北京市第一七一中学高三第三次月考数学试卷

一、选择题

1. 已知集合 $A=\left\{x\in Z\middle|x^2-4\le 0\right\}$，$B=\left\{x\middle||x|\le 1\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\left\{x\middle|-1\le x\le 1\right\}$　　B. $\left\{x\middle|-2\le x\le 2\right\}$　　C. $\{-1,0,1\}$　　D. $\{-2,-1,0,1,2\}$

2. 给定函数① $y=x^{\frac{1}{2}}$；② $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$；③ $y=|x-1|$；④ $y=2^{x+1}$. 其中在区间 $(0,1)$ 上单调递减的函数序号是（　　）

A. ①④　　B. ①②　　C. ②③　　D. ③④

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 -1 的等差数列，且 a_4 是 a_2 与 a_5 的等比中项，S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 $S_6=$（　　）

A. -90　　B. -45　　C. 0　　D. 15

4. 设 a,b,c 为单位向量，且 $a\cdot b\ne 0$，则 $c\cdot(a+b)$ 的最大值为（　　）

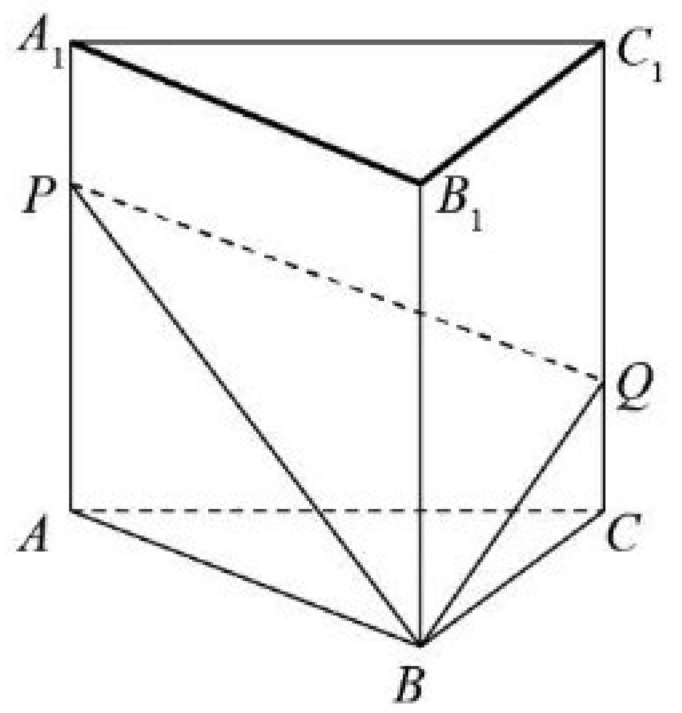
A. 2　　B. $\sqrt{2}$　　C. 1　　D. 0

5. 设 α,β 是两个不同的平面，m 是直线且 $m\subset\alpha$．“$m/\!/\beta$”是“$\alpha/\!/\beta$”的（　　）

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 如图，已知直棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$，（晓观数学）点 P、Q 分别在侧棱 AA_1 和 CC_1 上，$AP=C_1Q$．则平面 BPQ 把三棱柱分成两部分的体积之比为（　　）



A. $2:1$　　B. $3:1$　　C. $3:2$　　D. $4:3$

7. 已知 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\frac{1}{t}$，$\left|\overrightarrow{AC}\right|=t$，若点 P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点，且 $\overrightarrow{AP}=\frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}+\frac{4\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|}$，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}$ 的最大值等于（　　）

A. 13　　B. 15　　C. 19　　D. 21

8. 三位专家为 10 幅作品投票，每位专家分别都投出了 5 票，并且每幅作品都有专家投票，如果三位专家都投票的作品列为 A 等，两位专家投票的列为 B 等，仅有一位专家投票的作品列为 C 等，则下列说法正确的是（　　）

A. A 等和 B 等共 6 幅　　B. B 等和 C 等共 7 幅

C. A 等最多有 5 幅　　D. A 等比 C 等少 5 幅

二、填空题

9. 命题“$\exists x \in R$，$x^2-3x+4>0$”的否定是______________.

10. 已知$\triangle ABC$的面积为$10\sqrt{3}$，$\cos C=\frac{1}{7}$，$b-a=2$，则$c=$__________.

11. 已知$\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{3}{5}$，那么$\sin 2x=$________________.

12. 已知函数$f(x)=xe^x$与函数$g(x)=\frac{1}{2}x^2+ax$的图象在点$(0,0)$处有相同的切线，则a的值为

____________.

13. 某班试用电子投票系统选举班干部候选人，全班k名同学都有选举权和被选举权，他们的编号分别为1，2，…，k.规定：同意按“1”，不同意(含弃权)按“0”，令

$$a_{ij}=\begin{cases}1,\text{第}i\text{号同学同意第}j\text{号同学当选}\\0,\text{第}i\text{号同学不同意第}j\text{号同学当选}\end{cases}$$

其中$i=1,2,\cdots,k$，且$j=1,2,\cdots,k$，则班内同时同意1，2号同学当选的人数可以用含a_k式子表示为

________________.

14. 设$x\in R$，$[x]$表示不超过x的最大整数，若存在实数t，使得$[t]=1$，$[t^2]=1$，…，$[t^n]=n$同时成立，则正整数n的最大值是________________.

三、解答题

15. 某同学用“五点法”画函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$在某一个周期内的图象时，列表并填入了部分数据，如下表：

$\omega x+\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$	
$A\sin(\omega x+\varphi)$	0	5		-5	0

(1) 请将上表数据补充完整，并直接写出函数$f(x)$的解析式；

(2) 将$y=f(x)$图象上所有点向左平行移动$\theta(\theta>0)$个单位长度，（晓观数学）得到$y=g(x)$的图象，若$y=g(x)$图象的一个对称中心为$\left(\frac{5\pi}{12},0\right)$，求$\theta$的最小值.

16. 设$\{a_n\}$是一个公比为$q(q>0,q\neq 1)$的等比数列，且它的前 4 项和$S_4=15$，$4a_1$，$3a_2$，$2a_1$成等差数列.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

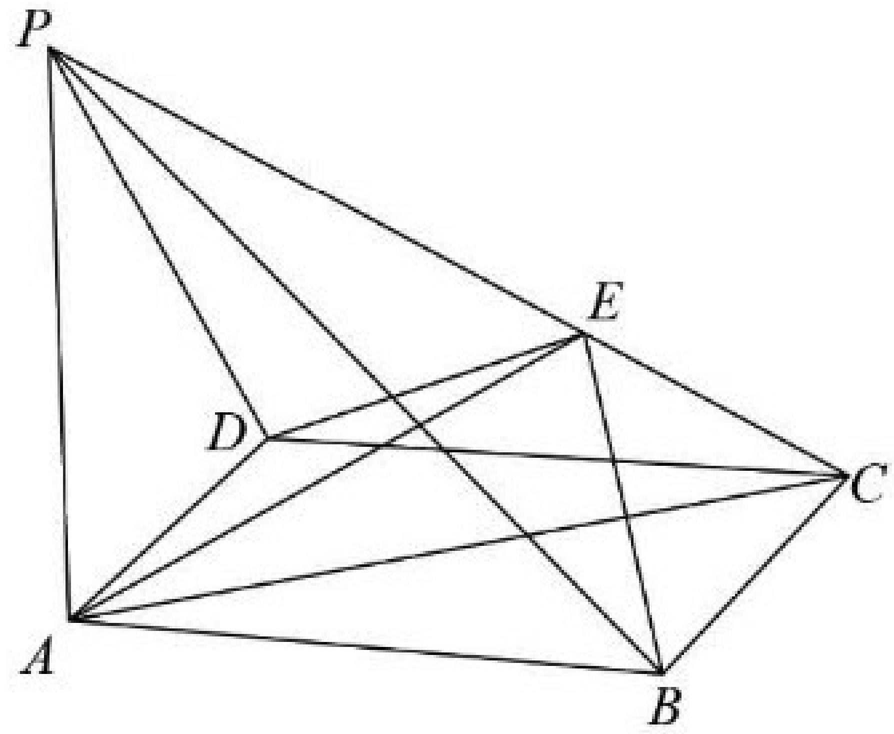
(2) 令$b_n=a_n+2n(n=1,2,3,\cdots)$，求数列$\{b_n\}$的前$n$项和.

17. 如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$为正方形. $PA\perp$平面$ABCD$，$PA=AB=2$，E为PC上异于P,C的点.

(1) 求证：平面$PAC\perp$平面BDE；

(2) 当BE与平面PAC所成角为$45°$时，求CE的长；

(3) 当$BE\perp PC$时，求二面角$A-BE-D$的余弦值.



18. 平面直角坐标系xOy中，椭圆$C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率是$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，（晓观数学）抛物线$E:x^2=2y$的焦点$F$是$C$的一个顶点.

(1) 求椭圆C的方程；

(2) 设P是E上的动点，且位于第一象限，E在点P处的切线l与C交于不同的两点A、B，线段AB的中点为O，直线OD与过P且垂直于x轴的直线交于点M.

①求证：点M在定直线上；

②直线l与y轴交于点G，记$\triangle PFG$的面积为S_1，$\triangle PDM$的面积为S_2，求$\dfrac{S_1}{S_2}$的最大值及取得最大值时点P的坐标.

19. 已知 $a \geq 3$，函数 $F(x)=\min\left\{2|x-1|, x^2-2ax+4a-2\right\}$，其中 $\min\{p,q\}=\begin{cases}p, p \leq q\\ q, p>q\end{cases}$.

(1) 求使得等式 $F(x)=x^2-2ax+4a-2$ 成立的 x 的取值范围.

(2)①求 $F(x)$ 的最小值 $m(a)$；

②求 $F(x)$ 在区间 $[0,6]$ 上的最大值 $M(a)$.

20. 对于数列 $A: a_1, a_2, \cdots, a_n$，若满足 $a_i \in \{0,1\}(i=1,2,3,\cdots,n)$，则称数列 A 为"$0-1$数列"．（晓观数学）定义变换 T，T 将"$0-1$数列"A 中原有的每个 1 都变成 0，1. 原有的每个 0 都变成 1，0. 例如 $A:1,0,1$，则 $T(A):0,1,1,0,0,1$. 设 A_0 是"$0-1$数列"．令 $A_k=T(A_{k-1})$，$k=1,2,3,\cdots$，

(1) 若数列 $A_2:1,0,0,1,0,1,1,0,1,0,0,1$.求数列 A_1，A_0；

(2) 若数列 A_0 共有 10 项，则数列 A_2 中连续两项相等的数对至少有多少对？请说明理由.

(3) 若 A_0 为 0，1，记数列 A_k 中连续两项都是 0 的数对个数为 l_k，$k=1,2,3,\cdots$，求 l_k 关于 k 的表达式.