2023北京杨镇一中高三10月月考

数　　学

（满分150，考试时间120分钟）

一、选择题：共10小题，每小题4分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1\}$，集合 $B=\{x|-1\le x<2\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $\{-1,0,1,2\}$　　B. $\{-1,0,1\}$　　C. $\{0,2\}$　　D. $\{-1\}$

2. 下列函数中，是奇函数且在定义域上为增函数是（　）

A. $y=x^2+1$　　B. $y=\tan x$　　C. $y=2^x$　　D. $y=x+\sin x$

3. 二项式 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中含 x^4 项的系数是（　）.

A. 6　　B. -6　　C. -12　　D. 12

4. 化简 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}$ 等于（　）

A. $\overrightarrow{DC}$　　B. $\overrightarrow{CD}$　　C. $\overrightarrow{AD}$　　D. $\overrightarrow{CB}$

5. 已知 $x>y$，则下列各式中一定成立（　）

A. $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{y}$　　B. $\ln(x-y)>0$

C. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>\left(\dfrac{1}{2}\right)^y$　　D. $2^x+2^{-y}>2$

6. 在 ΔABC 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，若 $a^2-b^2=\sqrt{3}bc,\sin C=2\sqrt{3}\sin B$，则角A为

A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°

7. 关于函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x+1$ 有下述四个结论，其中结论错误的是（　）

A. $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=2$　　B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 对称

C. $f(x)$ 的图象关于 $\left(\dfrac{7}{24}\pi,0\right)$ 对称　　D. $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增

8. 已知函数 $f(x)=|2^x-2|$，若 $f(a)=f(b)$（$a\ne b$），则 $a+b$ 的取值范围是（　）

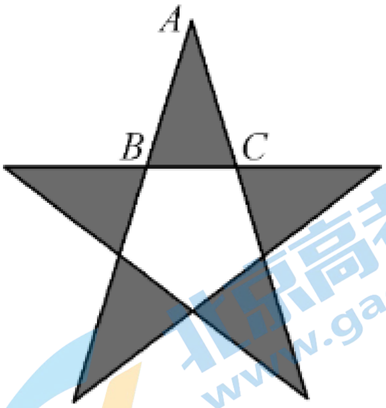
A. $(-\infty,1)$　　B. $(-\infty,2)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(2,+\infty)$

9. 在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 的对边分别为 a，b，c，则“$\dfrac{\cos A}{\cos B}=\dfrac{b}{a}$”是“$A=B$”的（　）条件

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　　　　　　　　　　　　　D. 既不充分也不必要条件

10. 17 世纪德国著名的天文学家开普勒曾经这样说过："几何学里有两件宝，一个是勾股定理，另一个是黄金分割.如果把勾股定理比作黄金矿的话，那么可以把黄金分割比作钻石矿."黄金三角形有两种，其中底与腰之比为黄金分割比的黄金三角形被认为是最美的三角形，它是一个顶角为36°的等腰三角形(另一种是顶角为 108°的等腰三角形).例如，五角星由五个黄金三角形与一个正五边形组成，如图所示，在其中一个黄金$\triangle ABC$中，$\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.根据这些信息，可得$\sin 234^{\circ}=$（　）



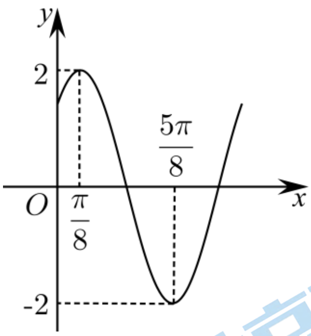
A. $\dfrac{1-2\sqrt{5}}{4}$　　B. $-\dfrac{3+\sqrt{5}}{8}$　　C. $-\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$　　D. $-\dfrac{4+\sqrt{5}}{8}$

二、填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 已知i为虚数单位，若$z=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$，则$|z|=$__________.

12. 函数$f(x)=\sqrt{1-x}+\ln(x+2)$的定义域为__________.

13. 函数$y=2\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}\right)$在一个周期内的图象如图所示，则$\omega=$__________，$\varphi=$__________.



14. 函数$f(x)=2\sin x-\cos 2x$的最大值为__________，最小值为__________.

15. 设函数$f(x)$和$g(x)$的定义域为D，若存在非零实数$c\in D$，使得$f(c)+g(c)=0$，则称函数$f(x)$和$g(x)$在D上具有性质P.现有四组函数：① $f(x)=x$，$g(x)=x^2$；② $f(x)=2^{-x}$，$g(x)=-\mathrm{e}^x$；③

$f\left(x\right)=-x^2$，$g\left(x\right)=2^x$；④ $f\left(x\right)=x$，$g\left(x\right)=\sin x$.其中具有性质 P 的是__________.（写出所有满足条件的函数的序号）

三、解答题：共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16.设函数 $f\left(x\right)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2\cos^2 x$.

（1）求函数 $f\left(x\right)$ 的最小正周期和单调减区间；

（2）求函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ 上的最值.

17. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=7$，$S_{\triangle ABC}=6\sqrt{3}$，$\cos B=-\dfrac{1}{7}$.

（1）求 b，c；

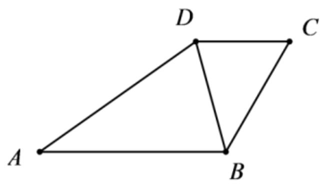
（2）求 AC 边上中线的长.

18. 已知函数 $f\left(x\right)=xe^x-\dfrac{m}{2}(x+1)^2\left(m\geq 0\right)$.

（1）当 $m=0$ 时，求函数 $f\left(x\right)$ 的最小值；

（2）当 $m>0$ 时，讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性.

19. 如图，在四边形 $ABCD$ 中，$AB//CD$，$AB=2\sqrt{6}$，$CD=\sqrt{6}$，$\cos A=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\angle ADB=\dfrac{1}{3}$.



（1）求 $\cos\angle BDC$；

（2）求 BC 的长.

20.已知函数 $f(x)=x\ln(x+1)-ax^2$.

(I) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(II) 当 $a<0$ 时，求证：函数 $f(x)$ 存在极小值；

(III) 请直接写出函数 $f(x)$ 的零点个数.

21. 对于数列 $\{a_n\}$，定义 $a_n^*=\begin{cases}1, a_{n+1}\geq a_n,\\ -1, a_{n+1}<a_n.\end{cases}$ 设 $\{a_n^*\}$ 的前 n 项和为 S_n^*.

（1）设 $a_n=\dfrac{n}{2^n}$，写出 a_1^*，a_2^*，a_3^*，a_4^*；

（2）证明："对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $S_n^*=a_{n+1}-a_1$"的充要条件是"对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $\left|a_{n+1}-a_n\right|=1$"；

（3）已知首项为 0，项数为 $m+1(m\geq 2)$ 的数列 $\{a_n\}$ 满足：

①对任意 $1\leq n\leq m$ 且 $n\in \mathbf{N}^*$，有 $a_{n+1}-a_n\in\{-1,0,1\}$；

② $S_m^*=a_m$.

求所有满足条件的数列 $\{a_n\}$ 的个数.

参考答案

一、选择题：共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【答案】B

【分析】根据交集含义即可得到答案.

【详解】根据交集含义即可得到 $A\cap B=\{-1,0,1\}$，

故选：B.

2.【答案】D

【分析】根据函数奇偶性的判断和单调性的判断方法一一分析即可.

【详解】对 A，$f(x)=x^2+1$，$f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1$，其定义域为 R，故其为偶函数，故 A 错误；

对 B，正切函数为奇函数，但其在定义域上不是增函数，故 B 错误；

对 C，根据指数函数的图象与性质知其不具有奇偶性，故 C 错误；

对 D，对于 D，设 $h(x)=x+\sin x$，其定义域为 R，且

$h(-x)=(-x)+\sin(-x)=-(x+\sin x)=-h(x)$，故其为奇函数，

而 $h'(x)=1+\cos x\geq 0$，即函数在定义域内为增函数，符合题意；

故选：D.

3.【答案】C

【分析】根据二项式展开式的通项即可求解.

【详解】因为二项式 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^6$ 的展开式通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r x^{6-r}(-\dfrac{2}{x})^r=(-2)^r\mathrm{C}_6^r x^{6-2r}$，

令 $6-2r=4$，则 $r=1$，

所以二项式 $\left(x-\dfrac{2}{x}\right)^6$ 的展开式中含 x^4 项的系数为 $(-2)^1\mathrm{C}_6^1=-12$，

故选：C.

4.【答案】A

【分析】根据向量加减运算法则计算出结果.

【详解】$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$.

故选：A

5.【答案】D

【分析】结合指数函数，基本不等式的性质逐项判断即可.

【详解】选项 A: 令 $x=1, y=-1,$ 不满足，选项错误；

选项 B: 只有当 $x-y>1$ 时，$\ln(x-y)>0$.令 $x=1,y=0$，不满足，选项错误；

选项 C: $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 是定义域内的减函数，$x>y$，故有 $\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^y$，选项错误；

选项 D: $y=2^x$ 是定义域内的增函数，$2^x+2^{-y}>2^y+2^{-y}$, 又因为 $2^y+2^{-y}\geq 2$, 当 $y=0$ 时等号成立，故 $2^x+2^{-y}>2$, 选项正确；

故选：D.

6.【答案】A

【详解】试题分析：

因为 $\sin C=2\sqrt{3}\sin B\therefore c=2\sqrt{3}b$，

那么结合 $a^2-b^2=\sqrt{3}bc\Rightarrow a^2=6b^2$，

所以 $\cos A=\frac{c^2+b^2-a^2}{2cb}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

所以 $A=30^0$，故答案为 A

考点：正弦定理与余弦定理

点评：本题主要考查正弦定理与余弦定理的基本应用，属于中等题.

7.【答案】C

【分析】首先根据三角函数的恒等变换化简函数 $f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，然后根据三角函数图像判断求解.

【详解】$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x+1=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$，

选项 A: $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\sin\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=2$, 选项正确；

选项 B:令 $x=\frac{\pi}{3}$，$2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，故有 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，选项正确；

选项 C: 令 $x=\frac{7\pi}{24}$, $2x-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{12}$，结合三角函数图像性质，$f(x)$ 的图象不关于 $\left(\frac{7}{24}\pi,0\right)$ 对称，选项错误；

选项 D: $x\in\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$, $2x-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$, 结合三角函数图像性质，$f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ 上单调递增.

故选：C.

8.【答案】B

【分析】由 $f(x)=|2^x-2|=\begin{cases}2-2^x, x<1\\2^x-2, x\geq 1\end{cases}$，可知 $a<1<b$, 由 $f(a)=f(b)$ 可得 $2^a+2^b=4$,

根据基本不等式可求 $a+b$ 的取值范围.

【详解】 $f\left(x\right)=\left|2^{x}-2\right|=\begin{cases}2-2^{x},x<1\\2^{x}-2,x\geq1\end{cases}$ 若$1<a<b$, 由 $f\left(a\right)=f\left(b\right)$，则 $2^{a}-2=2^{b}-2,\therefore a=b$ 与 $a\neq b$ 矛盾；同理 $a<b<1$, 也可导出矛盾，故 $a<1<b,\therefore 2-2^{a}=2^{b}-2,\therefore 2^{a}+2^{b}=4$, 而 $2^{a}+2^{b}>2\sqrt{2^{a}\cdot2^{b}}=2\sqrt{2^{a+b}},\therefore 2^{a+b}<4=2^{2}$,

即 $a+b<2$.

故选 B

【点睛】本题考查分段函数的性质以及基本不等式的应用，属中档题.

9.【答案】B

【分析】先由正弦定理得到 $2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$，从而判断出“$\dfrac{\cos A}{\cos B}=\dfrac{b}{a}$”是“$A=B$”的必要而不充分条件.

【详解】 $\dfrac{\cos A}{\cos B}=\dfrac{b}{a}$ 变形为 $a\cos A=b\cos B$，由正弦定理得 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$，

即 $\dfrac{1}{2}\sin 2A=\dfrac{1}{2}\sin 2B$，所以 $\sin 2A=\sin 2B$，

因为 $A,B\in\left(0,\pi\right)$，所以 $2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$，

故 $A=B$ 或 $A+B=\dfrac{\pi}{2}$，

所以“$\dfrac{\cos A}{\cos B}=\dfrac{b}{a}$”是“$A=B$”的必要而不充分条件.

故选：B

10.【答案】C

【分析】先求出 $\cos\angle ACB=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，再根据二倍角余弦公式求出 $\cos144^{\circ}$，然后根据诱导公式求出 $\sin 234^{\circ}$.

【详解】由题意可得：$\angle ACB=72^{\circ}$，且 $\cos\angle ACB=\dfrac{\frac{1}{2}BC}{AC}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，

所以 $\cos144^{\circ}=2\cos^{2}72^{\circ}-1=2\times\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^{2}-1=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$，

所以 $\sin 234^{\circ}=\sin\left(144^{\circ}+90^{\circ}\right)=\cos144^{\circ}=-\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$，

故选：C

【点睛】本题考查了二倍角的余弦公式和诱导公式，属于基础题.

二、填空题：共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11.【答案】$\frac{\sqrt{10}}{5}$ ## $\frac{1}{5}\sqrt{10}$

【分析】利用复数的运算法则、模的计算公式即可得出.

【详解】复数 $z=\frac{1-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}=\frac{(1-\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}{(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})}=\frac{1-3\mathrm{i}}{5}=\frac{1}{5}-\frac{3}{5}\mathrm{i}$，

则 $|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{5}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{10}}{5}$.

12.【答案】$(-2,1]$.

【分析】根据二次根式中被开方数非负以及对数真数大于零列不等式，可得出函数 $y=f(x)$ 的定义域.

【详解】由题意可得 $\begin{cases}1-x\geq 0\\ x+2>0\end{cases}$，解得 $-2<x\leq 1$，因此，函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $(-2,1]$.

故答案为 $(-2,1]$.

【点睛】本题考查具体函数定义域的求解，求解原则如下：

（1）分式中分母不为零；

（2）偶次根式被开方数非负；

（3）$x^{-n}\left(n\in N^*\right)$、$x^0$ 中底数不为零；

（4）对数函数真数为正数，底数大于零且不等于1；

（5）正切函数 $y=\tan x$ 中，$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in Z)$；

（6）求函数定义域应在原式中求，不能对解析式变形后再求.

13.【答案】 ①. 2 ②. $\frac{\pi}{4}$ ## $\frac{1}{4}\pi$

【分析】根据图象可得 T，然后根据周期公式即可得 ω，最后代点的坐标可求得 φ.

【详解】由图可知，$T=2\left(\frac{5\pi}{8}-\frac{\pi}{8}\right)=\pi$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{\pi}=2$，

又因为图象过点 $\left(\frac{\pi}{8},2\right)$，所以 $2\sin\left(2\times\frac{\pi}{8}+\varphi\right)=2$，

所以 $\frac{\pi}{4}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，即 $\varphi=\frac{\pi}{4}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

又 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

故答案为：2；$\frac{\pi}{4}$.

14.【答案】 ①. 3 ②. $-\frac{3}{2}$##-1.5

【分析】利用二倍角公式变形，然后利用换元法，结合二次函数性质可解.

【详解】$f(x)=2\sin x-\cos 2x=2\sin^2 x+2\sin x-1$，

令$\sin x=t$，则$y=2t^2+2t-1=2\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$，$t\in[-1,1]$，

由二次函数性质可知，当$t=-\frac{1}{2}$时，$y_{\min}=-\frac{3}{2}$，当$t=1$时，$y_{\max}=3$.

故答案为：3；$-\frac{3}{2}$.

15.【答案】①③.

【分析】根据性质P定义，逐项判断求解；

【详解】① $f(x)=x$，$g(x)=x^2$，定义域$D=\mathrm{R}$,令$f(x)+g(x)=x+x^2=0$,

解得：$x=0$（舍去）或$x=-1$，

所以存在非零实数$c=-1\in D$，使得$f(c)+g(c)=0$；

② $f(x)=2^{-x}$，$g(x)=-\mathrm{e}^x$，定义域$D=\mathrm{R}$，令$G(x)=f(x)+g(x)=2^{-x}-\mathrm{e}^x$，

结合指数函数的单调性，$G(x)$在定义域内单调递减，$G(0)=0$, 故无其他零点，

所以不存在非零实数$c\in D$，使得$f(c)+g(c)=0$；

③ $f(x)=-x^2$，$g(x)=2^x$，定义域$D=\mathrm{R}$，令$G(x)=f(x)+g(x)=2^x-x^2$，

存在$c=2$，使得$f(c)+g(c)=0$；

④ $f(x)=x$，$g(x)=\sin x$，定义域$D=\mathrm{R}$，$G(x)=f(x)+g(x)=x+\sin x$,

$G'(x)=1+\cos x>0$，函数单调递增，又$G(0)=0$, 故无其他零点，

所以不存在非零实数$c\in D$，使得$f(c)+g(c)=0$；

故答案为：①③.

三、解答题：共 6 小题，共 85 分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

16.【答案】（1）$T=\pi$，$\left[\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$

（2）最小值为$1-\sqrt{3}$，最大值为$\frac{5}{2}$

【分析】（1）利用和差公式、二倍角公式和辅助角公式化简，然后由周期公式和正弦函数单调性求解可得；

（2）先求$2x+\frac{\pi}{3}$的范围，然后由正弦函数性质可得.

【小问 1 详解】

因为 $f\left(x\right)=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2\cos^2 x=\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\cos 2x+1$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\dfrac{3}{2}\cos 2x+1=\sqrt{3}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+1$.

所以 $f\left(x\right)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$，

由 $\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x+\dfrac{\pi}{3}\le\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$，解得 $\dfrac{\pi}{12}+k\pi\le x\le\dfrac{7\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

所以 $f\left(x\right)$ 的单调减区间为 $\left[\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\dfrac{7\pi}{12}+k\pi\right],k\in\mathbf{Z}$.

【小问 2 详解】

因为 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$，所以 $2x+\dfrac{\pi}{3}\in\left[-\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right]$，

所以 $-1\le\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)\le\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $1-\sqrt{3}\le\sqrt{3}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+1\le\dfrac{5}{2}$，

所以函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ 上，当 $2x+\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=-\dfrac{5\pi}{12}$ 时取得最小值 $1-\sqrt{3}$；

当 $2x+\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$，即 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 时取得最大值 $\dfrac{5}{2}$.

17. 【答案】（1） $b=8$， $c=3$.

（2） $AD=\sqrt{13}$.

【分析】（1）根据三角形面积公式和余弦定理求解；

（2）根据向量求解;

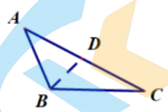
【小问 1 详解】

$\cos B=-\dfrac{1}{7}$，根据三角函数的关系，求得： $\sin B=\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$，

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=6\sqrt{3}$, 解得： $c=3$，

根据余弦定理， $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，解得： $b=8$.

【小问 2 详解】



在三角形 ABD 中，$\overrightarrow{BD}=\dfrac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}$，

$$\left|\overrightarrow{BD}\right|^2=\left|\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}\right|^2=\frac{\left|\overrightarrow{BA}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{4}=\frac{9+49+2\times3\times7\times\left(-\frac{1}{7}\right)}{4}=13,$$

故 $BD=\sqrt{13}$.

18.【答案】（1）$-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$

（2）答案见解析

【分析】（1）直接代入，求出导数，令导函数为 0 求出最小值；

（2）分 $m=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，$m>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 和 $0<m<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 讨论即可.

【小问 1 详解】

当 $m=0$ 时：$f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$，令 $f'(x)=0$ 解得 $x=-1$，

又因为当 $x\in(-\infty,-1)$，$f'(x)<0$，此时函数 $f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(-1,+\infty)$，$f'(x)>0$，此时函数 $f(x)$ 单调递增.

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(-1)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

【小问 2 详解】

$f'(x)=(x+1)\left(\mathrm{e}^x-m\right)$，

当 $m>0$ 时，由 $f'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=\ln m$.

①若 $m=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，则 $f'(x)=(x+1)\left(\mathrm{e}^x-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)\geq0$，故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；

②若 $m>\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，则 $\ln m>-1$.故当 $f'(x)>0$ 时，$x<-1$ 或 $x>\ln m$；

当 $f'(x)<0$ 时，$-1<x<\ln m$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(\ln m,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-1,\ln m)$ 上单调递减.

③若 $0<m<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，则 $\ln m<-1$.故当 $f'(x)>0$ 时，$x<\ln m$ 或 $x>-1$；

当 $f'(x)<0$ 时，$\ln m<x<-1$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln m)$，$(-1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\ln m,-1)$ 上单调递减.

综上所述，当 $m=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；

当 $m>\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(\ln m,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-1,\ln m)$ 上单调递减.

当 $0<m<\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,\ln m)$，$(-1,+\infty)$ 上单调递增，在 $(\ln m,-1)$ 上单调递减.

19.【答案】(1) $\frac{\sqrt{6}}{9}$；(2) $\sqrt{11}$.

【分析】(1) 计算出 $\sin A$、$\sin\angle ADB$，利用两角和的余弦公式可求得 $\cos\angle BDC=\cos\angle ABD$ 的值；

(2) 在 $\triangle ABD$ 中，利用正弦定理可求出 BD 的长，然后在 $\triangle BCD$ 中利用余弦定理可求得 BC 的长.

【详解】(1) 因为 $\cos A=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\cos\angle ADB=\frac{1}{3}$，则 A、$\angle ADB$ 均为锐角，

所以，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\sin\angle ADB=\sqrt{1-\cos^2\angle ADB}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

$\cos\angle ABD=\cos(\pi-A-\angle ADB)=-\cos(A+\angle ADB)=\sin A\sin\angle ADB-\cos A\cos\angle ADB$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{6}}{9}$，

$\because AB//CD$，则 $\angle BDC=\angle ABD$，因此，$\cos\angle BDC=\cos\angle ABD=\frac{\sqrt{6}}{9}$；

(2) 在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理可得 $\frac{AB}{\sin\angle ADB}=\frac{BD}{\sin A}$，

可得 $BD=\frac{AB\sin A}{\sin\angle ADB}=\frac{2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}=3$，

在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理可得 $BC^2=BD^2+CD^2-2BD\cdot CD\cos\angle BDC=9+6-2\cdot3\cdot\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}}{9}=11$，

因此，$BC=\sqrt{11}$.

【点睛】方法点睛：在解三角形的问题中，若已知条件同时含有边和角，但不能直接使用正弦定理或余弦定理得到答案，要选择“边化角”或“角化边”，变换原则如下：

(1) 若式子中含有正弦的齐次式，优先考虑正弦定理“角化边”；

(2) 若式子中含有 a、b、c 的齐次式，优先考虑正弦定理“边化角”；

(3) 若式子中含有余弦的齐次式，优先考虑余弦定理“角化边”；

(4) 代数式变形或者三角恒等变换前置；

(5) 含有面积公式的问题，要考虑结合余弦定理求解；

(6) 同时出现两个自由角（或三个自由角）时，要用到三角形的内角和定理.

20.【答案】(1) $y=0$；(2) 证明见解析；(3) 当 $a\le0$ 或 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 有一个零点；当 $a>0$ 且 $a\ne1$ 时，函数 $f(x)$ 有两个零点.

【分析】(1) 求出函数 $f(x)$ 的导数，可得切线的斜率和切点，可得切线的方程；(2) $f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}-2ax$，说明 $f'(x)$ 有可变零点即可；(3)由题意可得函数 $f(x)$ 的零点个数.

【详解】（1） $f(x)=x\ln(x+1)-ax^2$ 的定义域为 $\{x|x\rangle-1\}$

因为 $f(0)=0\ln(0+1)-a\cdot 0^2=0$

所以切点的坐标为 $(0,0)$

因为 $f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}-2ax$

$$f'(0)=\ln(0+1)+\frac{0}{0+1}-2a\cdot 0=0$$

所以切线的斜率 $k=0$，

所以切线的方程为 $y=0$

（2）**方法一：**

令 $g(x)=f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}-2ax$

$$g'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}-2a$$

因为 $x>-1$ 且 $a<0$，

所以 $\dfrac{1}{x+1}>0$，$\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$，$-2a>0$

从而得到 $g'(x)>0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上恒成立

所以 $f'(x)>0$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增且 $f'(0)=0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上递减，在 $(0,+\infty)$ 递增；

所以 $x=0$ 时，$f(x)$ 取得极小值，问题得证

方法二：

因为 $f'(x)=\ln(x+1)+\dfrac{x}{x+1}-2ax$

当 $a<0$ 时，

当 $x<0$ 时，$\ln(x+1)<0,\dfrac{x}{x+1}<0,-2ax<0$，所以 $f'(x)<0$

当 $x>0$ 时，$\ln(x+1>0,\dfrac{x}{x+1}>0,-2ax>0$，所以 $f'(x)>0$

所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上递减，在 $(0,+\infty)$ 递增；

所以 $x=0$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 取得极小值，问题得证.

（3）当 $a\le 0$ 或 $a=1$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 有一个零点 ；

当 $a>0$ 且 $a\ne 1$ 时，函数 $f\left(x\right)$ 有两个零点.

【点睛】本题考查函数的导数的运用：求切线的方程，确定函数的极值，考查函数的零点个数判断，以及分类讨论思想方法，属于中档题.

21.【答案】（1）答案见解析.

（2）证明见解析. （3）$(m-1)\cdot 2^{m-2}$.

【分析】（1）代入求得 a_1,a_2,a_3,a_4， a_5，再由已知可求得所求的值；

（2）证明必要性：由已知有 $S_n^*=a_{n+1}-a_1$， $S_{n-1}^*=a_n-a_1$，两式作差，得证 $|a_{n+1}-a_n|=|a_n^*|=1$；充分性：有 $a_n^*=a_{n+1}-a_n$，从而得 $S_n^*=a_1^*+a_2^*+\ldots+a_n^*=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\ldots+(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1}-a$，从而得证；

（3）构造数列 $\{b_n\}:b_1=0$， $b_{n+1}-a_n=\begin{cases}a_{n+1}-a_n,\left|a_{n+1}-a_n\right|=1\\1,a_{n+1}-a_n=0\end{cases}$，结合（2）知， $b_{m+1}=a_m$，

设 $a_2-a_1,a_3-a_2,\cdots,a_{m+1}-a_m$ 中有 k 项为 0， $a_{m+1}-a_m=-k$，分 $k=0$， $k=1$，分别讨论可求得满足条件的数列 $\{a_n\}$ 的个数.

【小问 1 详解】

解：因为 $a_1=\dfrac{1}{2},a_2=\dfrac{1}{2},a_3=\dfrac{3}{8},a_4=\dfrac{1}{4}$， $a_5=\dfrac{5}{32}$，

所以 $a_1^*=1,a_2^*=-1,a_3^*=-1$， $a_4^*=-1$.

【小问 2 详解】

证明：必要性：对 $n=1$，有 $S_1^*=a_2-a_1$，因此 $|a_2-a_1|=|S_1^*|=|a_1^*|=1$，

对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，且 $n\ge 2$，有 $S_n^*=a_{n+1}-a_1$， $S_{n-1}^*=a_n-a_1$，两式作差，得 $S_n^*-S_{n-1}^*=a_{n+1}-a_n$，即

$a_n^*=a_{n+1}-a_n$，因此 $|a_{n+1}-a_n|=|a_n^*|=1$，

综上，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $|a_{n+1}-a_n|=1$.

充分性：若对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $|a_{n+1}-a_n|=1$，则 $a_n^*=a_{n+1}-a_n$，

所以

$S_n^*=a_1^*+a_2^*+\ldots+a_n^*=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\ldots+(a_{n+1}-a_n)=a_{n+1}-a$，

综上，“对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $S_n^*=a_{n+1}-a_1$”的充要条件是“对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $\left|a_{n+1}-a_n\right|=1$”.

【小问 3 详解】

解：构造数列 $\{b_n\}:b_1=0$， $b_{n+1}-a_n=\begin{cases}a_{n+1}-a_n,\left|a_{n+1}-a_n\right|=1\\1,a_{n+1}-a_n=0\end{cases}$，

则对任意$1\le n\le m$且$n\in\mathbf{N}^*$，有$b_n^*=a_n^*$，$|b_{n+1}-b_n|=1$，结合（2）知，

$S_m^*=a_1^*+a_2^*+\ldots+a_m^*=b_1^*+b_2^*+\cdots+b_m^*=b_{m+1}-b_1=b_{m+1}$，又$S_m^*=a_m$，因此$b_{m+1}=a_m$，

设$a_2-a_1,a_3-a_2,\cdots,a_{m+1}-a_m$中有$k$项为0，则

$a_{m+1}=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\ldots+(a_{m+1}-a_m)$

$=b_1+(b_2-b_1)+(b_3-b_2)+\cdots+(b_{m+1}-b_m)-k$

$=b_{m+1}-k=a_m-k$，即$a_{m+1}-a_m=-k$，

若$k=0$，则$a_{m+1}-a_m=0$与a_2-a_1，$a_3-a_2,\cdots,a_{m+1}-a_m$中有0项为0，即$k=0$矛盾，不符题意，

若$k=1$，则$a_{m+1}-a_m=-1$，所以当$a_{m+1}-a_m=-1$，a_2-a_1，$a_3-a_2,\cdots,a_{m+1}-a_m$中有1项为0，其余$m-2$项为$\pm1$时，数列$\{a_n\}$满足条件.

$a_2-a_1,a_3-a_2,\ldots,a_m-a_{m-1}$中有一项为0，共$m-1$种取法，其余$m-2$项每项有1或$-1$两种取法，所以满足条件的数列$\{a_n\}$的个数为$(m-1)\cdot2^{m-2}$.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！