

数 学（理科）

考生注意：

1. 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 150 分。考试时间 120 分钟。
2. 请将各题答案填写在答题卡上。
3. 本试卷主要考试内容：复数，集合与常用逻辑用语，函数与导数，三角与向量，数列，不等式。

第 I 卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

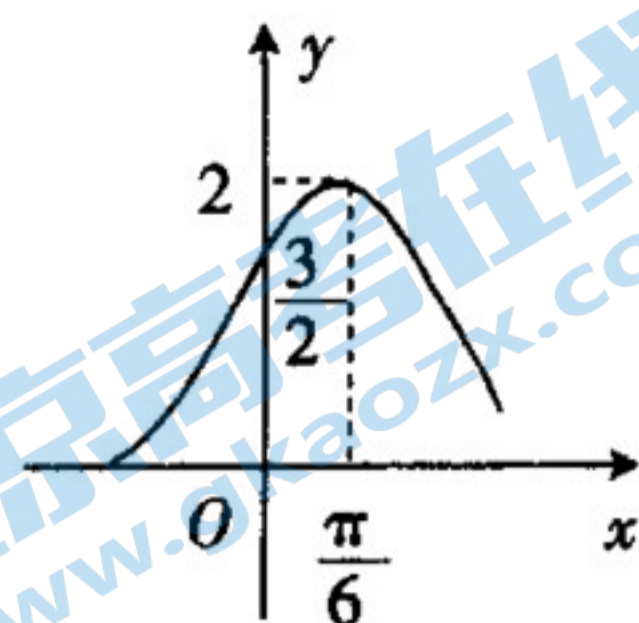
1. 已知全集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，集合 $A = \{x \mid 1 \leq x \leq 4, x \in \mathbf{N}\}$ ， $B = \{x \mid 6 < 2^x < 33, x \in \mathbf{N}\}$ ，则 $(\complement_U A) \cap B =$
A. $\{0, 5, 6\}$ B. $\{0, 5\}$ C. $\{1\}$ D. $\{5\}$
2. 复数 $z = \frac{2i^3}{1+i}$ 的虚部为
A. -1 B. 1 C. $-i$ D. i
3. 在公比为 2 的等比数列 $\{a_n\}$ 中，前 n 项和为 S_n ，且 $S_7 - 2S_6 = 1$ ，则 $a_1 + a_5 =$
A. 5 B. 9 C. 17 D. 33
4. 已知向量 $\mathbf{m} = (\lambda + 1, 1)$ ， $\mathbf{n} = (\lambda + 2, 2)$ ，若 $(2\mathbf{m} + \mathbf{n}) \parallel (\mathbf{m} - 2\mathbf{n})$ ，则 $\lambda =$
A. -1 B. 0 C. 1 D. 2
5. 已知 $\sin 2\alpha = \cos \alpha$ ， $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，则 $\cos 2\alpha =$
A. $\frac{3}{4}$ B. $-\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$
6. “ $a < -1$ ”是“ $\exists x_0 \in \mathbf{R}, a \sin x_0 + 1 < 0$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
7. 函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) + 1$ ($\omega > 0$ ， $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示，将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后得函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x) =$

A. $\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$

B. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$

C. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$

D. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$



8. 函数 $f(x) = x^{2019} + a - 1 - 3\sin x$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数, 则 $f(x)$ 的零点的个数为

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

9. 已知 $a, b \in (0, +\infty)$, 且 $1 + \frac{2}{ab} = \frac{9}{a+b}$, 则 $a+b$ 的取值范围是

- A. $[1, 9]$ B. $[1, 8]$ C. $[8, +\infty)$ D. $[9, +\infty)$

10. 已知正 $\triangle ABC$ 的边长为 1, EF 为该三角形内切圆的直径, P 在 $\triangle ABC$ 的三边上运动, 则 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ 的最大值为

- A. 1 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{1}{4}$

11. 方程 $\log_6(4^x + 5^x) = \log_4(6^x - 5^x)$ 的实根个数为

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

12. 设首项为 1 的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_n = \begin{cases} a_{n-1} + 1, & n = 2k, k \in \mathbf{N}^*, \\ 2a_{n-1} + 1, & n = 2k + 1, k \in \mathbf{N}^*. \end{cases}$ 若 $S_m > 2020$, 则正整数 m 的最小值为

- A. 15 B. 16 C. 17 D. 18

第 II 卷

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 把答案填在答题卡中的横线上.

13. 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y + 1 \geq 0, \\ x - y \geq 0, \\ x + y - 5 \leq 0, \end{cases}$ 则 $z = x + 3y$ 的最大值为_____.

14. 已知 α 为第二象限角, 则 $\cos \alpha \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} + \sin^2 \alpha \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}} =$ _____.

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 若 a, b, c 成等比数列, 且 $b = a \cos C + c \sin A$, 则 $\frac{b \sin B}{c} =$ _____.

16. 已知直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = e^x$ 的一条切线, 则 $k + b$ 的取值范围是_____.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q>0$,其前 n 项和为 S_n ,且 $S_5=62$, a_4, a_5 的等差中项为 $3a_3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \frac{1}{(\log_2 a_n)(\log_2 a_{n+2})}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12分)

已知函数 $f(x) = \begin{cases} 4^x - 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1 - 4^{-x}, & x < 0. \end{cases}$

(1) 判断 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇偶性,并证明之;

(2) 求不等式 $-1 < f(\log_4 x) \leq 3$ 的解集.

19. (12分)

已知函数 $f(x) = \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

(1) 若 $f\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{6}$, $\tan \beta = \sqrt{5}$, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, 求 $\tan(2\alpha + \beta)$ 的值;

(2) 若动直线 $x=t$ ($t \in [0, \pi]$)与函数 $f(x)$ 和函数 $g(x) = \sqrt{3} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$

的图象分别交于 P, Q 两点, 求线段 PQ 长度的最大值, 并求出此时 t 的值.

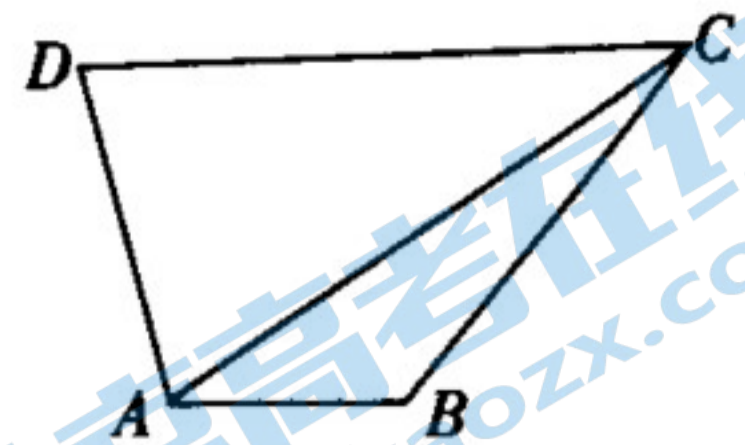
20. (12分)

如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $AB = \sqrt{3} - 1$, $BC = \sqrt{3} + 1$, $CA = 3$, 且角 D 与角 B 互

补, $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{3}{2}$.

(1) 求 $\triangle ACD$ 的面积;

(2) 求 $\triangle ACD$ 的周长.



21. (12分)

设 $a \in \mathbf{R}$, 命题 p : 函数 $y = \log_a(x^3 - ax)$ ($a > 0, a \neq 1$) 在区间 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 内单调递增;

q : 函数 $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4a}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 1$ 仅在 $x=0$ 处有极值.

(1) 若命题 q 是真命题, 求 a 的取值范围;

(2) 若命题 $p \vee (\neg q)$ 是真命题, 求 a 的取值范围.

22. (12分)

已知 $a > 0$, 函数 $f(x) = x \ln x - ax + 1 + a(x-1)^2$, $g(x) = \frac{1 + \ln x}{3 - 2x}$.

(1) 求 $g(x)$ 的单调区间.

(2) 讨论 $f(x)$ 零点的个数.

2019~2020 年度河南省高三阶段性考试(三)

数学参考答案(理科)

1. D 【解析】本题考查集合交集与补集的混合运算,考查运算求解能力.

因为 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, 所以 $\complement_U A = \{0, 5, 6\}$, $(\complement_U A) \cap B = \{5\}$.

2. A 【解析】本题考查复数的四则运算和概念,考查运算求解能力.

$$z = \frac{2i^3}{1+i} = \frac{-2i}{1+i} = \frac{-2-2i}{2} = -1-i.$$

3. C 【解析】本题考查等比数列的通项公式,考查运算求解能力.

由 $S_{n+1} = a_1 + qS_n$, 得 $S_7 - 2S_6 = a_1 = 1$, 所以 $a_5 = 2^4 = 16$, 所以 $a_1 + a_5 = 17$.

4. B 【解析】本题考查平面向量的坐标运算,考查运算求解能力.

因为 $2m + n = (3\lambda + 4, 4)$, $m - 2n = (-\lambda - 3, -3)$, 且 $(2m + n) \parallel (m - 2n)$,

所以 $(-3) \cdot (3\lambda + 4) - 4 \cdot (-\lambda - 3) = 0$, $\lambda = 0$.

5. C 【解析】本题考查三角函数的二倍角公式,考查运算求解能力.

由 $\sin 2\alpha = \cos \alpha$, 则 $2\sin \alpha \cos \alpha = \cos \alpha$, 因为 $\alpha \neq \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, 故 $\sin \alpha = \frac{1}{2}$, 所以 $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$.

6. A 【解析】本题考查充分条件、必要条件和三角函数,考查数形结合和运算求解能力.

必要性: 设 $f(x) = a\sin x + 1$, 当 $a > 0$ 时, $f(x) \in [1-a, 1+a]$, 所以 $1-a < 0$, 即 $a > 1$;

当 $a < 0$ 时, $f(x) \in [1+a, 1-a]$, 所以 $1+a < 0$, 即 $a < -1$. 故 $a > 1$ 或 $a < -1$.

充分性: 取 $x_0 = \frac{\pi}{2}$, 当 $a < -1$ 时, $a\sin x_0 + 1 < 0$ 成立.

7. D 【解析】本题考查三角函数的图象、性质以及平移变换,考查运算求解能力.

由函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) + 1$ ($\omega > 0$, $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象知 $1 + \sin \varphi = \frac{3}{2}$, 即 $\sin \varphi = \frac{1}{2}$. 因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所

以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$, 所以 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{6}) + 1$. 因为点 $(\frac{\pi}{6}, 2)$ 在 $f(x)$ 的图象上, 所以 $\sin(\frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{6}) = 1$, 所以 $\frac{\pi}{6}\omega$

$+\frac{\pi}{6} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k \in \mathbf{Z}$). 因为 $\omega > 0$, 结合图象可知, $\omega = 2$, 所以 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6}) + 1$, 将 $f(x)$ 的图象向右

平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 则 $g(x) = \sin[2(x - \frac{\pi}{4}) + \frac{\pi}{6}] + 1 = \sin(2x - \frac{\pi}{3}) + 1$.

8. B 【解析】本题考查函数的奇偶性与零点,考查数形结合的数学思想以及推理论证能力.

因为函数 $f(x) = x^{2019} + a - 1 - 3\sin x$ 是 \mathbf{R} 上的奇函数,

所以 $f(0) = a - 1 = 0$, 即 $a = 1$, 所以 $f(x) = x^{2019} - 3\sin x$, 结合函数 $y = x^{2019}$ 与 $y = 3\sin x$ 的图象可知, $f(x)$ 的零点的个数为 3.

9. B 【解析】本题考查基本不等式的性质、一元二次不等式的解法,考查推理能力与计算能力.

$\because a, b \in (0, +\infty)$, $\therefore (\frac{a+b}{2})^2 \geq ab$, 可得 $\frac{1}{ab} \geq \frac{4}{(a+b)^2}$, 当且仅当 $a = b = \frac{1}{2}$ 或 $a =$

$b = 4$ 时取等号. $\because 1 + \frac{2}{ab} = \frac{9}{a+b}$, $\therefore \frac{2}{ab} = \frac{9}{a+b} - 1 \geq \frac{8}{(a+b)^2}$, 化为 $(a+b)^2 - 9(a+b) + 8 \leq 0$, 解得 $1 \leq a+b \leq$

8, 则 $a+b$ 的取值范围是 $[1, 8]$.

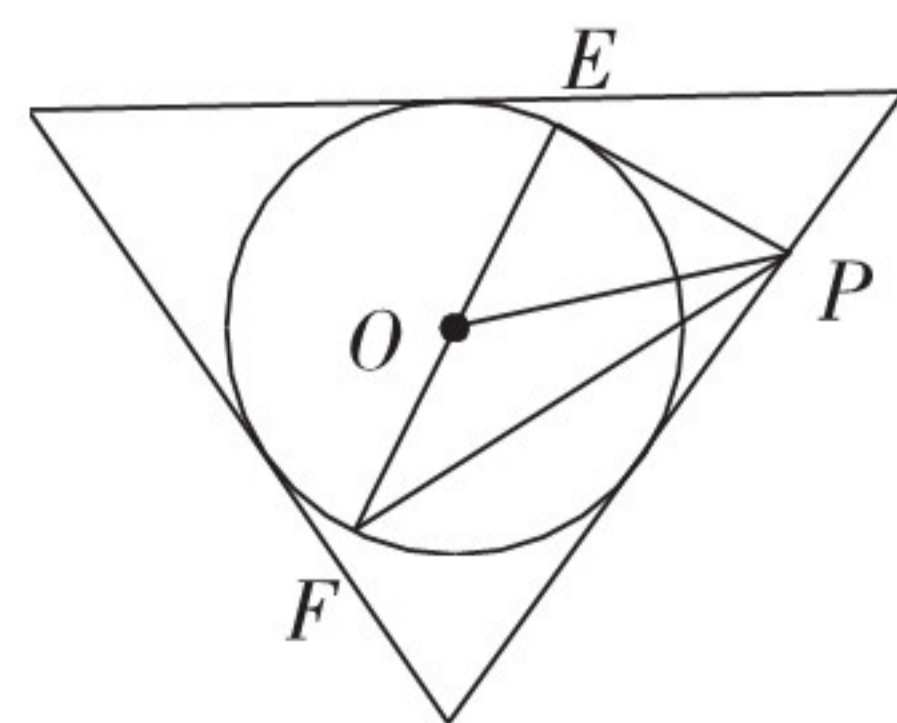
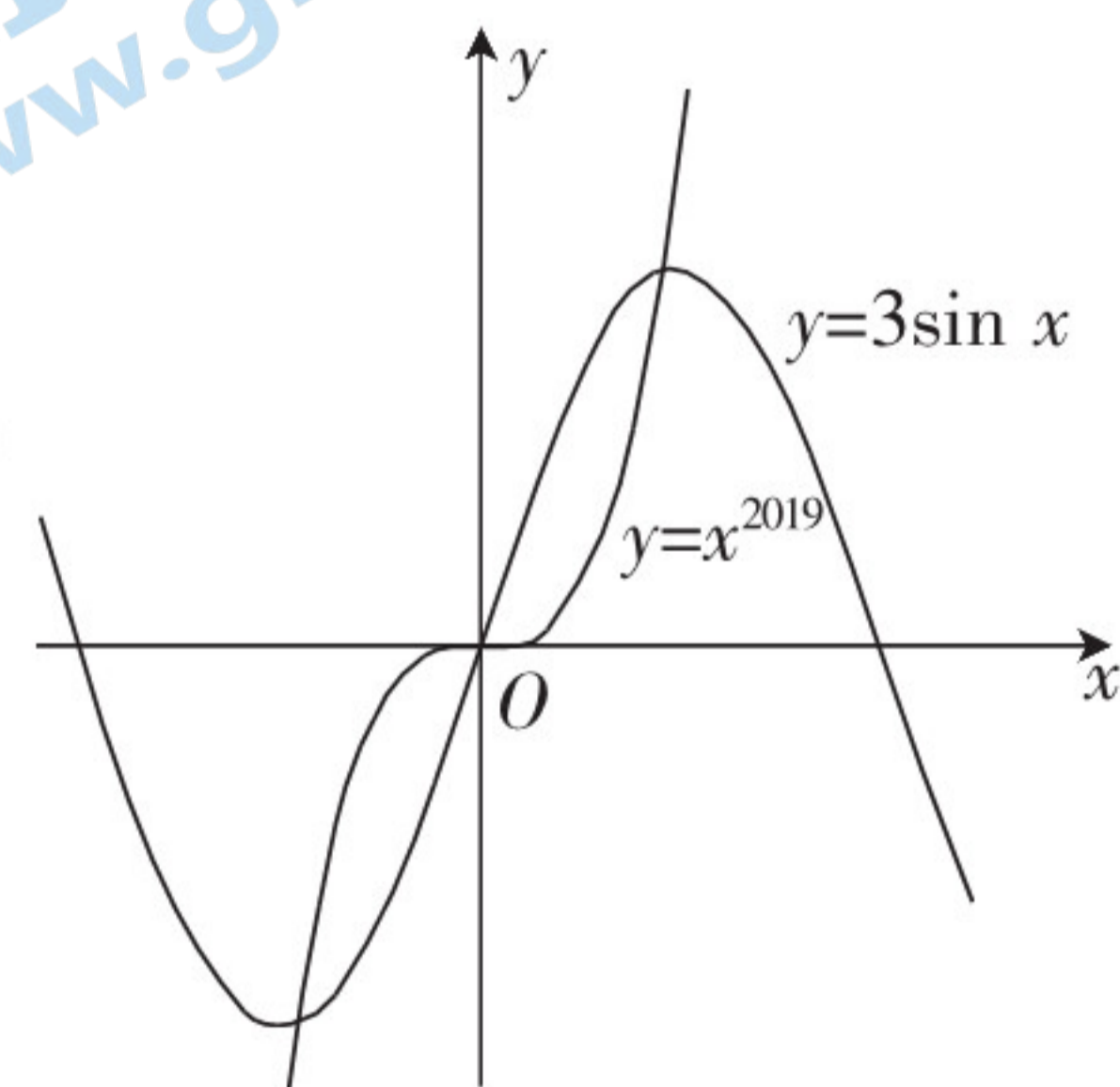
10. D 【解析】本题考查平面向量的数量积公式以及三角形内切圆的应用,考查化归与转化的数学思想以及运算求解能力.

正 $\triangle ABC$ 的边长为 1, 则高为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 内切圆半径为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$, 如图所示, $\vec{PE} \cdot \vec{PF} = (\vec{OE} - \vec{OP}) \cdot$

$(\vec{OF} - \vec{OP}) = |\vec{OP}|^2 - |\vec{OE}|^2 = |\vec{OP}|^2 - \frac{1}{12}$, 当点 P 为 $\triangle ABC$ 的顶点时, $|\vec{OP}|^2$ 取得

最大值 $\frac{1}{3}$, 所以 $\vec{PE} \cdot \vec{PF}$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$.

11. B 【解析】本题考查指数与对数的转换以及函数与方程的数学思想,考查抽象概况能力.



由 $6^x > 5^x$, 解得 $x > 0$, 令 $t = \log_6(4^x + 5^x) = \log_4(6^x - 5^x)$, 所以 $\begin{cases} 4^x + 5^x = 6^t, \\ 6^x - 5^x = 4^t, \end{cases}$ 两式相加得 $4^x + 6^x = 4^t + 6^t$, 又函数 $y = 4^x + 6^x$ 单调递增, 故 $x = t$, 则 $4^x + 5^x = 6^x$, 即 $(\frac{2}{3})^x + (\frac{5}{6})^x = 1$. 令 $g(x) = (\frac{2}{3})^x + (\frac{5}{6})^x$, 且 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 又 $g(2) > 1, g(3) < 1$, 所以存在唯一 $x_0 \in (2, 3)$, 使得 $g(x_0) = 1$. 所以方程 $\log_6(4^x + 5^x) = \log_4(6^x - 5^x)$ 只有唯一实数解.

12. C 【解析】本题考查等差数列的定义以及前 n 项和, 考查运算求解能力, 分类讨论的数学思想.

由题意知 $a_{2k} = a_{2k-1} + 1, a_{2k+1} = 2a_{2k} + 1$, 所以 $a_{2k} = a_{2k-1} + 1, a_{2k+1} = 2(a_{2k-1} + 1) + 1 = 2a_{2k-1} + 3$, 即 $a_{2k+1} + 3 = 2(a_{2k-1} + 3)$. 又 $a_1 + 3 = 4$, 所以数列 $\{a_{2k-1} + 3\}$ 是以 4 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $a_{2k-1} = 4 \cdot 2^{k-1} - 3, a_{2k} = 4 \cdot 2^{k-1} - 2$,

所以 $S_{奇} = a_1 + a_3 + \dots + a_{2k-1} = \frac{4(1-2^k)}{1-2} - 3k = 2^{k+2} - 4 - 3k$,

$S_{偶} = a_2 + a_4 + \dots + a_{2k} = 2^{k+2} - 4 - 2k$, 所以 $S_{2k} = S_{奇} + S_{偶} = 2^{k+3} - 8 - 5k$.

当 $k=8$ 时, $S_{16} = 2000 < 2020$. 又 $a_{17} = 1021$, 所以 $S_{17} = 3021 > 2020$, 故正整数 m 的最小值为 17.

13. 10 【解析】本题考查线性规划问题, 考查数形结合的数学思想以及运算求解能力.

画出可行域(图略)知, 当 $l: x + 3y = 0$ 平移到过点 $(\frac{5}{2}, \frac{5}{2})$ 时, $z_{max} = 10$.

14. -1 【解析】本题考查三角恒等变换的知识, 考查运算求解能力.

因为 α 为第二象限角, 所以 $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$,

所以 $\cos \alpha \sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} = \cos \alpha \sqrt{\frac{(1+\sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha}} = \cos \alpha \cdot \frac{1+\sin \alpha}{|\cos \alpha|} = -1 - \sin \alpha$,

$\sin^2 \alpha \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}} = \sin^2 \alpha \cdot \frac{1}{\sin \alpha} = \sin \alpha$, 所以 $\cos \alpha \sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} + \sin^2 \alpha \sqrt{1 + \frac{1}{\tan^2 \alpha}} = -1$.

15. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 【解析】本题考查正弦定理以及三角恒等变换, 考查运算求解能力.

由正弦定理可知, $\sin B = \sin(A+C) = \sin A \cos C + \sin C \cos A$, 易得 $c \cos A = c \sin A, A = \frac{\pi}{4}$. 又 a, b, c 成等

比数列, 所以 $\frac{b}{c} = \frac{a}{b}, \frac{b \sin B}{c} = \frac{a \sin B}{b} = \sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

16. $(-\infty, e]$ 【解析】本题考查导数的几何意义以及导数的应用, 考查函数与方程、化归与转化的数学思想.

设 $f(x) = e^x$, 切点为 (x_0, e^{x_0}) ,

$f'(x) = e^x$, 所以 $k = e^{x_0}, b = e^{x_0} - kx_0 = e^{x_0}(1 - x_0)$,

所以 $k + b = e^{x_0} + e^{x_0}(1 - x_0) = e^{x_0}(2 - x_0)$.

令 $g(x) = e^x(2 - x), g'(x) = e^x(2 - x) - e^x = e^x(1 - x)$,

当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 单调递增; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减.

又 $g(1) = e$, 所以 $k + b$ 的取值范围是 $(-\infty, e]$.

17. 解: (1) 因为 $a_4 + a_5 = 6a_3$, 所以 $a_1 q^3 + a_1 q^4 = 6a_1 q^2$, 即 $q^2 + q - 6 = 0$,

解得 $q = 2$ 或 $q = -3$ (舍去). 2 分

所以 $S_5 = \frac{a_1(1-2^5)}{1-2} = 31a_1 = 62, a_1 = 2$, 4 分

所以 $a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ 5 分

(2) 因为 $b_n = \frac{1}{(\log_2 a_n)(\log_2 a_{n+2})} = \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})$, 6 分

所以 $T_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$
 $= \frac{1}{2}[(1 - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \dots + (\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2})]$ 8 分

$= \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}) = \frac{1}{2}(\frac{3}{2} - \frac{2n+3}{n^2+3n+2}) = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2n^2+6n+4}$ 10 分

18. 解: (1) 函数 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数. 1 分

证明如下:

任取 $x > 0$, 则 $-x < 0$,

所以 $f(-x) = 1 - 4^x = -(4^x - 1) = -f(x)$; 3 分

再任取 $x < 0$, 则 $-x > 0$,

所以 $f(-x) = 4^{-x} - 1 = -(1 - 4^{-x}) = -f(x)$;

又当 $x=0$ 时, $-x=0$,

所以 $f(-x) = 0 = -0 = -f(x)$ 5分

故 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数. 6分

(2) 当 $x > 0$ 时, $f(x) = 4^x - 1$ 是增函数,

所以 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的增函数. 7分

又 $f(-\frac{1}{2}) = -1, f(1) = 3$, 9分

所以 $-\frac{1}{2} < \log_4 x \leq 1$, 所以 $\frac{1}{2} < x \leq 4$, 11分

所以不等式 $-1 < f(\log_4 x) \leq 3$ 的解集为 $(\frac{1}{2}, 4]$ 12分

19. 解: (1) $f(x) = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x - \frac{\pi}{2})] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 2x$, 1分

$f(\frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin \alpha = \frac{1}{6}$, 则 $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, 又 $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 故 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}, \tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 2分

$\tan 2\alpha = \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = 4\sqrt{5}$, 4分

$\tan(2\alpha + \beta) = \frac{\tan 2\alpha + \tan \beta}{1 - \tan 2\alpha \tan \beta} = \frac{5\sqrt{5}}{1 - 20} = -\frac{5\sqrt{5}}{19}$ 6分

(2) $g(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$, 7分

由题意可知 $|PQ| = |f(t) - g(t)| = |\frac{1}{2} - \sin(2t + \frac{\pi}{3})|$, 9分

当 $\sin(2t + \frac{\pi}{3}) = -1$ 时, $|PQ|$ 取到最大值 $\frac{3}{2}$ 11分

当 $|PQ|$ 取到最大值时, $2t + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$, 又 $t \in [0, \pi]$, 所以 $t = \frac{7\pi}{12}$ 12分

20. 解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle ABC = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = -\frac{1}{4}$,

所以 $\sin \angle ABC = \frac{\sqrt{15}}{4}$ 2分

因为角 D 与角 B 互补,

所以 $\sin \angle ADC = \sin \angle ABC = \frac{\sqrt{15}}{4}, \cos \angle ADC = -\cos \angle ABC = \frac{1}{4}$ 3分

又 $\vec{AD} \cdot \vec{CD} = \frac{3}{2}$,

所以 $\vec{AD} \cdot \vec{CD} = |\vec{AD}| \cdot |\vec{CD}| \cdot \cos \angle ADC = \frac{3}{2}$, 即 $|\vec{AD}| \cdot |\vec{CD}| = 6$, 5分

所以 $S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} |\vec{AD}| \cdot |\vec{CD}| \cdot \sin \angle ADC = \frac{3\sqrt{15}}{4}$ 6分

(2) 在 $\triangle ACD$ 中, 由余弦定理得 $AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cos \angle ADC$,

所以 $AD^2 + CD^2 = AC^2 + 2AD \cdot CD \cos \angle ADC = 12$, 8分

所以 $AD + CD = 2\sqrt{6}$, 10分

所以 $\triangle ACD$ 的周长为 $AD + CD + AC = 2\sqrt{6} + 3$ 12分

21. 解: (1) 由题意知, $f'(x) = x(x^2 + 4ax + 1)$, 显然 $x=0$ 不是方程 $x^2 + 4ax + 1 = 0$ 的根.

为使 $f(x)$ 仅在 $x=0$ 处有极值, 必须 $x^2 + 4ax + 1 \geq 0$ 恒成立, 即 $\Delta = 4(4a^2 - 1) \leq 0$,

解不等式, 得 $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}$. 这时 $f(0) = 1$ 是唯一极值, 3分

因此满足条件的 a 的取值范围是 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 5分

(2) 当 p 是真命题时, 记 $g(x) = x^3 - ax$, 则 $g'(x) = 3x^2 - a$.

当 $a > 1$ 时, 要使得 $y = \log_a(x^3 - ax)$ 是增函数, 则需有 $g'(x) \geq 0$ 对 $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$ 恒成立,

所以 $a \leq 0$, 与 $a > 1$ 矛盾; 7 分

当 $0 < a < 1$ 时, 要使得 $y = \log_a(x^3 - ax)$ 是增函数, 则需有 $g'(x) \leq 0$ 对 $x \in (-\frac{1}{2}, 0)$ 恒成立,

所以 $a \geq 3 \cdot (-\frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$, 所以 $\frac{3}{4} \leq a < 1$.

记当 p 是真命题时 a 的取值集合为 A , 则 $A = \{a | \frac{3}{4} \leq a < 1\}$; 9 分

记当 $\neg q$ 是真命题时 a 的取值集合为 B , 则 $B = \{a | a < -\frac{1}{2} \text{ 或 } a > \frac{1}{2}\}$ 10 分

因为 $p \vee (\neg q)$ 是真命题,

所以 a 的取值范围是 $A \cup B = \{a | a < -\frac{1}{2} \text{ 或 } a > \frac{1}{2}\}$ 12 分

22. 解: (1) $g(x)$ 的定义域为 $(0, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$, 且 $g'(x) = \frac{3+2x \ln x}{x(3-2x)^2}$ 1 分

令 $h(x) = 3 + 2x \ln x$, 则 $h'(x) = 2(1 + \ln x)$, 2 分

所以当 $x \in (0, \frac{1}{e})$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 是减函数;

当 $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 是增函数.

所以 $h(x)_{\min} = h(\frac{1}{e}) = 3 - \frac{2}{e} > 0$, 3 分

所以在 $(0, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$ 上, $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在区间 $(0, \frac{3}{2})$, $(\frac{3}{2}, +\infty)$ 上是增函数. 4 分

(2) 由题意知 $f'(x) = 1 + \ln x - a + 2a(x-1) = 1 + \ln x + 2ax - 3a$.

令 $k(x) = 1 + \ln x + 2ax - 3a$, 因为 $a > 0$,

所以 $k(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

又 $f'(\frac{1}{e}) = k(\frac{1}{e}) = 1 + \ln \frac{1}{e} + (\frac{2}{e} - 3)a = (\frac{2}{e} - 3)a < 0$,

$f'(e) = k(e) = 1 + \ln e + (2e - 3)a = 2 + (2e - 3)a > 0$,

所以存在实数 $x_0 \in (\frac{1}{e}, e)$, 使得 $k(x_0) = 0$ 6 分

在 $(0, x_0)$ 上, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 是减函数; 在 $(x_0, +\infty)$ 上, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 是增函数.

所以 $f(x)$ 的最小值是 $f(x_0)$, 其中 x_0 满足 $f'(x_0) = 0$, 即 $1 + \ln x_0 + 2ax_0 - 3a = 0$,

所以 $f(x_0) = x_0 \ln x_0 - ax_0 + 1 + a(x_0 - 1)^2 = x_0(3a - 1 - 2ax_0) - ax_0 + 1 + a(x_0 - 1)^2$

$= (1 - x_0)(a + ax_0 + 1)$ 7 分

① 当 $x_0 = 1$, 即 $a = 1$ 时, $f(x)$ 的最小值为 0, 此时 $f(x)$ 有一个零点; 8 分

② 当 $\frac{1}{e} < x_0 < 1$ 时, $f(x_0) > 0$, $f(x)$ 没有零点, 此时 $a = \frac{1 + \ln x_0}{3 - 2x_0}$,

由 $g(x)$ 的单调性, 可得 $0 < a < 1$; 10 分

③ 当 $1 < x_0 < e$ 时, $f(x_0) < 0$, $f(x)$ 有两个零点.

又 $a > 0$, 所以 $1 < x_0 < \frac{3}{2}$,

由 $g(x)$ 的单调性, 可得 $a > 1$.

综上所述, 当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 没有零点;

当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 只有 1 个零点;

当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 有 2 个零点. 12 分