2}{2(x+4)\cdot x}=\frac{x^2+4x-4}{(x+4)\cdot x}$，

所以$\frac{4}{x}=\frac{x^2+4x-4}{(x+4)\cdot x}$，解得$x=2\sqrt{5}$.

故选：C



二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分.在每小题给出的4个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分.

9. 有一组样本数据$x_1,x_2,\cdots,x_6$，其中x_1是最小值，x_6是最大值，则（　　）

A. x_2,x_3,x_4,x_5的平均数等于$x_1,x_2,\cdots,x_6$的平均数

B. x_2,x_3,x_4,x_5的中位数等于$x_1,x_2,\cdots,x_6$的中位数

C. x_2,x_3,x_4,x_5的标准差不小于$x_1,x_2,\cdots,x_6$的标准差

D. x_2,x_3,x_4,x_5的极差不大于$x_1,x_2,\cdots,x_6$的极差

【答案】BD

【解析】

【分析】根据题意结合平均数、中位数、标准差以及极差的概念逐项分析判断.

【详解】对于选项 A：设 x_2,x_3,x_4,x_5 的平均数为 m， $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的平均数为 n，

则 $n-m=\dfrac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6}-\dfrac{x_2+x_3+x_4+x_5}{4}=\dfrac{2\left(x_1+x_6\right)-\left(x_5+x_2+x_3+x_4\right)}{12}$,

因为没有确定 $2\left(x_1+x_6\right),x_5+x_2+x_3+x_4$ 的大小关系，所以无法判断 m,n 的大小，

例如：$1,2,3,4,5,6$，可得 $m=n=3.5$；

例如 $1,1,1,1,1,7$，可得 $m=1,n=2$；

例如 $1,2,2,2,2,2$，可得 $m=2,n=\dfrac{11}{6}$；故 A 错误；

对于选项 B：不妨设 $x_1\le x_2\le x_3\le x_4\le x_5\le x_6$，

可知 x_2,x_3,x_4,x_5 的中位数等于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的中位数均为 $\dfrac{x_3+x_4}{2}$，故 B 正确；

对于选项 C：因为 x_1 是最小值， x_6 是最大值，

则 x_2,x_3,x_4,x_5 的波动性不大于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的波动性，即 x_2,x_3,x_4,x_5 的标准差不大于 $x_1,x_2,\cdots,x_6$ 的标准差，

例如： $2,4,6,8,10,12$，则平均数 $n=\dfrac{1}{6}\left(2+4+6+8+10+12\right)=7$，

标准差 $s_1=\sqrt{\dfrac{1}{6}\left[\left(2-7\right)^2+\left(4-7\right)^2+\left(6-7\right)^2+\left(8-7\right)^2+\left(10-7\right)^2+\left(12-7\right)^2\right]}=\dfrac{\sqrt{105}}{3}$，

$4,6,8,10$，则平均数 $m=\dfrac{1}{4}\left(4+6+8+10\right)=7$，

标准差 $s_2=\sqrt{\dfrac{1}{4}\left[\left(4-7\right)^2+\left(6-7\right)^2+\left(8-7\right)^2+\left(10-7\right)^2\right]}=\sqrt{5}$，

显然 $\dfrac{\sqrt{105}}{3}>\sqrt{5}$，即 $s_1>s_2$；故 C 错误；

对于选项 D：不妨设 $x_1\le x_2\le x_3\le x_4\le x_5\le x_6$，

则 $x_6-x_1\ge x_5-x_2$，当且仅当 $x_1=x_2,x_5=x_6$ 时，等号成立，故 D 正确；

故选：BD.

10. 已知 a,b,c 是两两异面的三条直线，$a\perp b$，$c\perp a$，直线 d 满足 $d\perp a$，$d\perp b$，$a\cap d=P$，$b\cap d=Q$，则 c 与 d 的位置关系可以是（　　）

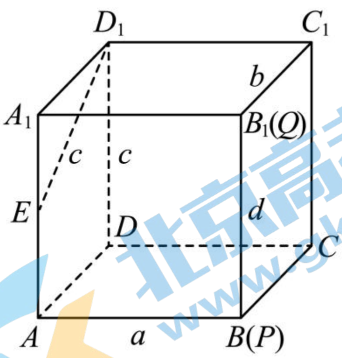
A. 相交　　B. 异面　　C. 平行　　D. 垂直

【答案】BC

【解析】

【分析】作出正方体模型，确定 AB ， B_1C_1 ， BB_1 所在直线分别为 a,b,d ，符合题意，然后考虑直线 c 的位置情况，根据空间的线面位置关系，一一判断各选项，即可得答案.

【详解】如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 AA_1 上一点（异于 A_1）， AB ， B_1C_1 ， BB_1 所在直线分别为 a,b,d .



当 DD_1 所在直线为 c 时，符合题中条件，此时 c 与 d 平行，C 正确；

当 D_1E f 所在直线为 c 时，符合题中条件，此时 c 与 d 异面，B 正确；

若 c 与 d 相交，则 a 垂直于 c,d 确定的平面，又 a 垂直于 b,d 确定的平面，

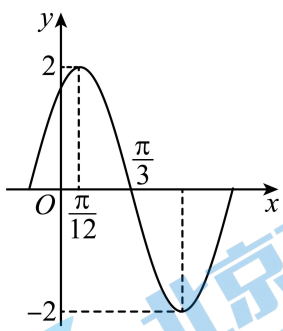
则 b,c,d 在同一个平面内，即 b 与 c 共面，与已知矛盾，A 错误；

若 c 与 d 垂直，则 c 垂直于 a,d 确定的平面，而 b 垂直于 a,d 确定的平面，

推出 b 与 c 平行或重合，与已知矛盾，D 错误，

故选：BC.

11. 如图是函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（ $A>0$， $\omega>0$， $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$ ）的部分图像，则（　　）



A. $f(x)$ 的最小正周期为 π

B. $x=\dfrac{5\pi}{6}$ 是的函数 $y=f(x)$ 的一条对称轴

C. 将函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位后，得到的函数为奇函数

D. 若函数 $y=f\left(tx\right)$（$t>0$）在 $\left[0,\pi\right]$ 上有且仅有两个零点，则 $t\in\left[\dfrac{5}{6},\dfrac{4}{3}\right)$

【答案】AD

【解析】

【分析】先根据图像可得 $A=2,T=\pi$，即可判断 A；令 $2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$ 解出 x 即可判断 B，接下来求得 ω,φ ，即可得到 $f(x)$ 的解析式，根据图象平移判断 C；令 $f(tx)=2\sin(2tx+\dfrac{\pi}{3})=0$，解出函数零点，然后根据在 $\left[0,\pi\right]$ 上有且仅有两个零点列出不等式解 t 即可判断 D.

【详解】由图像可知，$A=2$ ，$\dfrac{T}{4}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{4}$ ，即 $T=\pi$，故 A 正确；

$\therefore\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$ ，此时 $f(x)=2\sin(2x+\varphi)$，

又 $\because(\dfrac{\pi}{12},2)$ 在图像上，$\therefore 2=2\sin(2\times\dfrac{\pi}{12}+\varphi)$ ，解得 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi(k\in Z)$，

$\therefore f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3}+2k\pi)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ ，

$\because f(x)=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$ ，$\therefore 2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$， $\therefore x=\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2}(k\in Z)$ ，

当 $x=\dfrac{5\pi}{6}$ 是函数 $y=f\left(x\right)$ 的一条对称轴时，此时 $k=\dfrac{3}{2}$ 不符合题意，故 B 错误；

将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{\pi}{3}$ 个单位后得到的图象对应的解析式为：

$g(x)=2\sin[2(x-\dfrac{\pi}{3})+\dfrac{\pi}{3}]=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$ 不为奇函数，故 C 错误；

令 $f(tx)=2\sin(2tx+\dfrac{\pi}{3})=0$ ，解得 $x=-\dfrac{\pi}{6t}+\dfrac{k\pi}{2t}(k\in Z)$ ，

当 $k=0$ 时，$x=-\dfrac{\pi}{6t}<0$ ，不合题意

$k=1$ 时，$x=\dfrac{\pi}{3t}$ ；$k=2$ 时，$x=\dfrac{5\pi}{6t}$ ；$k=3$ 时，$x=\dfrac{4\pi}{3t}$ ；

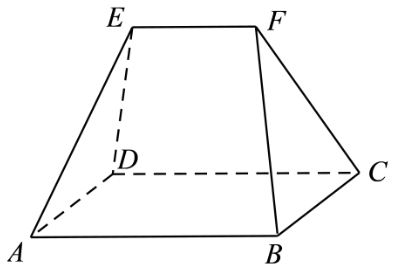
又因为函数 $y=f\left(tx\right)(t>0)$ 在 $\left[0,\pi\right]$ 上有且仅有两个零点

$\therefore\begin{cases}\dfrac{5\pi}{6t}\le\pi\\ \dfrac{4\pi}{3t}>\pi\end{cases}$ ，解得 $\dfrac{5}{6}\le t<\dfrac{4}{3}$ ，故 D 正确.

故选：AD.

12. 我国古代《九章算术》里记载了一个“羡除”的例子，羡除，隧道也，其所穿地，上平下邪，如图是一个

“羡除”模型，该“羡除”是以 A,B,C,D,E,F 为顶点的五面体，四边形 $ABCD$ 为正方形， EF // 平面 $ABCD, AB=2EF=4, AE=DE=BF=CF=2\sqrt{3}$，则（　　）



A. 该几何体的表面积为 $8\sqrt{2}+6\sqrt{11}+16$

B. 该几何体的体积为 $\dfrac{20\sqrt{7}}{3}$

C. 该几何体的外接球的表面积为 40π

D. AE 与平面 FBC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{42}}{12}$

【答案】ABD

【解析】

【分析】过 E 作 $EK\perp AB$ 于 K，作 $EM\perp DC$ 于 M，过 F 作 $FG\perp AB$ 于 G，作 $FH\perp DC$ 于 H，将该几何体分为一个棱柱与两个棱锥，取 AD，BC 的中点 P，Q，则 $EP\perp AD$，$FQ\perp BC$，然后求出表面积可判断 A；连接 PQ，交 GH 于 T，则 T 为 GH 的中点，可证得 $FT\perp$ 面 $ABCD$，求出一个棱柱与两个棱锥的体积，可得该几何体的体积，从而判断 B；连接 AC，BD 交于点 O，可求得 O 为该几何体的外接球的球心，半径 $R=2\sqrt{2}$，求出表面积即可判断 C；取 AB 的中点 N，得 AE // FN，则 AE 与平面 FBC 所成角等于 FN 与平面 FBC 所成角，设 N 到面 FBC 的距离为 h，利用等体积法，由 $V_{N-FBC}=V_{F-NBC}$ 求得 h，进而可得 AE 与平面 FBC 所成角的正弦值，可判断 D.

【详解】∵EF // 平面 $ABCD$，EF 在平面 $ABFE$ 内，平面 $ABFE\cap$ 平面 $ABCD=AB$，∴EF // AB，

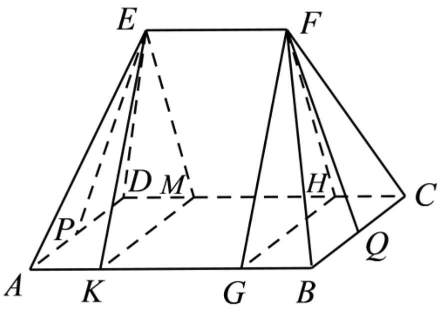
∵AB // DC，∴EF // DC，

∵ $AB=2EF=4, AE=DE=BF=CF=2\sqrt{3}$

∴$ABFE$，$DCFE$ 均为等腰梯形，

过 E 作 $EK\perp AB$ 于 K，作 $EM\perp DC$ 于 M，连接 KM，

过 F 作 $FG\perp AB$ 于 G，作 $FH\perp DC$ 于 H，连接 GH，



$\therefore EF // KG // MH$， $EF = KG = MH = 2$，$AK = GB = DM = HC = 1$，

$\because AB // DC$ ， $FH \perp DC$，$\therefore AB \perp FH$，

又 $AB \perp GF$，GF，FH 在平面 FGH 内，$GF \cap FH = F$，

$\therefore AB \perp$ 面 FGH，同理，$AB \perp$ 面 EKM，$\therefore$ 面 $FGH //$ 面 EKM，

$\therefore$ 该几何体被分为一个棱柱与两个棱锥.

分别取 AD，BC 的中点 P，Q，连接 FQ，EP，

$\because AE = DE = BF = CF = 2\sqrt{3}$，$\therefore EP \perp AD$，$FQ \perp BC$，

$\therefore FQ = \sqrt{FB^2 - BG^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - 1^2} = \sqrt{11}$，

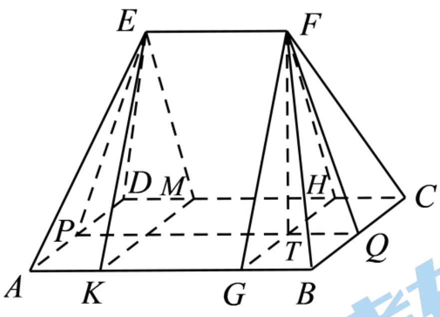
$\therefore S_{\triangle EAD} = S_{\triangle FBC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$，

$FG = \sqrt{FB^2 - BQ^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}$，

$S_{DCFE} = S_{ABFE} = \frac{1}{2} \times (2 + 4) \times \sqrt{11} = 3\sqrt{11}$，又 $S_{ABCD} = 4 \times 4 = 16$，

$\therefore$ 该几何体的表面积为 $S_{\triangle EAD} + S_{\triangle FBC} + S_{DCFE} + S_{ABFE} + S_{ABCD} = 8\sqrt{2} + 6\sqrt{11} + 16$， 故 A 正确；

连接 PQ，交 GH 于 T，则 T 为 GH 的中点，连接 FT，



$\because AB \perp$ 面 FGH，FT 在面 FGH 内，$\therefore FT \perp AB$，

$\because GF = FH = EK = EM$，$\therefore FT \perp GH$，

又 AB，GH 在面 $ABCD$ 内，$AB \cap GH = G$，$\therefore FT \perp$ 面 $ABCD$，

$\therefore FT = \sqrt{FQ^2 - QT^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} = \sqrt{7}$，

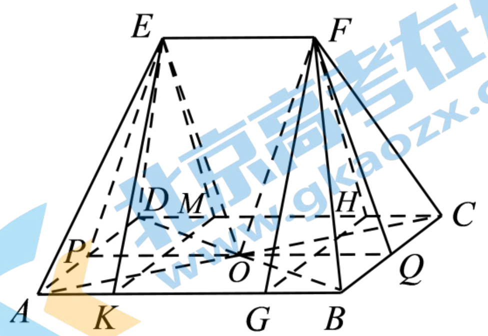
$\therefore V_{E-AKMD}=V_{F-GBCH}=\frac{1}{3}\times4\times1\times\sqrt{7}=\frac{4\sqrt{7}}{3}$，

$\because S_{\triangle FGH}=\frac{1}{2}GH\cdot FT=\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{7}=2\sqrt{7}$，

$\therefore V_{FGH-EKM}=S_{\triangle FGH}\cdot GK=2\sqrt{7}\times2=4\sqrt{7}$，

∴该几何体的体积为$V_{E-AKMD}+V_{F-GBCH}+V_{FGH-EKM}=\frac{20\sqrt{7}}{3}$，故 B 正确；

连接 AC，BD 交于点 O，则 O 也在 PQ 上，连接 OE，OF，



∵EF∥OQ，$EF=OQ$，∴$EFQO$ 为平行四边形，

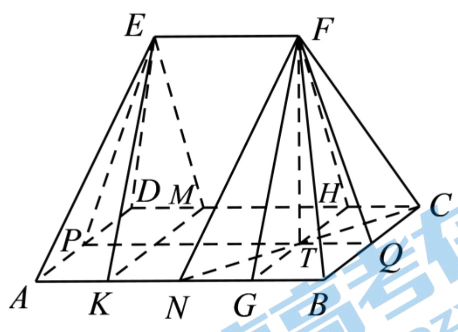
∴$EO=FQ=2\sqrt{2}$，同理，$FO=EP=2\sqrt{2}$，

∴$OA=OB=OC=OD=OE=OF=2\sqrt{2}$，

∴O 为该几何体的外接球的球心，半径 $R=2\sqrt{2}$，

∴该几何体的外接球的表面积为$4\pi R^2=32\pi$，故 C 错误；

取 AB的中点 N，连接 FN，NC，



∵EF∥AN，$EF=AN$，∴$EFNA$ 为平行四边形，∴AE∥FN，

∴ AE 与平面 FBC 所成角等于 FN 与平面 FBC 所成角，设为θ，

设 N 到面 FBC 的距离为 h，

$\because V_{N-FBC}=V_{F-NBC}$，$\therefore \frac{1}{3}S_{\triangle FBC}\cdot h=\frac{1}{3}S_{\triangle NBC}\cdot FT$，

$\therefore \frac{1}{3}\times 4\sqrt{2}\times h=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 2\times 4\times\sqrt{7}$，$\therefore h=\frac{\sqrt{14}}{2}$，

$\therefore \sin\theta=\frac{h}{FN}=\frac{\frac{\sqrt{14}}{2}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{42}}{12}$，

即 AE 与平面 FBC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{42}}{12}$，故 D 正确.

故选：ABD.

第二部分非选择题（共 90 分）

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，且满足 $f(x)=x^3-x\cdot f'(2)$，则函数 $f(x)$ 在点（2，$f(2)$）处的切线方程为______________.

【答案】$6x-y-16=0$

【解析】

【详解】试题分析：对函数 $f(x)=x^3-x\cdot f'(2)$，求导可得 $f'(x)=3x^2-f'(2)$，得 $f'(2)=3\times 2^2-f'(2)$，因而切线的斜率 $k=f'(2)=6$ 而 $f(2)=2^3-2\times f'(2)=8-12=-4$，由点斜式可得切线方程为 $y+4=6(x-2)$ 即 $6x-y-16=0$

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 各项均为正数，若 $a_1=1$，且 $\ln a_{n+1}=\ln a_n+1\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$，则 $\{a_n\}$ 的通项公式为______.

【答案】$a_n=\mathrm{e}^{n-1}$##$a_n=\frac{\mathrm{e}^n}{\mathrm{e}}$

【解析】

【分析】推导出数列 $\{a_n\}$ 为等比数列，确定该数列的首项和公比，可求得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【详解】由已知可得 $\ln a_{n+1}-\ln a_n=\ln\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$，所以，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\mathrm{e}$，

所以，数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，且该数列的首项为 1，公比为 e，因此，$a_n=1\cdot\mathrm{e}^{n-1}=\mathrm{e}^{n-1}$.

故答案为：$a_n=\mathrm{e}^{n-1}$.

15. 已知二项式$\left(1-x+\frac{a}{y}\right)^5$的展开式中含$\frac{x^3}{y}$的项的系数为$-40$，则$a=$________.

【答案】2

【解析】

【分析】$\left(1-x+\frac{a}{y}\right)^5$表示有5个$\left(1-x+\frac{a}{y}\right)^5$因式相乘，根据$\frac{x^3}{y}$的来源分析即可求出答案.

【详解】$\left(1-x+\frac{a}{y}\right)^5$表示有5个$\left(1-x+\frac{a}{y}\right)^5$因式相乘，$\frac{x^3}{y}$来源如下：

有1个$\left(1-x+\frac{a}{y}\right)^5$提供$\frac{a}{y}$，有3个$\left(1-x+\frac{a}{y}\right)^5$提供$x$，有1个$\left(1-x+\frac{a}{y}\right)^5$提供常数，

此时$\frac{x^3}{y}$系数是$C_5^1C_4^3(-1)^3a=-40$，即$-20a=-40$，解得：$a=2$

故答案为：2.

16. 设$f(x)$为定义在整数集上的函数，$f(1)=1$，$f(2)=0$，$f(-1)<0$，对任意的整数x,y均有$f(x+y)=f(x)f(1-y)+f(1-x)f(y)$. 则$f(55)=$______.

【答案】-1

【解析】

【分析】采用赋值的方式可求得$f(0),f(-1)$，令$y=1$和$y=-x$可证得$f(x)$的对称轴和奇偶性，由此可推导得到$f(x)$的周期性，利用周期性可求得函数值.

【详解】令$x=y=1$，则$f(2)=f(1)f(0)+f(0)f(1)=2f(0)=0$，$\therefore f(0)=0$；

令$x=2$，$y=-1$，则$f(1)=f^2(2)+f^2(-1)=f^2(-1)=1$，又$f(-1)<0$，$\therefore f(-1)=-1$；

令$y=1$，则$f(x+1)=f(x)f(0)+f(1-x)f(1)=f(1-x)$，$\therefore f(x)$关于直线$x=1$对称；

令$y=-x$，则$f(0)=f(x)f(1+x)+f(1-x)f(-x)=[f(x)+f(-x)]f(1+x)=0$，

$\because f(1+x)=0$不恒成立，$\therefore f(x)+f(-x)=0$恒成立，$\therefore f(x)$为奇函数，

$\because f(x+2)=f(-x)=-f(x)$，$\therefore f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，

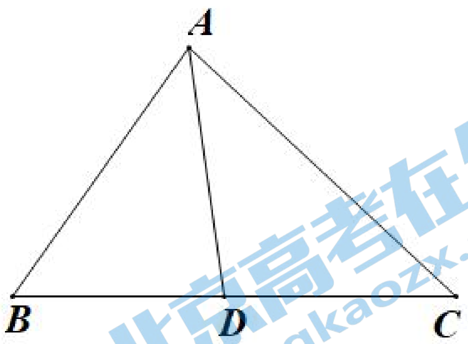
$\therefore f(x)$是周期为4的周期函数，$\therefore f(55)=f(4\times14-1)=f(-1)=-1$.

故答案为：-1.

【点睛】关键点点睛：本题考查利用抽象函数的周期性求解函数值的问题，解题关键是能够通过赋值的方式，借助已知中的抽象函数关系式推导得到函数的对称性和奇偶性，以及所需的函数值，进而借助对称性和奇偶性推导得到函数的周期.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A 的平分线交线段 BC 于点 D.



（1）证明 $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BD}{DC}$；

（2）若 $AB=6$， $AC=8$， $BC=7$，求 AD.

【答案】（1）证明见解析；（2） $AD=6$.

【解析】

【分析】（1）由题得 $\dfrac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABD}}=\dfrac{AC}{AB}$，再代入面积公式即得证；

（2）由题得 $BD=3$， $CD=4$，求出 $\cos B=\dfrac{1}{4}$，再利用余弦定理得解.

【详解】（1）证明：依题意 AD 为 $\angle A$ 的平分线，设 $\angle CAD=\angle 1,\angle BAD=\angle 2,$

$\therefore \angle 1=\angle 2$

$\because S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}AC\cdot AD\cdot\sin\angle 1$

$S_{\triangle ABD}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AD\cdot\sin\angle 2$

故 $\dfrac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABD}}=\dfrac{AC}{AB}$，

设 A 点到 BC 的距离为 h，

则可知 $\dfrac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ABD}}=\dfrac{\frac{1}{2}CD\cdot h}{\frac{1}{2}BD\cdot h}=\dfrac{CD}{BD}$

$\therefore$可知 $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CD}{BD}$

（2）由 $\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CD}{BD}=\dfrac{8}{6}=\dfrac{4}{3}$，又 $BD+DC=BC=7$

$\therefore$可知 $BD=3$，$CD=4$

在 $\triangle ABC$ 中，$\cos B=\dfrac{6^2+7^2-8^2}{2\times6\times7}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore$在 $\triangle ABD$ 中，$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cdot\cos B=36$

即 $AD=6$.

【点睛】方法点睛：解三角形的主要考点有正弦定理、余弦定理和三角形的面积公式，解答三角形问题时，主要从这几个考点出发.

18. 中国共产党第二十次全国代表大会于 2022 年 10 月 16 日在北京召开，为弘扬中国共产党百年奋斗的光辉历程，某校团委决定举办"中国共产党党史知识"竞赛活动.竞赛共有 A 和 B 两类试题，每类试题各 10 题，其中每答对 1 道 A 类试题得 10 分；每答对 1 道 B 类试题得 20 分，答错都不得分.每位参加竞赛的同学从这两类试题中共抽出 3 道题回答（每道题抽后不放回）.已知小明同学 A 类试题中有 7 道题会作答，而他答对各道 B 类试题的概率均为 $\dfrac{2}{5}$.

（1）若小明同学在 A 类试题中只抽 1 道题作答，求他在这次竞赛中仅答对 1 道题的概率；

（2）若小明只作答 A 类试题，设 X 表示小明答这 3 道试题的总得分，求 X 的分布列和期望.

【答案】（1）$\dfrac{99}{250}$

（2）分布列见解析，期望 21

【解析】

【分析】（1）分 A 类试题答对和 B 类试题答对两种类型计算概率；

（2）列出 X 所有可能的取值，求出随机变量取每一个值的概率值，即可求随机变量的分布列及数学期望.

【小问 1 详解】

小明仅答对 1 题的概率 $P=\dfrac{7}{10}\times\left(\dfrac{3}{5}\right)^2+\dfrac{3}{10}\times C_2^1\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{99}{250}$.

【小问 2 详解】

X 可能的取值为 0，10，20，30，

$P(X=0)=\dfrac{C_3^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{120}$，$P(X=10)=\dfrac{C_7^1C_3^2}{C_{10}^3}=\dfrac{7}{40}$，

$P(X=20)=\frac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{21}{40}$，$P(X=30)=\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{24}$，

所以 X 的分布列为

X	0	10	20	30
P	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{24}$

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{120}+10\times\frac{7}{40}+20\times\frac{21}{40}+30\times\frac{7}{24}=21$.

19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=\frac{3}{5}$，且满足 $a_{n+1}=\frac{3a_n}{2a_n+1}$.

（1）求证：数列 $\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$ 为等比数列；

（2）设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\begin{cases}\frac{1}{a_n}-3, n\text{为偶数时},\\ \frac{n+2}{n}+\frac{n}{n+2}, n\text{为奇数时},\end{cases}$ 求最小的实数 m，使得 $b_1+b_2+\cdots+b_{2k}<m$ 对一切正整数 k 均成立.

【答案】（1）证明见解析

（2）$\frac{9}{4}$

【解析】

【分析】（1）根据等比数列的定义即可证明.

（2）根据奇偶项的特点，由裂项求和和分组求和，结合等比数列求和公式即可求解 $b_1+b_2+\cdots+b_{2k}$，由不等式的性质即可求解.

【小问 1 详解】

由已知得，$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3a_n}$，

所以 $\frac{1}{a_{n+1}}-1=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n}-1\right)$.

因为 $\frac{1}{a_1}-1=\frac{2}{3}\neq0$，

所以数列$\left\{\frac{1}{a_n}-1\right\}$是首项为$\frac{2}{3}$，公比为$\frac{1}{3}$的等比数列.

【小问 2 详解】

证明：(2) 由 (1)，当 n 为偶数时，$b_n=\frac{1}{a_n}-3=\frac{2}{3^n}-2$，

当 n 为奇数时，$b_n=\frac{n+2}{n}+\frac{n}{n+2}=2+\frac{2}{n}-\frac{2}{n+2}$，

故$b_1+b_2+\cdots+b_{2k}=(b_1+b_3+\cdots+b_{2k-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_{2k})$

$$=\left(2+\frac{2}{1}-\frac{2}{3}\right)+\left(2+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}\right)+\cdots+\left(2+\frac{2}{2k-1}-\frac{2}{2k+1}\right)+\left(\frac{2}{3^2}-2\right)+\left(\frac{2}{3^4}-2\right)+\cdots+\left(\frac{2}{3^{2k}}-2\right)$$

$$=2k+2-\frac{2}{2k+1}+\left(\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\cdots+\frac{2}{3^{2k}}\right)-2k$$

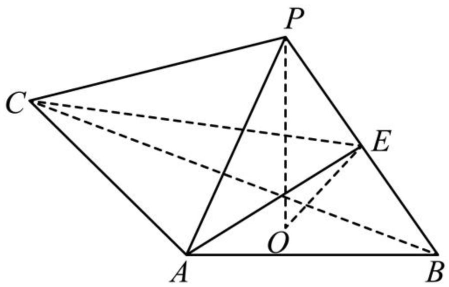
$$=2-\frac{2}{2k+1}+\frac{\frac{2}{3^2}\left(1-\frac{1}{3^{2k}}\right)}{1-\frac{1}{3^2}}$$

$$=\frac{9}{4}-\frac{2}{2k+1}-\frac{1}{4\cdot 3^{2k}}，$$

由$\frac{9}{4}-\frac{2}{2k+1}-\frac{1}{4\cdot 3^{2k}}<\frac{9}{4}$

所以 m 的最小值为$\frac{9}{4}$.

20. 如图，PO是三棱锥$P-ABC$的高，$PA=PB$，$AB\perp AC$，E是PB的中点.



(1) 证明：$OE//$平面PAC；

(2) 若$\angle ABO=\angle CBO=30^\circ$，$PO=3$，$PA=5$，求二面角$C-AE-B$的正弦值.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $\frac{11}{13}$

【解析】

【分析】(1) 连接BO并延长交AC于点D，连接OA、PD，根据三角形全等得到$OA=OB$，再根据直

角三角形的性质得到 $AO=DO$，即可得到 O 为 BD 的中点从而得到 $OE//PD$，即可得证；

（2）建立适当的空间直角坐标系，利用空间向量法求出二面角的余弦的绝对值，再根据同角三角函数的基本关系计算可得.

【小问 1 详解】

证明：连接 BO 并延长交 AC 于点 D，连接 OA、PD，

因为 PO 是三棱锥 $P-ABC$ 的高，所以 $PO\perp$ 平面 ABC，$AO,BO\subset$ 平面 ABC，

所以 $PO\perp AO$、$PO\perp BO$，

又 $PA=PB$，所以 $\triangle POA\cong\triangle POB$，即 $OA=OB$，所以 $\angle OAB=\angle OBA$，

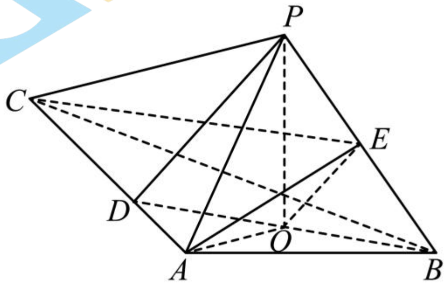
又 $AB\perp AC$，即 $\angle BAC=90^\circ$，所以 $\angle OAB+\angle OAD=90^\circ$，$\angle OBA+\angle ODA=90^\circ$，

所以 $\angle ODA=\angle OAD$

所以 $AO=DO$，即 $AO=DO=OB$，所以 O 为 BD 的中点，又 E 为 PB 的中点，所以 $OE//PD$，

又 $OE\not\subset$ 平面 PAC，$PD\subset$ 平面 PAC，

所以 $OE//$ 平面 PAC



【小问 2 详解】

解：过点 A 作 $Az//OP$，如图建立空间直角坐标系，

因为 $PO=3$，$AP=5$，所以 $OA=\sqrt{AP^2-PO^2}=4$，

又 $\angle OBA=\angle OBC=30^\circ$，所以 $BD=2OA=8$，则 $AD=4$，$AB=4\sqrt{3}$，

所以 $AC=12$，所以 $O\left(2\sqrt{3},2,0\right)$，$B\left(4\sqrt{3},0,0\right)$，$P\left(2\sqrt{3},2,3\right)$，$C\left(0,12,0\right)$，

所以 $E\left(3\sqrt{3},1,\frac{3}{2}\right)$，

则 $\overrightarrow{AE}=\left(3\sqrt{3},1,\frac{3}{2}\right)$，$\overrightarrow{AB}=\left(4\sqrt{3},0,0\right)$，$\overrightarrow{AC}=\left(0,12,0\right)$，

设平面 AEB 的法向量为 $\vec{n}=\left(x,y,z\right)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=3\sqrt{3}x+y+\frac{3}{2}z=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=4\sqrt{3}x=0\end{cases}$，令 $z=2$，则 $y=-3$，$x=0$，所以 $\vec{n}=\left(0,-3,2\right)$；

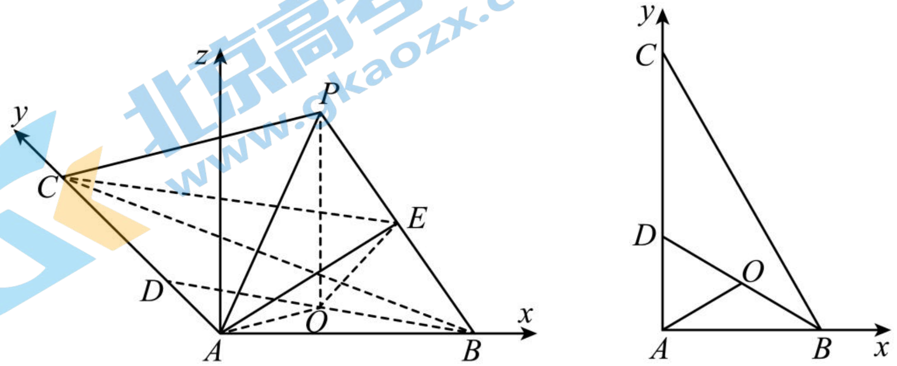
设平面 AEC 的法向量为 $\overrightarrow{m}=(a,b,c)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{AE}=3\sqrt{3}a+b+\dfrac{3}{2}c=0\\ \overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{AC}=12b=0\end{cases}$，

令 $a=\sqrt{3}$，则 $c=-6$，$b=0$，所以 $\overrightarrow{m}=(\sqrt{3},0,-6)$；

所以 $\cos\left\langle\overrightarrow{n},\overrightarrow{m}\right\rangle=\dfrac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{m}}{|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{m}|}=\dfrac{-12}{\sqrt{13}\times\sqrt{39}}=-\dfrac{4\sqrt{3}}{13}$.

设二面角 $C-AE-B$ 的大小为 θ，则 $|\cos\theta|=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{n},\overrightarrow{m}\right\rangle\right|=\dfrac{4\sqrt{3}}{13}$，

所以 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{11}{13}$，即二面角 $C-AE-B$ 的正弦值为 $\dfrac{11}{13}$.



21. 设 F_1，F_2 分别为椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，P 是椭圆 C 的短轴的一个端点，已知 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 $\sqrt{2}$，$\cos\angle F_1PF_2=-\dfrac{1}{3}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）是否存在与 PF_2 平行的直线 l，满足直线 l 与椭圆 C 交于两点 M，N，且以线段 MN 为直径的圆经过坐标原点？若存在，求直线 l 的方程；若不存在，请说明理由.

【答案】（Ⅰ）$\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$；（Ⅱ）存在满足条件的直线 l，方程为 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x+\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ 或 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

【解析】

【分析】（Ⅰ）由 $\triangle PF_1F_2$ 的面积得 $cb=\sqrt{2}$，又根据 $\cos\angle F_1PF_2=-\dfrac{1}{3}$ 得 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，结合 a,b,c 关系即可求得椭圆 C 的标准方程；公众号：全元高考

（Ⅱ）可设直线 l 的方程代入椭圆方程求得两根关系，以线段 MN 为直径的圆经过坐标原点 O，则

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，代入坐标化简求取$m$值，即可求得直线方程.

【详解】解：（Ⅰ）设$|F_1F_2|=2c$，则$\triangle PF_1F_2$的面积等于$\frac{1}{2}|F_1F_2||OP|=cb$，所以$cb=\sqrt{2}$. ①

由$\cos 2\angle OPF_2=\cos\angle F_1PF_2=-\frac{1}{3}$，即$2\cos^2\angle OPF_2-1=-\frac{1}{3}$，

得$\cos\angle OPF_2=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

因为在直角$\triangle OPF_2$中，$|OP|=b$，$|OF_2|=c$，$|PF_2|=\sqrt{|OP|^2+|OF_2|^2}=\sqrt{b^2+c^2}=a$，

所以$\cos\angle OPF_2=\frac{b}{a}$，所以$\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$. ②

由①②及$a^2=b^2+c^2$，得$a=\sqrt{3}$，$b=1$，$c=\sqrt{2}$，

所以椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

（Ⅱ）因为直线PF_2的斜率为$-\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以可设直线l的方程为$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+m$，代入$\frac{x^2}{3}+y^2=1$，

整理得$\frac{5}{6}x^2-\sqrt{2}mx+m^2-1=0$.

由$\Delta=\left(\sqrt{2}m\right)^2-4\times\frac{5}{6}\left(m^2-1\right)>0$，得$m^2<\frac{5}{2}$.

设$M\left(x_1,-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+m\right)$，$N\left(x_2,-\frac{\sqrt{2}}{2}x_2+m\right)$，

则$x_1+x_2=\frac{6\sqrt{2}m}{5}$，$x_1x_2=\frac{6\left(m^2-1\right)}{5}$.

若以线段MN为直径的圆经过坐标原点O，则$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$，

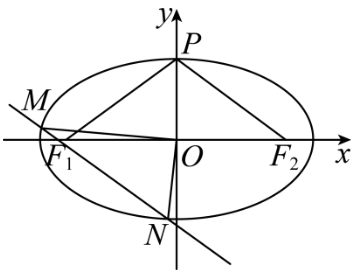
即$x_1x_2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x_1+m\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}x_2+m\right)=0$，

得$\frac{3}{2}x_1x_2-\frac{\sqrt{2}}{2}m\left(x_1+x_2\right)+m^2=0$，

所以$\frac{3}{2}\times\frac{6\left(m^2-1\right)}{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}m\times\frac{6\sqrt{2}m}{5}+m^2=0$，得$m^2=\frac{9}{8}$.

因为$\frac{9}{8}<\frac{5}{2}$，所以$m=\pm\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 公众号：全元高考

所以存在满足条件的直线l，方程为$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{3\sqrt{2}}{4}$或$y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\frac{3\sqrt{2}}{4}$.



【点睛】解决直线与椭圆的综合问题时，要注意：

(1)注意观察应用题设中的每一个条件，明确确定直线、椭圆的条件；

(2)强化有关直线与椭圆联立得出一元二次方程后的运算能力，重视根与系数之间的关系、弦长、斜率、三角形的面积等问题.

22. 已知函数$f\left(x\right)=a\ln x-ax+1$，$a\in \mathrm{R}$.

（1）若经过点$\left(0,0\right)$的直线与函数$f\left(x\right)$的图像相切于点$\left(2,f\left(2\right)\right)$，求实数$a$的值；

（2）设$g\left(x\right)=f\left(x\right)+\frac{1}{2}x^2-1$，若$g\left(x\right)$有两个极值点为$x_1$，$x_2\left(x_1\neq x_2\right)$，且不等式$g\left(x_1\right)+g\left(x_2\right)<\lambda\left(x_1+x_2\right)$恒成立，求实数$\lambda$的取值范围.

【答案】（1）$a=\frac{1}{1-\ln 2}$

（2）$[2\ln 2-3,+\infty)$

【解析】

【分析】（1）由题意，对函数求导，根据导数的几何意义进行求解即可；

（2）将$g\left(x\right)$有两个极值点为x_1，$x_2\left(x_1\neq x_2\right)$，转化为方程$x^2-ax+a=0$在$(0,+\infty)$上有两个不同的根，根据根的判别式求出$a$的取值范围，将不等式$g\left(x_1\right)+g\left(x_2\right)<\lambda\left(x_1+x_2\right)$恒成立，转化为$\lambda>\frac{g\left(x_1\right)+g\left(x_2\right)}{x_1+x_2}$恒成立，通过构造函数，将问题转化为函数极值问题，进而即可求解.

【小问 1 详解】公众号：全元高考

$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，

由$f\left(x\right)=a\ln x-ax+1$，得$f'\left(x\right)=\frac{a}{x}-a$，则$f'\left(2\right)=\frac{a}{2}-a=-\frac{a}{2}$，

因为经过点$\left(0,0\right)$的直线与函数$f\left(x\right)$的图像相切于点$\left(2,f\left(2\right)\right)$，

所以$k=\frac{f(2)}{2}=-\frac{a}{2}$，

所以 $a\ln 2-2a+1=-a$，解得 $a=\dfrac{1}{1-\ln 2}$，

【小问 2 详解】

$g(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2-1=a\ln x-ax+\frac{1}{2}x^2$，则 $g'(x)=\frac{a}{x}-a+x=\frac{x^2-ax+a}{x}(x>0)$，

因为 $g(x)$ 有两个极值点为 x_1， $x_2\left(x_1\neq x_2\right)$，

所以 $g'(x)=\frac{x^2-ax+a}{x}=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的根，

此时方程 $x^2-ax+a=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的根，

则 $\Delta=a^2-4a>0$，且 $x_1+x_2=a>0,x_1x_2=a>0$，解得 $a>4$，

若不等式 $g(x_1)+g(x_2)<\lambda(x_1+x_2)$ 恒成立，则 $\lambda>\frac{g(x_1)+g(x_2)}{x_1+x_2}$ 恒成立，

因为 $g(x_1)+g(x_2)=a(\ln x_1-x_1)+\frac{1}{2}x_1^2+a(\ln x_2-x_2)+\frac{1}{2}x_2^2$

$=a\ln(x_1x_2)-a(x_1+x_2)+\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)$

$=a\ln(x_1x_2)-a(x_1+x_2)+\frac{1}{2}\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]$

$=a\ln a-\frac{1}{2}a^2-a$

不妨设 $h(a)=\frac{g(x_1)+g(x_2)}{x_1+x_2}=\frac{a\ln a-\frac{1}{2}a^2-a}{a}=\ln a-\frac{1}{2}a-1(a>4)$，

则 $h'(a)=\frac{1}{a}-\frac{1}{2}=\frac{2-a}{2a}$，

因为 $a>4$，所以 $h'(a)<0$，

所以 $h(a)$ 在 $(4,+\infty)$ 上递减，所以 $h(a)<h(4)=2\ln 2-3$，

所以 $\lambda\geq 2\ln 2-3$，

即实数 λ 的取值范围为 $[2\ln 2-3,+\infty)$.

【点睛】关键点点睛：此题考查导数的综合应用，考查导数几何意义，考查利用导数解决不等式恒成立问题，解题的关键是将极值点问题转化为方程 $x^2-ax+a=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的根，求出 a 的范围，再将不等式 $g(x_1)+g(x_2)<\lambda(x_1+x_2)$ 恒成立，则 $\lambda>\frac{g(x_1)+g(x_2)}{x_1+x_2}=\ln a-\frac{1}{2}a-1(a>4)$ 恒成立，然

后构造关于a的函数，利用导数求出其范围，考查数学转化思想和计算能力，属于难题.