中原名校2019—2020学年上期第四次质量考评

高三数学（理）试题

（考试时间：120分钟　　试卷满分：150分）

注意事项：

1. 答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上。
2. 选择题的作答：每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并上交。

第I卷

一、选择题（本题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1．已知复数z满足：$zi^2=1+i$，其中i是虚数单位，则$\bar{z}=$

A．$-1-i$　　B．$-1+i$　　C．$1-i$　　D．$1+i$

2．已知集合$A=\{x\in\mathbf{R}\mid\frac{1}{2}<2^{x^2-2x}<8\}$，$B=\{y\mid y=\sqrt{x}\}$，则$A\cap B=$

A．$(-1,1)\cup(1,3)$　　B．$(-1,3)$　　C．$[0,3)$　　D．$[0,1)\cup(1,3)$

3．设m,n是两条不同的直线，α,β是两个不同的平面，$p:m\perp n$，若p是q的必要条件，则q可能是

A．$q:m\perp\alpha,n/\!/\beta,\alpha\perp\beta$　　B．$q:m\perp\alpha,n\perp\beta,\alpha/\!/\beta$

C．$q:m\subset\alpha,n\perp\beta,\alpha/\!/\beta$　　D．$q:m\subset\alpha,n/\!/\beta,\alpha\perp\beta$

4．设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内的导函数为$f'(x)$，若$f(\ln x)=\frac{x+1}{x}$，则$\frac{f(0)}{f'(0)}=$

A．2　　B．-2　　C．1　　D．$e+1$

5．已知函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，当$x>0$时，$f(x)=\frac{4e^x}{e^{2x}+4}$，则当$x<0$时，$f(x)$的最小值为

A．-1　　B．-2　　C．2　　D．1

6．已知$\{a_n\}$是等差数列，其前n项和$S_n=n^2-2n+b-1$，$\{b_n\}$是等比数列，其前n项和$T_n=\frac{a}{2}-3^n$，则数列$\{bn+a^n\}$的前5项和为

A．37　　B．-27　　C．77　　D．46

7．已知实数x，y满足约束条件$\begin{cases}y\geq 0\\ y-x+1\leq 0\\ y-2x+4\geq 0\end{cases}$，则目标函数$z=y+x$的最大值为

A．4　　B．5　　C．6　　D．7

8. 设函数$f(x)=\cos(\omega x+\frac{\pi}{3})-1(\omega>0)$；将$f(x)$图象的所有点的横坐标向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度，纵坐标不变，所得函数图象的一个对称中心为$(-\frac{\pi}{4},-1)$，则ω的最小值为

A. $\frac{2}{7}$　　B. $\frac{10}{7}$　　C. $\frac{12}{7}$　　D. $\frac{22}{7}$

9. 已知函数$y=f(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增，函数$y=f(x+1)$的图象关于点$(-1,0)$对称，$f(-1)=-2$，则满足$-2\le f(\lg x-1)\le 2$的x的取值范围是

A. $[\frac{1}{10},10]$　　B. $[\frac{1}{100},100]$　　C. $[1,100]$　　D. $[\frac{1}{10},1000]$

10. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_2=2$，$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$，若将$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$变形为$a_{n+2}-a_{n+1}=a_n$，可得$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+(a_5-a_4)+\cdots+(a_{n+2}-a_{n+1})=a_{n+2}-a_2=a_{n+2}-2$，类似地，可得${a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2+\cdots+{a_{2019}}^2=$

A. $a_{2020}a_{2019}-1$　　B. $a_{2020}a_{2019}+1$

C. $a_{2019}a_{2018}-1$　　D. $a_{2019}a_{2018}+1$

11. 已知$f(x)=|\ln x|$，$k\in(0,\mathrm{e}^{-1})$，则函数$y=f(x)-kx$的零点个数为

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

12. 在三棱锥$A-BCD$中，平面$ABC\perp$平面ADC，$AD\perp AC,AD=AC,\angle ABC=\frac{\pi}{3}$，若此三棱锥的外接球表面积为$28\pi$，则三棱锥$A-BCD$体积的最大值为

A. 7　　B. 12　　C. 6　　D. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

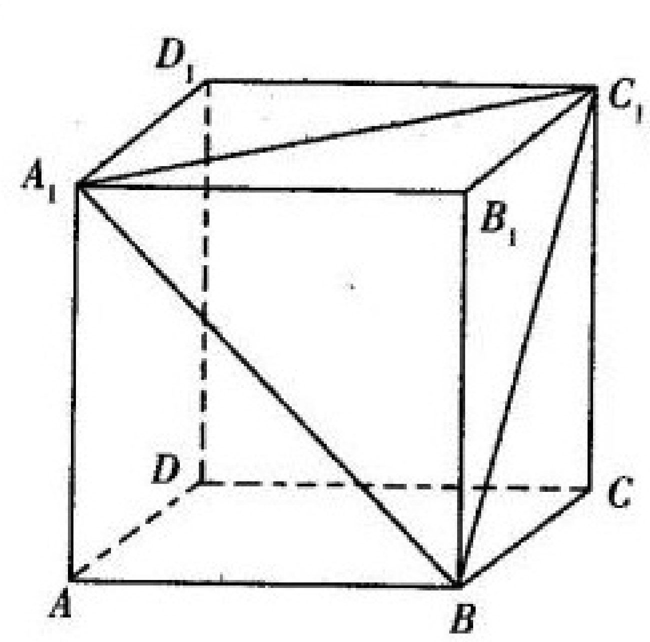
第II卷

二、填空题（本题共4小题，每小题5分，共20分）

13. 已知$\boldsymbol{a}=(4,-1),\boldsymbol{b}=(2,t^2-1)$,若$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5$，则$t=$________.

14. 若$\sin\alpha=2\cos(\pi+\alpha)$，则$\sin\alpha(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2})=$________.

15. 如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，过点A作平面A_1BC_1的垂线l，则直线l与直线CC_1所成角的余弦值为________.



16. 已知函数$f(x)$对$x\in\mathbf{R}$均有$f(x)+2f(-x)=mx-6$，若$f(x)\ge\ln x$恒成立，则实数m的取值范围是________.

三、解答题（本大题共6小题，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分10分）

已知$\triangle ABC$的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，若$b=\sqrt{7}$，$a^2-ac+c^2-7=0$．

（1）求B；

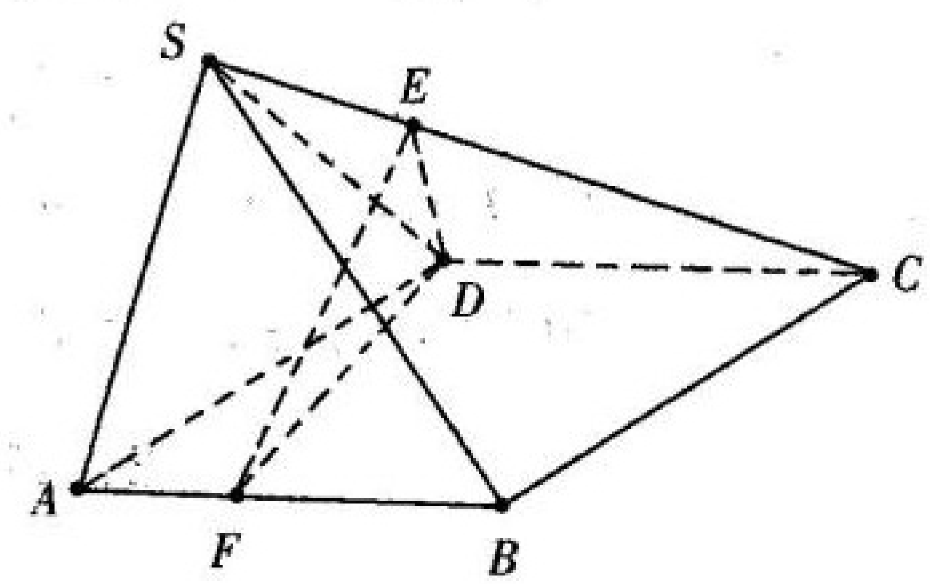
（2）若$\triangle ABC$的周长为$5+\sqrt{7}$，求$\triangle ABC$的面积．

18．（本小题满分12分）

如图，在四棱锥$S-ABCD$中，四边形$ABCD$是菱形，$\angle ADC=120°$，平面$SAD\perp$平面$ABCD$，$SA\perp SD$，$SA=SD=3\sqrt{2}$．E,F分别是线段SC,AB上的一点，$\dfrac{SE}{EC}=\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{1}{2}$．

（1）求证：$EF//$平面SAD；

（2）求平面DEF与平面SBC所成锐二面角的正弦值．



19．（本小题满分12分）

已知函数$f(x)$的定义域$I=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，在$(0,+\infty)$上为增函数，且$\forall x_1,x_2\in I$，恒有$f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$．

（1）求证：$f(x)$是偶函数；

（2）若$f(m)-f(2m+1)<3m^2+4m+1$，求实数m的取值范围．

20.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=2$，$S_n=2S_{n-1}-n(n\geq 2)$．

（1）试判定$\{a_n-1\}$是否是等比数列，并说明理由；

（2）求数列$\{na_n\}$的前n项和T_n．

21.（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}+a$．

（1）判断$f(x)$极值点的个数；

（2）若$x>0$时，$e^x>f(x)$恒成立，求实数a的取值范围.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=\dfrac{a\ln x}{4}-\dfrac{1}{2}x^2(a\in\mathbf{R})$．

（1）讨论$f(x)$的单调性；

（2）设$a=4$，且$x\in(0,\dfrac{\pi}{6})$，求证：$\tan x<e^{-\frac{1}{2}\cos 2x}<e^{-\frac{1}{4}}$.

中原名校2019—2020学年上期第四次质量考评

高三数学（理）答案·全解全析

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	D	C	B	A	C	B	B	C	A	D	C

1．B 【解析】由$zi^2=1+i$，可得$z=\frac{1+i}{i^2}=-1-i$.所以$\bar{z}=-1+i$.故选B.

2．D【解析】由$\frac{1}{2}<2^{x^2-2x}<8$，得$2^{-1}<2^{x^2-2x}<2^3$，即$-1<x^2-2x<3$．由$-1<x^2-2x$，得$x\neq1$；由$x^2-2x<3$，得$-1<x<3$．所以$A=\{x\in\mathbf{R}|-1<x<3且x\neq1\}$，$B=\{y|y=\sqrt{x}\}=\{y|y\geq0\}$．所以$A\cap B=[0,1)\cup(1,3)$．故选D.

3．C 【解析】若p是q的必要条件，则只需$q\Rightarrow p$．

对于选项A：m,n的位置关系是平行或相交或异面，即$q\nRightarrow p$，所以选项A错误.

对于选项B：结论为$m//n$，即$q\nRightarrow p$，所以选项B错误.

对于选项D：m,n的位置关系是平行或相交或异面，即$q\nRightarrow p$，所以选项D错误.

对于选项C：若$n\perp\beta,\alpha//\beta$，则$n\perp\alpha$，又$m\subset\alpha$，所以$m\perp n$，即$q\Rightarrow p$，所以选项C正确．故选C.

4．B 【解析】令$\ln x=t$，则$x=e^t$，代入$f(\ln x)=\frac{x+1}{x}$，得$f(t)=\frac{e^t+1}{e^t}$．

所以$f'(t)=(1+\frac{1}{e^t})'=-e^{-t}$．所以$\frac{f(0)}{f'(0)}=\frac{2}{-1}=-2$．故选B.

5．A 【解析】当$x>0$时，令$t=e^x$，则$t>1$.

所以$f(x)=\frac{4e^x}{e^{2x}+4}=\frac{4}{e^x+\frac{4}{e^x}}$可化为$y=\frac{4}{t+\frac{4}{t}}$，

因为$t+\dfrac{4}{t}\ge 4$，所以$y\le 1$，当且仅当$t=\dfrac{4}{t}$，即$t=2$时取等号.

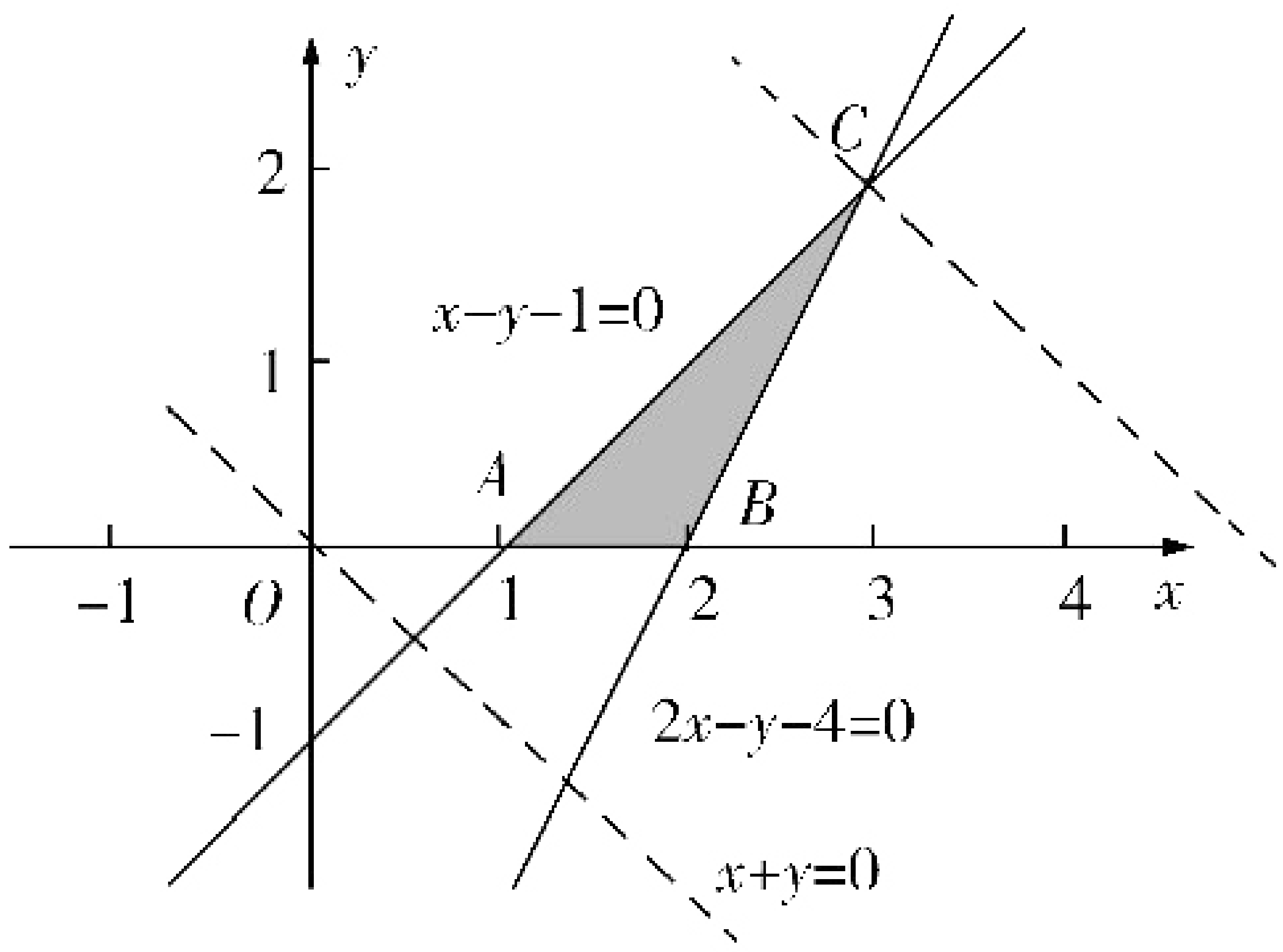
所以当$x>0$时，$f(x)$有最大值，为1.

因为函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数，所以当$x<0$时，$f(x)$的最小值为-1．故选A.

6．C【解析】因为$\{a_n\}$是等差数列，其前n项和$S_n=n^2-2n+b-1$，所以$b-1=0$，解得$b=1$．因为$\{b_n\}$是等比数列，其前n项和$T_n=\dfrac{a}{2}-3^n$，所以$\dfrac{a}{2}-1=0$，解得$a=2$.

所以$bn+a^n=n+2^n$．所以$\{bn+a^n\}$的前5项和为$\dfrac{5\times(1+5)}{2}+\dfrac{2-2^5\times 2}{1-2}=77$．故选C.

7．B 【解析】画出不等式组所表示的可行域，如图中阴影部分所示.



由图可知，当直线$z=y+x$平移至C点时，z取得最大值，

由$\begin{cases}x-y-1=0\\2x-y-4=0\end{cases}$，得$\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$，所以$z_{\max}$=2+3=5，故选B.

8．B 【解析】将$f(x)$图象的所有点的横坐标向右平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位长度，纵坐标不变，所得图象对应的函数为$y=\cos[\omega(x-\dfrac{\pi}{3})+\dfrac{\pi}{3}]-1=\cos(\omega x-\dfrac{\omega\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3})-1$.因为所得函数图象的一个对称中心为$(-\dfrac{\pi}{4},-1)$，所以$\cos(-\dfrac{\omega\pi}{4}-\dfrac{\omega\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3})-1=-1$，即$-\dfrac{\omega\pi}{4}-\dfrac{\omega\pi}{3}+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得$\omega=-\dfrac{2}{7}-\dfrac{12}{7}k,k\in\mathbf{Z}$.又$\omega>0$，所以$\omega$的最小

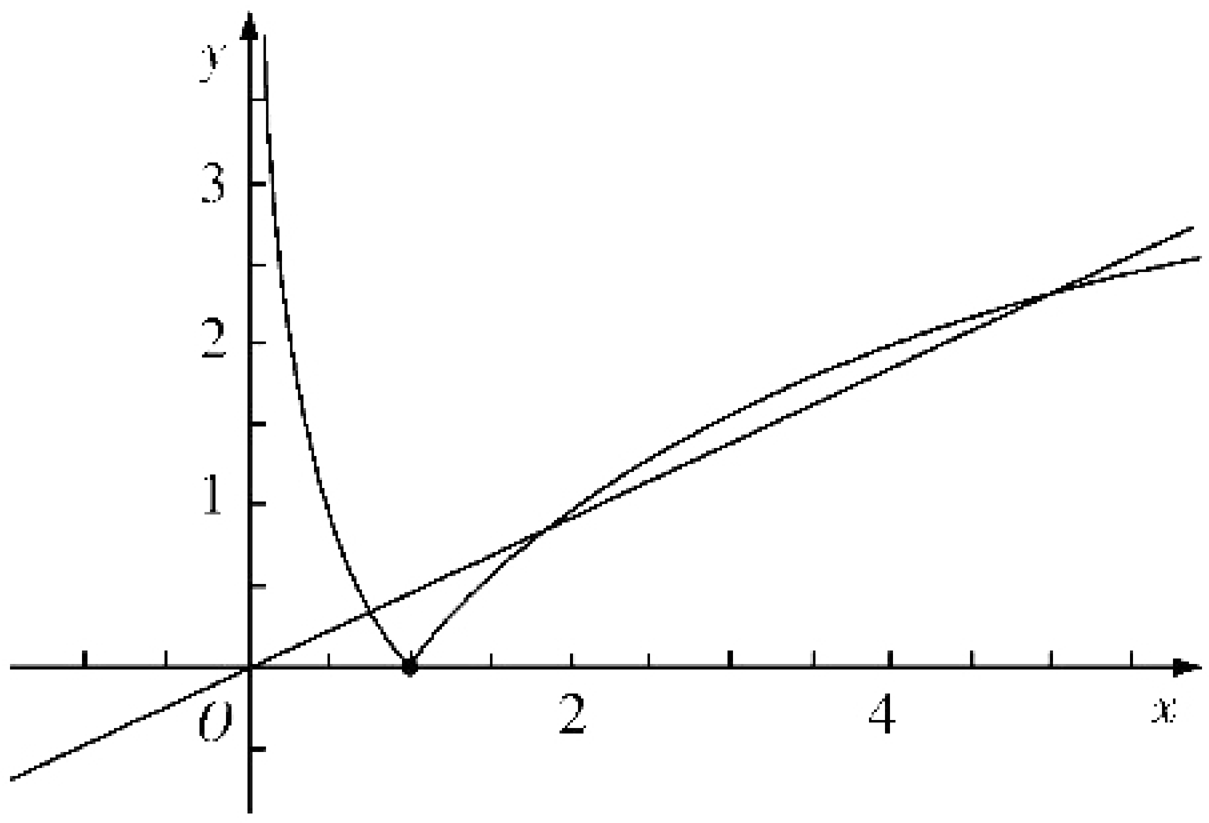
值为$\dfrac{10}{7}$．故选 B.

9．C 【解析】由函数$y=f(x+1)$的图象关于点$(-1,0)$对称，可得$y=f(x)$的图象关于点$(0,0)$对称．所以函数$f(x)$为奇函数.因为$f(-1)=-2$，所以$f(1)=2$；当$-2\le f(\lg x-1)\le 2$时，$-1\le \lg x-1\le 1$，即$0\le \lg x\le 2$，解得$1\le x\le 100$，故选 C.

10．A 【解析】由$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$得$a_{n+2}-a_n=a_{n+1}$，所以$a_{n+2}a_{n+1}-a_{n+1}a_n=a_{n+1}^2$．

所以$a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}+\cdots+a_n^{\ 2}=a_1^{\ 2}+(a_3a_2-a_2a_1)+(a_4a_3-a_3a_2)+\cdots+(a_{2020}a_{2019}-a_{2019}a_{2018})=a_{2020}a_{2019}+a_1^{\ 2}-a_2a_1=a_{2020}a_{2019}-1$.故选 A.

11．D 【解析】函数$y=f(x)-kx$的零点个数，可转化为$y=f(x)$与$y=kx$图象公共点的个数问题．作出$y=f(x)$与$y=kx$的图象，如图所示.



当直线$y=kx$与$f(x)=|\ln x|$相切时，设切点坐标为(x_0,y_0)．

直线$y=kx$与$f(x)=|\ln x|$相切，即为直线$y=kx$与$y=\ln x$相切.

因为$y'=\dfrac{1}{x}$，所以切线的斜率为$k=\dfrac{1}{x_0}$.

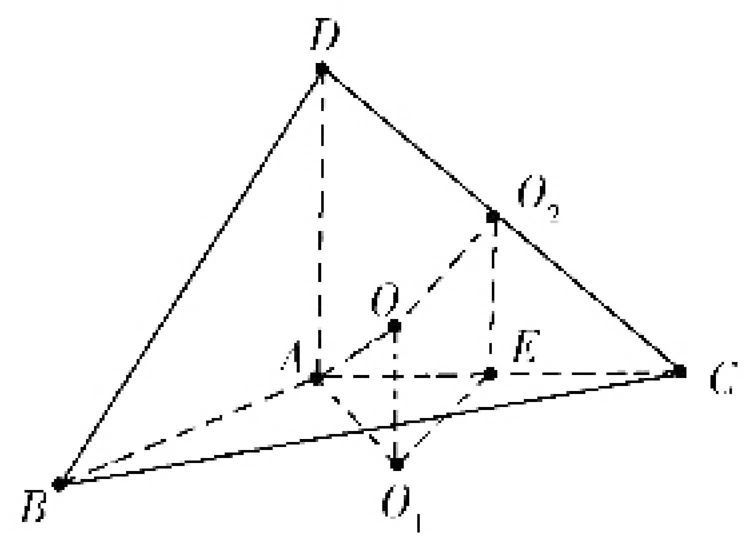
所以切线方程为$y-y_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$.又$y_0=\ln x_0$，切线$y-y_0=\dfrac{1}{x_0}(x-x_0)$过点$(0,0)$．

所以$\ln x_0=1$，解得$x_0=\mathrm{e}$．所以$k=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

数形结合可得，当$0<k<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$时，$y=f(x)$与$y=kx$的图象有3个公共点.

所以函数$y=f(x)-kx$的零点个数为3．故选D.

12．C【解析】根据题意，设三棱锥$A-BCD$外接球的半径为R，三棱锥的外接球球心为O，$\triangle ABC$的外心为O_1，$\triangle ABC$的外接圆半径为r。取DC的中点O_2，过点O_2作$O_2E\perp AC$，则$OO_1\perp$平面$ABC,OO_2\perp$平面ADC．如图所示.



连接OA,O_1A，则$OA=R,O_1A=r$．设$AD=AC=b$，则$OO_1=O_2E=\dfrac{1}{2}b$.

由$S=4\pi R^2=28\pi$，解得$R=\sqrt{7}$.

在$\triangle ABC$中，由正弦定理,得$2r=\dfrac{AC}{\sin\angle ABC}$，即$2r=\dfrac{b}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$，解得$b=\sqrt{3}r$.

在$\mathrm{Rt}\triangle OAO_1$中，$7=r^2+(\dfrac{1}{2}b)^2$，解得$r=2,b=2\sqrt{3}$，即$AC=2\sqrt{3}$.

若三棱锥$A-BCD$的体积最大，则只需$\triangle ABC$的面积最大.

在$\triangle ABC$中，$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC$，

所以$12=AB^2+BC^2-AB\cdot BC\geq 2AB\cdot BC-AB\cdot BC$.

解得$AB\cdot BC\leq 12$.

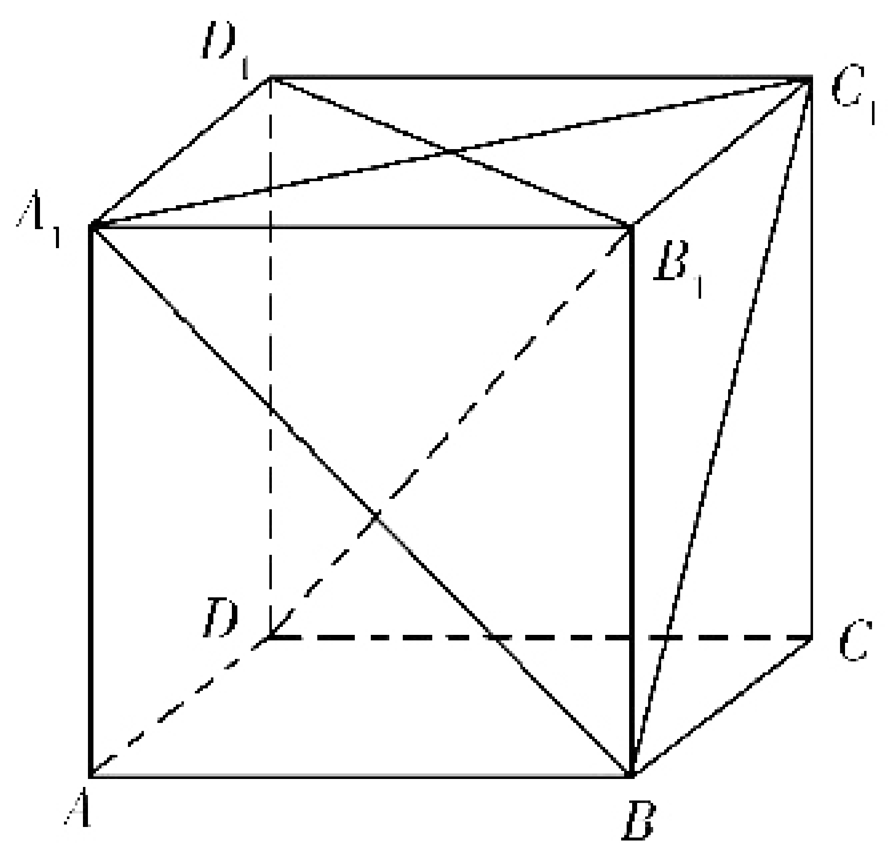
所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC\leq\dfrac{1}{2}\times 12\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$.

所以三棱锥 $A-BCD$ 体积的最大值为 $V_{D-ABC}=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle ABC}\cdot AD=\frac{1}{3}\times3\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=6$．故选 C.

13．±2【解析】由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=5$，得 $8-(t^2-1)=5$，解得 $t=\pm2$．

14．$-\frac{2}{5}$【解析】因为 $\sin\alpha=2\cos(\pi+\alpha)=-2\cos\alpha$，所以 $\tan\alpha=-2$，所以 $\sin\alpha(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2})=\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{\tan\alpha}{\tan^2\alpha+1}=\frac{-2}{(-2)^2+1}=-\frac{2}{5}$.

15．$\frac{\sqrt{3}}{3}$【解析】如图，连接 DB_1，则 $DB_1\perp$ 平面 A_1BC_1.所以 $l\parallel DB_1$，直线 l 与直线 CC_1 所成的角即为 $\angle D_1DB_1$.连接 B_1D_1，在 $\mathrm{Rt}\triangle D_1DB_1$ 中，设 $DD_1=a$，则 $DB_1=\sqrt{3}a$，所以 $\cos\angle D_1DB_1=\frac{a}{\sqrt{3}a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.故填 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



16．$(-\infty,-\mathrm{e}]$【解析】根据题意，将 $-x$ 代替 x，得 $f(-x)+2f(x)=-mx-6$.

由 $\begin{cases}f(-x)+2f(x)=-mx-6\\f(x)+2f(-x)=mx-6\end{cases}$，得 $f(x)=-mx-2$．当函数 $f(x)=-mx-2$ 和 $g(x)=\ln x$ 的图象相切时，设切点坐标为 (x_0,y_0)，切线的斜率为 k，又 $g'(x)=\frac{1}{x}$，函数 $f(x)=-mx-2$ 的图象恒过点 $(0,-2)$，则 $k=g'(x_0)=\frac{1}{x_0}=\frac{\ln x_0-(-2)}{x_0-0}$，解得 $x_0=\mathrm{e}^{-1}$.易得 $k=\mathrm{e}$，此时只需 $-m\geq\mathrm{e}$，就可满足 $f(x)\geq\ln x$ 恒成立，解得 $m\leq-\mathrm{e}$.

所以实数m的取值范围是$(-\infty,-\mathrm{e}]$.

17.（本小题满分 10 分）

【解析】(1) 因为$b=\sqrt{7}$，$a^2-ac+c^2-7=0$.

所以$a^2+c^2=7+ac$.（2 分）

由余弦定理，得$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{7+ac-b^2}{2ac}=\dfrac{1}{2}$，（3 分）

又因为$B\in(0,\pi)$，

所以$B=\dfrac{\pi}{3}$.（6 分）

（2）因为$\triangle ABC$的周长为$5+\sqrt{7}$，

所以$a+b+c=5+\sqrt{7}$，即$a+c=5$，（7 分）

所以$(a+c)^2=a^2+c^2+2ac=25$，（8 分）

又因为$a^2+c^2=7+ac$，

所以$ac=6$，（9 分）

所以$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B$

$=\dfrac{1}{2}$创6 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，（11 分）

所以$\triangle ABC$的面积为$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.（12 分）

18.（本小题满分 12 分）

【解析】(1) 过点E作$EG//DC$，交SD于点G，连接AG.

因为$\dfrac{SE}{EC}=\dfrac{1}{2}$，所以$\dfrac{EG}{DC}=\dfrac{SE}{SC}=\dfrac{1}{3}$.

所以$EG// CD$，$EG=\dfrac{1}{3}CD$，

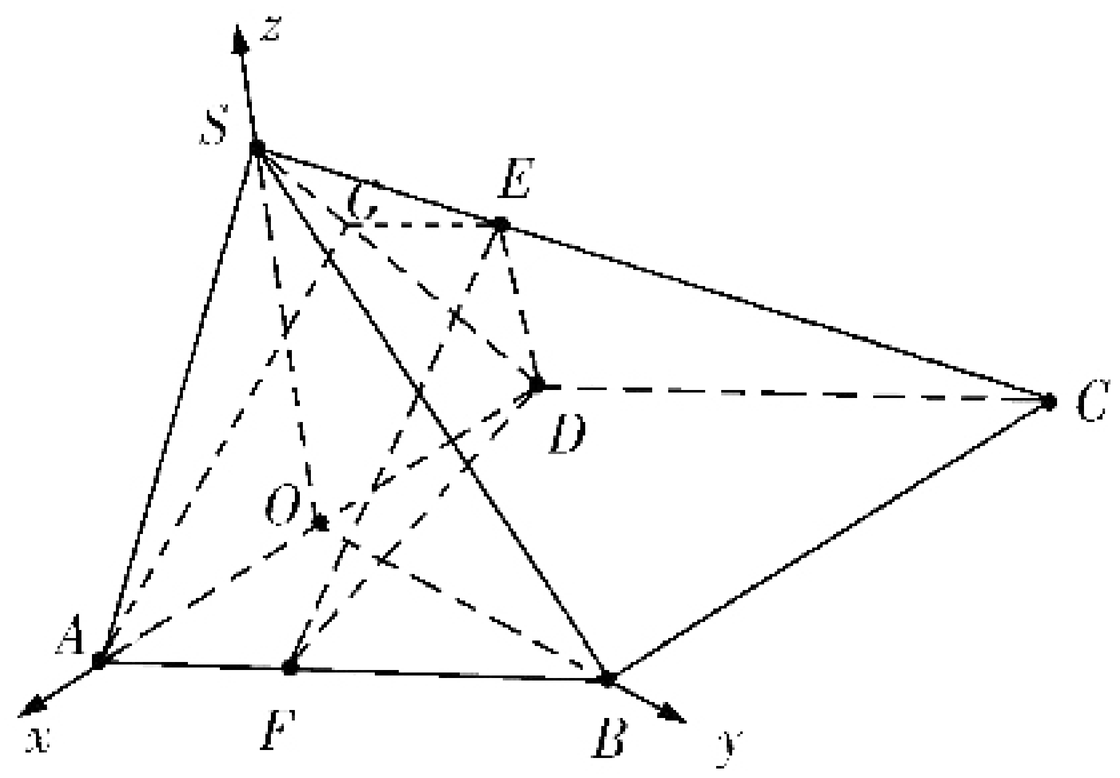
因为$\dfrac{AF}{FB}=\dfrac{1}{2}$，所以$AF=\dfrac{1}{3}AB$.（3 分）

又因为四边形 $ABCD$ 是菱形，所以 $AB// CD$，$AB=CD$,，所以 $EG// AF$，$EG=AF$，

所以四边形 $AGEF$ 为平行四边形.

所以 $AG// EF$.（5 分）

而 $EF\not\subset$ 平面 SAD，$AG\subset$ 平面 SAD，所以 $EF//$ 平面 SAD.（6 分）



（2）过点 S 作 $SO\perp AD$，连接 BO.

因为 $SA=SD$，所以 O 是 AD 的中点.

因为四边形 $ABCD$ 是菱形，$\angle ADC=120°$，

所以 $BO\perp AD$.

因为平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $SO\perp$ 平面 $ABCD$.

分别以 OA,OB,OS 所在直线为 x 轴，y 轴，z 轴，建立空间直角坐标系 $O-xyz$，如图所示.（7 分）

因为 $SA=SD=3\sqrt{2}$，所以 $AD=AB=CD=6,SO=3$.

因为 $\angle ADC=120°$，所以 $\angle DAB=60°$.

可计算得，$AF=2,OB=3\sqrt{3},AO=OD=3$.

所以 $A(3,0,0)$，$D(-3,0,0),S(0,0,3),F(2,\sqrt{3},0)$，$B(0,3\sqrt{3},0)$，$C(-6,3\sqrt{3},0)$.

因为 $\overrightarrow{SE}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{SC}$，$\overrightarrow{SC}=(-6,3\sqrt{3},-3)$，

所以 $\overrightarrow{SE}=(-2,\sqrt{3},-1)$，故 $E(-2,\sqrt{3},2)$，（8 分）

所以$\overrightarrow{SB}=(0,3\sqrt{3},-3)$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=(-6,0,0)$，$\overrightarrow{DF}=(5,\sqrt{3},0)$， $\overrightarrow{DE}=(1,\sqrt{3},2)$．

设平面SBC的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{SB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}3\sqrt{3}y_1-3z_1=0\\ -6x_1=0\end{cases}$，取$y_1=1$，则$z_1=\sqrt{3},x_1=0$，得$\boldsymbol{n}=(0,1,\sqrt{3})$．（10分）

设平面DEF的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DF}=0\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}5x_2+\sqrt{3}y_2=0\\ x_2+\sqrt{3}y_2+2z_2=0\end{cases}$，

取$x_2=1$，得$\begin{cases}y_2=-\dfrac{5\sqrt{3}}{3},\\ z_2=2,\end{cases}$所以$\boldsymbol{m}=(1,-\dfrac{5\sqrt{3}}{3},2)$．（11分）

设平面DEF与平面SBC所成二面角为θ，则

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{1\times0+(-\frac{5\sqrt{3}}{3})\times1+2\times\sqrt{3}}{\sqrt{0^2+1^2+(\sqrt{3})^2}\times\sqrt{1^2+(-\frac{5\sqrt{3}}{3})^2+2^2}}=\frac{\sqrt{10}}{40}.$$

所以平面DEF与平面SBC所成锐二面角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{1590}}{40}$．（12分）

19．（本小题满分12分）

【解析】（1）因为$\forall x_1,x_2\in I$，恒有$f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2)$，

所以令$x_1=x_2=1$，得$f(1)=2f(1)$，所以$f(1)=0$．

令$x_1=x_2=-1$，得$f(1)=2f(-1)$，所以$f(-1)=0$．

令$x_1=x,x_2=-1$，得$f(-x)=f(x)+f(-1)=f(x)$，

所以$f(x)$是偶函数．（6分）

（2）设$g(x)=f(x)+x^2$，则$g(x)$是偶函数，且在$(0,+\infty)$上为增函数．

$f(m)-f(2m+1)<3m^2+4m+1$，即 $f(m)+m^2<f(2m+1)+(2m+1)^2$，

即 $g(m)<g(2m+1)$.

由 $g(x)$ 是偶函数，得 $g(|m|)<g(|2m+1|)$，

由 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数，得 $|m|<|2m+1|$，即 $m^2<(2m+1)^2$.

解得 $m>-\dfrac{1}{3}$ 或 $m<-1$. 又 $m\neq 0$，

所以实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup(-\dfrac{1}{3},0)\cup(0,+\infty)$.（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

【解析】因为 $S_n=2S_{n-1}-n(n\geq 2)$，

所以当 $n\geq 3$ 时，$S_{n-1}=2S_{n-2}-(n-1)$，

所以 $a_n=2a_{n-1}-1$，即 $a_n-1=2(a_{n-1}-1)$.（2 分）

所以 $\dfrac{a_n-1}{a_{n-1}-1}=2(n\geq 3)$.

当 $n=2$ 时，$a_1+a_2=2a_1-2$，得 $a_2=0$，

所以 $\dfrac{a_2-1}{a_1-1}=\dfrac{-1}{1}=-1\neq 2$，（4 分）

因此数列 $\{a_n-1\}$ 不是等比数列.（5 分）

（2）由（1），得 $\{a_n-1\}$ 从第二项起，是以 2 为公比的等比数列.

所以 $a_n-1=-1\cdot 2^{n-2}=-2^{n-2}$，$a_n=-2^{n-2}+1(n\geq 2,n\in \mathbf{N}^*)$.（6 分）

因此，$a_n=\begin{cases}2,n=1\\-2^{n-2}+1,n\geq 2\end{cases}$，$na_n=\begin{cases}2,n=1\\-n\cdot 2^{n-2}+n,n\geq 2\end{cases}$.（8 分）

$T_n=2-2\times2^0-3\times2^1-\cdots-n\cdot2^{n-2}+(2+3+\cdots+n)$ ①

$2T_n=4-2\times2^1-3\times2^2-\cdots-n\cdot2^{n-1}+2\times(2+3+\cdots+n)$. ②

①−②得 $-T_n=-2-2-2-2^2-2^3-\cdots-2^{n-2}+n\cdot2^{n-1}-\dfrac{(n-1)(n+2)}{2}$

$=-4-\dfrac{2-2^{n-2}\times2}{1-2}+n\cdot2^{n-1}-\dfrac{(n-1)(n+2)}{2}=2^{n-1}(n-1)-2-\dfrac{(n-1)(n+2)}{2}$.

所以 $T_n=\dfrac{n^2+n+2}{2}-2^{n-1}(n-1)$.（12 分）

21.（本小题满分 12 分）

【解析】(1) 由 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}+a$，得 $f'(x)=\dfrac{(x-1)e^x+1}{x^2}$.

设 $g(x)=(x-1)e^x+1$，则 $g'(x)=xe^x$，

当 $x\in(-\infty,0)$ 时 $g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是减函数，

当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $g'(x)>0$，所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，（3 分）

所以 $g(x)\ge g(0)=0$，所以 $f'(x)\ge0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数，$f(x)$ 极值点的个数为 0.（5 分）

(2) $e^x>f(x)(x>0)$ 可化为 $(1-x)e^x+ax-1<0$.

令 $h(x)=(1-x)e^x+ax-1$，则问题等价于当 $x>0$ 时，$h(x)<0$.（6 分）

易得 $h'(x)=-xe^x+a$，

令 $m(x)=-xe^x+a$，则 $m(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

①当 $a\le0$ 时，,$m(x)<m(0)=a\le0$.

所以 $h'(x)<0$，$h(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数.

所以$h(x)<h(0)=0$.（9 分）

②当$a>0$时， $m(0)=a>0$，

$m(a)=-ae^{a}+a=a(1-e^{a})<0$，

所以存在$x_0\in(0,a)$，使$m(x_0)=0$.（10 分）

当$x\in(0,x_0)$时，$m(x)>0,h'(x)>0$，$h(x)$在$(0,x_0)$上是增函数；

因为$h(0)=0$，所以当$x\in(0,x_0)$时，$h(x)>0$，不满足题意.

综上所述，实数a的取值范围是$(-\infty,0]$.（12 分）

22.（本小题满分 12 分）

【解析】(1）易知$f(x)=\dfrac{a\ln x}{4}-\dfrac{1}{2}x^2$的定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=\dfrac{a}{4x}-x=\dfrac{a-4x^2}{4x}$，

当$a\le 0$时，$f'(x)<0$恒成立，所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减.（2 分）

当$a>0$时，

由$\begin{cases}f'(x)>0\\x>0\end{cases}$,解得$0<x<\dfrac{\sqrt{a}}{2}$；（3 分）

由$\begin{cases}f'(x)<0\\x>0\end{cases}$,解得$x>\dfrac{\sqrt{a}}{2}$.

所以$f(x)$在$(0,\dfrac{\sqrt{a}}{2})$上单调递增，在$(\dfrac{\sqrt{a}}{2},+\infty)$上单调递减，

综上所述，当$a\le 0$时，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递减；

当$a>0$时，$f(x)$在$(0,\dfrac{\sqrt{a}}{2})$上单调递增，在$(\dfrac{\sqrt{a}}{2},+\infty)$上单调递减.（6 分）

（2）当$a=4$时，$f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$，

由（1）可知$f(x)=\ln x-\frac{1}{2}x^2$在$(0,1)$上单调递增.（7 分）

设$x_1,x_2\in(0,1)$，且$x_1<x_2$，则$f(x_1)<f(x_2)$，即$\ln x_1-\frac{1}{2}{x_1}^2<\ln x_2-\frac{1}{2}{x_2}^2$，

所以$\ln\frac{x_1}{x_2}<\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)$，所以$\frac{x_1}{x_2}<e^{\frac{1}{2}(x_1^2-x_2^2)}$.

因为$x\in(0,\frac{\pi}{6})$，所以$0<\sin x<\cos x<1$.

所以$\frac{\sin x}{\cos x}<e^{\frac{1}{2}(\sin^2 x-\cos^2 x)}$，即$\tan x<e^{-\frac{1}{2}\cos 2x}$，（9 分）

因为$x\in(0,\frac{\pi}{6})$，所以$2x\in(0,\frac{\pi}{3})$，所以$\cos 2x\in(\frac{1}{2},1)$，$-\frac{1}{2}\cos 2x\in(-\frac{1}{2},-\frac{1}{4})$.

所以$e^{-\frac{1}{2}\cos 2x}<e^{-\frac{1}{4}}$.

综上可得，$\tan x<e^{-\frac{1}{2}\cos 2x}<e^{-\frac{1}{4}}$.（12 分）