2022 北京丰台高三（上）期末

数　　学

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．若集合 $A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{x|x<1或x>3\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{x|-1<x<3\}$　　（B）$\{x|-1<x<1\}$　　（C）$\{x|1<x<2\}$　　（D）$\{x|2<x<3\}$

2．在复平面内，复数 $\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}$ 对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限　　（C）第三象限　　（D）第四象限

3．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n．若 $S_4=S_5=10$，则 $a_4=$

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

4．下列函数中，既是奇函数又在区间 $(-1,1)$ 上单调递增的是

（A）$y=-x$　　（B）$y=x^3$　　（C）$y=\cos x$　　（D）$y=(x+1)^{\frac{1}{2}}$

5．已知 α,β 是两个不同的平面，直线 $l\subset\alpha$，那么“$\alpha\parallel\beta$”是“$l\parallel\beta$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

6．已知抛物线 $C:y^2=8x$ 的焦点为 F，点 M 在 C 上. 若 O 是坐标原点，$|FM|=6$，则 $\overrightarrow{OF}\cdot\overrightarrow{OM}=$

（A）8　　（B）12　　（C）$8\sqrt{2}$　　（D）$8\sqrt{3}$

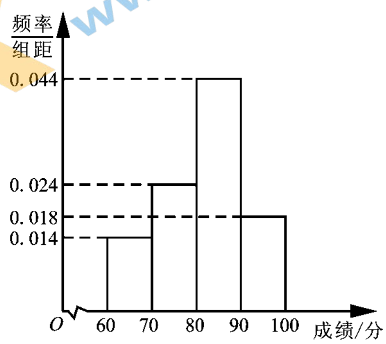
7．为普及冬奥知识，某校在各班选拔部分学生进行冬奥知识竞赛. 根据参赛学生的成绩，得到如图所示的频率分布直方图. 若要对 40%成绩较高的学生进行奖励，则获奖学生的最低成绩可能为

（A）65

（B）75

（C）85

（D）95



8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}|2^x-1|, x<1,\\ -(x-1)^2, x\geqslant 1.\end{cases}$ 若函数 $g(x)=f(x)-k$ 有两个不同的零点，则实数 k 的取值范围是

（A）$(-\infty,0]$　　（B）$(0,1]$

（C）$(-1,0]$　　（D）$[0,1)$

9. 声强级 L_I（单位：dB）由公式 $L_I=10\lg(\frac{I}{10^{-12}})$ 给出，其中 I 为声强（单位：$\mathrm{W/m^2}$）. 人在正常说话时，声强级大约在 40~60 dB 之间，声强级超过 60 dB 的声音会对人的神经系统造成不同程度的伤害. 给出下列四个声强，其声强级在 40~60 dB 之间的是

（A）$10^{-11.5}$　　（B）$10^{-9.5}$　　（C）$10^{-6.5}$　　（D）10^{2}

10. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})\ (\omega>0)$ 在区间 $[0,\pi]$ 上有且仅有 4 条对称轴，给出下列四个结论：

① $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上有且仅有 3 个不同的零点；

② $f(x)$ 的最小正周期可能是 $\frac{\pi}{2}$；

③ ω 的取值范围是 $[\frac{13}{4},\frac{17}{4})$；

④ $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{\pi}{15})$ 上单调递增.

其中所有正确结论的序号是

（A）①④　　（B）②③　　（C）②④　　（D）②③④

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11. 在 $(x+2)^5$ 的展开式中，x^2 的系数为____.（用数字作答）

12. 在平面直角坐标系 xOy 中，角 α 以 Ox 为始边，它的终边与以原点 O 为圆心的单位圆交于点 $P(x,\frac{3}{5})$，则 $\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=$____.

13. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,\ b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{5}$，C 的焦点到其渐近线的距离为 5，则 $a=$____.

14. 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，能够说明“若 $a_2>a_1$，则 $S_2>S_1$”是假命题的一组 a_1 和公比 q 的值依次为____.

15. 已知点 $P(2,0)$ 和圆 $O:x^2+y^2=36$ 上两个不同的点 M，N，满足 $\angle MPN=90°$，Q 是弦 MN 的中点，给出下列四个结论：

① $|MP|$ 的最小值是 4；

②点 Q 的轨迹是一个圆；

③若点 $A(5,3)$，点 $B(5,5)$，则存在点 Q，使得 $\angle AQB=90°$；

④△ MPN 面积的最大值是 $18+2\sqrt{17}$.

其中所有正确结论的序号是____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

16.（本小题共 13 分）

在△ ABC 中，$a=7$，$b=8$，再从条件①、条件②这两个条件中选择一个作为已知.

（I）求 $\angle A$；

（II）求△ ABC 的面积.

条件①：$c=3$；条件②：$\cos B=-\frac{1}{7}$.

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分.

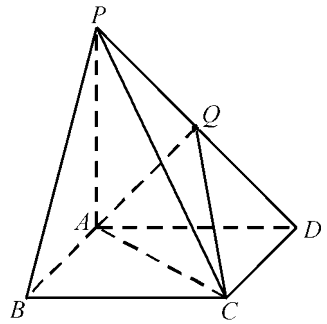
17.（本小题共 15 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，Q 为棱 PD 的中点，$PA\perp AD$，$PA=AB=2$.

（I）求证：$PA\perp$ 平面 $ABCD$；

（II）求平面 ACQ 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值；

（III）求直线 PB 到平面 ACQ 的距离.



18.（本小题共 14 分）

为了弘扬中华优秀传统文化，加强对学生的美育教育，某校开展了为期 5 天的传统艺术活动，从第 1 天至第 5 天依次开展“书画”、“古琴”、“汉服”、“戏曲”、“面塑”共 5 项传统艺术活动，每名学生至少选择其中一项进行体验. 为了解该校上述活动的开展情况，现从高一、高二、高三学生中各随机选取了 100 名学生作为样本进行调查，调查数据如下表：

传统艺术活动	第 1 天	第 2 天	第 3 天	第 4 天	第 5 天
	书画	古琴	汉服	戏曲	面塑
高一体验人数	80	45	55	20	45
高二体验人数	40	60	60	80	40
高三体验人数	15	50	40	75	30

（I）从样本中随机选取 1 名学生，求这名学生体验戏曲活动的概率；

（II）通过样本估计该校全体学生选择传统艺术活动的情况, 现随机选择 3 项传统艺术活动，设选择的 3 项活动中体验人数超过该校学生人数 50%的有 X 项，求 X 的分布列和数学期望 $E(X)$；

（III）为了解不同年级学生对各项传统艺术活动的喜爱程度，现从高一、高二、高三样本中各随机选取 1 名学生进行访谈. 设这 3 名学生均选择了第 k 天传统艺术活动的概率为 $P_k\ (k=1,2,3,4,5)$，写出 P_1,P_2，P_3,P_4,P_5 的大小关系.

19.（本小题共 14 分）

已知函数 $f(x)=x^2-a\ln x(a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0)$.

(I) 当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程；

（II）若 $f(x)\geqslant 0$ 恒成立，求 a 的取值范围.

20.（本小题共 15 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 过点 $(\sqrt{2},1)$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

（I）求椭圆 C 的方程；

（II）设椭圆 C 的右顶点为 A，过点 $D(4,0)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于不同的两点 M，N（均异于点 A），直线 AM，AN 分别与直线 $x=4$ 交于点 P，Q. 求证：$|DP|\cdot|DQ|$ 为定值.

21.（本小题共 14 分）

若有穷数列 $\{a_n\}$ $(n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 3)$ 满足 $|a_i-a_{i+1}|\leqslant|a_{i+1}-a_{i+2}|\ (i=1,2,\cdots,n-2)$，则称 $\{a_n\}$ 为 M 数列.

（I）判断下列数列是否为 M 数列，并说明理由；

① 1，2，4，3.

② 4，2，8，1.

（II）已知 M 数列 $\{a_n\}$ 中各项互不相同. 令 $b_m=|a_m-a_{m+1}|\ (m=1,2,\cdots,n-1)$，求证：数列 $\{a_n\}$ 是等差数列的充分必要条件是数列 $\{b_m\}$ 是常数列；

（III）已知 M 数列 $\{a_n\}$ 是 m $(m\in\mathbf{N}^*$ 且 $m\geqslant 3)$ 个连续正整数 $1,2,\cdots,m$ 的一个排列.若 $\sum\limits_{k=1}^{m-1}|a_k-a_{k+1}|=m+2$，求 m 的所有取值.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

2022 北京丰台高三（上）期末数学

参考答案

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	D	A	B	A	A	C	D	C	B

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分.

11．80　　12．$\frac{3}{5}$　　13．$\frac{5}{2}$

14．-1，$\frac{1}{2}$(答案不唯一)　　15．①②④

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

16.（本小题共 13 分）

解： 选条件①：$c=3$.

（I）在△ABC 中，因为 $a=7$， $b=8$， $c=3$，

由余弦定理，得 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{64+9-49}{2\times 8\times 3}=\frac{1}{2}$.

因为 $0<\angle A<\pi$,

所以 $\angle A=\frac{\pi}{3}$.　　………………7 分

（II）由（I）可得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 8\times 3\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$.　　………………13 分

选条件②： $\cos B=-\frac{1}{7}$.

（I）在△ABC 中，因为 $\cos B=-\frac{1}{7}$,

所以 $\sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}$.

由正弦定理，得 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{7}{8}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由题可知 $\frac{\pi}{2}<\angle B<\pi$,所以 $0<\angle A<\frac{\pi}{2}$.

所以 $\angle A=\frac{\pi}{3}$.　　………………7 分

（II）由（I）可得 $\cos A=\frac{1}{2}$.

因为 $\sin C=\sin[\pi-(A+B)]$

$= \sin(A+B)$

$= \sin A\cos B + \cos A\sin B$

$= \dfrac{\sqrt{3}}{2}\times(-\dfrac{1}{7}) + \dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$

$= \dfrac{3\sqrt{3}}{14}$，

所以△ ABC 的面积 $S = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{1}{2}\times 7\times 8\times\dfrac{3\sqrt{3}}{14} = 6\sqrt{3}$ ………………13 分

17.（本小题共 15 分）

证明：（I）因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD = AD$，

$PA\perp AD$，

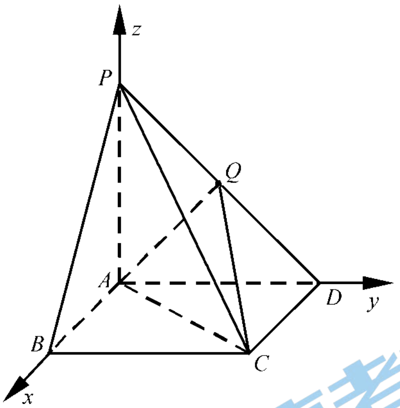
$PA\subset$ 平面 PAD，

所以 $PA\perp$ 平面 $ABCD$ ………………4 分

（II）因为底面 $ABCD$ 为正方形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 AB，AD，AP 两两互相垂直.

如图，建立空间直角坐标系 $A-xyz$.



因为 $PA = AB = 2$，

所以 $A(0,0,0)$，$P(0,0,2)$，$C(2,2,0)$，$Q(0,1,1)$，

$\overrightarrow{AC} = (2,2,0)$，$\overrightarrow{AQ} = (0,1,1)$.

因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $\overrightarrow{AP} = (0,0,2)$ 为平面 $ABCD$ 的一个法向量.

设平面 ACQ 的一个法向量为 $\boldsymbol{n} = (x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AQ} = 0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+2y = 0,\\ y+z = 0.\end{cases}$

令 $x = 1$，则 $y = -1, z = 1$.

于是 $\boldsymbol{n} = (1,-1,1)$.

设平面 ACQ 与平面 $ABCD$ 的夹角为 θ，

所以 $\cos\theta = |\cos<\boldsymbol{n},\overrightarrow{AP}>| = \dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AP}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{AP}|} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

即平面 ACQ 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. ………………11 分

（III）由（II）知，平面 ACQ 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (1,-1,1)$，$\overrightarrow{PB} = (2,0,-2)$.

因为 $\overrightarrow{PB}\cdot\boldsymbol{n}=0$，且 $PB\not\subset$ 平面 ACQ，

所以 PB // 平面 ACQ.

所以点 P 到平面 ACQ 的距离即为直线 PB 到平面 ACQ 的距离.

因为 $\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$，

所以点 P 到平面 ACQ 的距离为 $\dfrac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$，

即直线 PB 到平面 ACQ 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$…………………15 分

18.（本小题共 14 分）

解：（I）由题意知，样本中学生共有 100+100+100=300 人，

其中体验戏曲活动的学生共 20+80+75=175 人，

设事件 A 为“从样本学生中随机选取 1 名学生，这名学生体验戏曲活动”，

故所求概率为 $P(A)=\dfrac{175}{300}=\dfrac{7}{12}$ …………………4 分

（II）由题意知，体验人数超过该校学生人数 50%的传统艺术活动有 3 项，

X 的所有可能值为 1，2，3.

$P(X=1)=\dfrac{C_3^1\cdot C_2^2}{C_5^3}=\dfrac{3}{10}$，

$P(X=2)=\dfrac{C_3^2\cdot C_2^1}{C_5^3}=\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$，

$P(X=3)=\dfrac{C_3^3}{C_5^3}=\dfrac{1}{10}$.

所以 X 的分布列为

X	1	2	3
P	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{1}{10}$

故 X 的数学期望 $E(X)=1\times\dfrac{3}{10}+2\times\dfrac{3}{5}+3\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{9}{5}$…………………11 分

（III）$p_1<p_5<p_4<p_3<p_2$ …………………14 分

19.（本小题共 14 分）

解：（I）当 $a=1$ 时，因为 $f(x)=x^2-\ln x$，

所以 $f'(x)=2x-\dfrac{1}{x}$，$f'(1)=1$.

又因为 $f(1)=1$，

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y-1=x-1$.

即 $x-y=0$…………………4 分

（II）因为 $f(x)=x^2-a\ln x(a\in\mathbf{R}$ 且 $a\neq 0)$，

所以 $f'(x)=2x-\dfrac{a}{x}=\dfrac{2x^2-a}{x}$，$x\in(0,+\infty)$.

当 $a<0$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

取 $x=e^{\frac{1}{a}}$，则 $f(e^{\frac{1}{a}})=(e^{\frac{1}{a}})^2-1<0$，不符合题意.

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)=0$，解得 $x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ 或 $x=-\sqrt{\dfrac{a}{2}}$（舍）.

当 $x\in(0,\sqrt{\dfrac{a}{2}})$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(0,\sqrt{\dfrac{a}{2}})$ 上单调递减.

当 $x\in(\sqrt{\dfrac{a}{2}},+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在区间 $(\sqrt{\dfrac{a}{2}},+\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $f(\sqrt{\dfrac{a}{2}})=\dfrac{a}{2}-a\ln\sqrt{\dfrac{a}{2}}=\dfrac{a}{2}(1-\ln\dfrac{a}{2})$.

若 $f(x)\geq 0$ 恒成立，只需 $f(\sqrt{\dfrac{a}{2}})\geq 0$，解得 $0<a\leq 2e$.

综上可知，a 的取值范围是 $(0,2e]$……………………14 分

20.（本小题共 15 分）

解：（I）由题意得 $\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\\ \dfrac{2}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1,\end{cases}$

解得 $a^2=4$，$b^2=2$.

所以椭圆 C 的方程是 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$……………………5 分

（II）由题意知，直线 l 的斜率存在.

设直线 l 的方程为 $y=k(x-4)$（$k\neq 0$），$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

由 $\begin{cases}y=k(x-4),\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\end{cases}$ 得 $(2k^2+1)x^2-16k^2x+32k^2-4=0$.

则 $x_1+x_2=\dfrac{16k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{32k^2-4}{2k^2+1}$.

依题意 $\Delta=(-16k^2)^2-4(2k^2+1)(32k^2-4)>0$，解得 $k\in(-\dfrac{\sqrt{6}}{6},0)\cup(0,\dfrac{\sqrt{6}}{6})$.

因为点 A 的坐标为 $(2,0)$，所以直线 AM 的方程为 $y=\dfrac{y_1}{x_1-2}(x-2)$.

令 $x=4$，得点 P 的纵坐标为 $y=\dfrac{2y_1}{x_1-2}=\dfrac{2k(x_1-4)}{x_1-2}$，

所以 $|DP|=2|k|\left|\dfrac{x_1-4}{x_1-2}\right|$.

同理，可得 $|DQ|=2|k|\left|\dfrac{x_2-4}{x_2-2}\right|$.

于是 $|DP|\cdot|DQ|=4k^2\left|\dfrac{(x_1-4)(x_2-4)}{(x_1-2)(x_2-2)}\right|$

$=4k^2\left|\dfrac{x_1x_2-4(x_1+x_2)+16}{x_1x_2-2(x_1+x_2)+4}\right|$

$=4k^2\left|\dfrac{\dfrac{32k^2-4}{2k^2+1}-4\times\dfrac{16k^2}{2k^2+1}+16}{\dfrac{32k^2-4}{2k^2+1}-2\times\dfrac{16k^2}{2k^2+1}+4}\right|$

$=4k^2\left|\dfrac{32k^2-4-64k^2+16(2k^2+1)}{32k^2-4-32k^2+4(2k^2+1)}\right|$

$=4k^2\times\dfrac{12}{8k^2}$

$=6$.

所以 $|DP|\cdot|DQ|$ 为定值 6……………………15 分

21．（本小题共 14 分）

解：（I）①因为 $|2-4|>|4-3|$，所以该数列不是 M 数列；

②因为 $|4-2|<|2-8|<|8-1|$，所以该数列是 M 数列……………………4 分

（II）必要性：

若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，设公差为 d，

则 $b_m=|a_m-a_{m+1}|=|d|$.

所以数列 $\{b_m\}$ 是常数列.

充分性：

若数列 $\{b_m\}$ 是常数列，

则 $b_m=b_{m+1}(m=1,2,\cdots,n-2)$，即 $|a_m-a_{m+1}|=|a_{m+1}-a_{m+2}|(m=1,2,\cdots,n-2)$.

所以 $a_m-a_{m+1}=a_{m+1}-a_{m+2}$ 或 $a_m-a_{m+1}=-(a_{m+1}-a_{m+2})$.

因为数列 $\{a_n\}$ 的各项互不相同，

所以 $a_m-a_{m+1}=a_{m+1}-a_{m+2}$.

所以数列 $\{a_n\}$ 是等差数列……………………8 分

（III）当 $m=3$ 时，因为 $|a_i-a_{i+1}|\le 2(i=1,2)$，所以 $|a_1-a_2|+|a_2-a_3|<5$，不符合题意；

当 $m=4$ 时，数列为 3,2,4,1.此时 $|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-a_4|=6$，符合题意；

当 $m=5$ 时，数列为 2,3,4,5,1.此时 $|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-a_4|+|a_4-a_5|=7$，符合题意；

下证当 $m\ge 6$ 时，不存在 m 满足题意.

令 $b_k=|a_k-a_{k+1}|(k=1,2,\cdots,m-1)$，

则 $1\le b_1\le b_2\le\cdots\le b_{m-1}$，且 $\sum\limits_{k=1}^{m-1}b_k=m+2$，

所以 b_k 有以下三种可能：

①$b_k=\begin{cases}1,(k=1,2,\cdots,m-2)\\4,(k=m-1)\end{cases}$；②$b_k=\begin{cases}1,(k=1,2,\cdots,m-3)\\2,(k=m-2)\\3,(k=m-1)\end{cases}$；③$b_k=\begin{cases}1,(k=1,2,\cdots,m-4)\\2,(k=m-3,m-2,m-1)\end{cases}$.

当 $b_k=\begin{cases}1,(k=1,2,\cdots,m-2)\\4,(k=m-1)\end{cases}$ 时，因为 $b_1=b_2=\cdots=b_{m-2}$，

由（II）知：$a_1,a_2,\cdots,a_{m-1}$ 是公差为 1（或−1）的等差数列.

当公差为 1 时，由 $b_{m-1}=4$ 得 $a_m=a_{m-1}+4$ 或 $a_m=a_{m-1}-4$，

所以 $a_m=a_{m-1}+4=a_1+m+2>m$ 或 $a_m=a_{m-1}-4=a_{m-5}$，与已知矛盾.

当公差为−1 时，同理得出与已知矛盾.

所以当 $b_k=\begin{cases}1,(k=1,2,\cdots,m-2)\\4,(k=m-1)\end{cases}$ 时，不存在 m 满足题意.

其它情况同理.

综上可知，m 的所有取值为 4 或 5……………………14 分

（若用其他方法解题，请酌情给分）