数 学 试 题

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟，满分 150 分

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.已知集合 $A=\{x|2<x<8\}$，$B=\{x|x^2-5x-6\leqslant 0\}$，则 $A\cap B=$

A.$(-1,2)$　　B.$(-1,2)\cup(6,8)$　　C.$[-1,8)$　　D.$(2,6]$

2.若复数 $z=\dfrac{2i}{1+i}$，则 z 的虚部是

A.i　　B.2i　　C.1　　D.2

3.已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，a_5，a_7 是关于 x 的方程 $x^2-4x+k=0$ 的两根，则 $S_{11}=$

A.22　　B.24　　C.26　　D.28

4.已知 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，若 $15\cos 2\theta-14\cos\theta+11=0$，则 $\tan\theta=$

A.$\dfrac{2}{3}$　　B.$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　C.$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　D.$\dfrac{1}{3}$

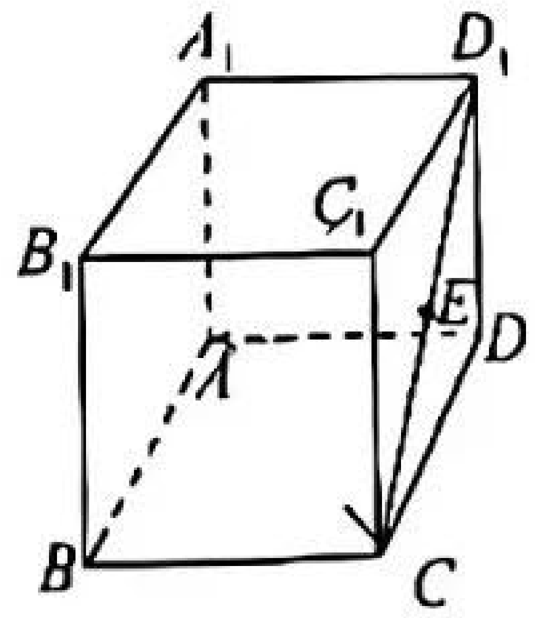
5.若 $(3x-5)^7=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_7(x-1)^7$，则 $\sum_{i=1}^{7}a_i=$

A.257　　B.129　　C.-65　　D.-33

6.教育储蓄是指个人按国家有关规定在指定银行开户、存入规定数额资金、用于教育目的的专项储蓄，是一种专门为学生支付非义务教育所需教育金的专项储蓄，储蓄存款享受免征利息税的政策.若你的父母在你 12 岁生日当天向你的银行教育储蓄账户存入 2 000 元，并且每年在你生日当天存入 2 000 元，连续存 6 年，在你十八岁生日当天一次性取出，则一次性取出的金额总数为(假设教育储蓄存款的年利率为 5%，取 $1.05^7=1.41$)

A.14 400 元　　B.15 400 元　　C.16 200 元　　D.18 500 元

7.在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 CD_1 上的动点，则 AE 与平面 AA_1B_1B 所成角的正切值不可能为



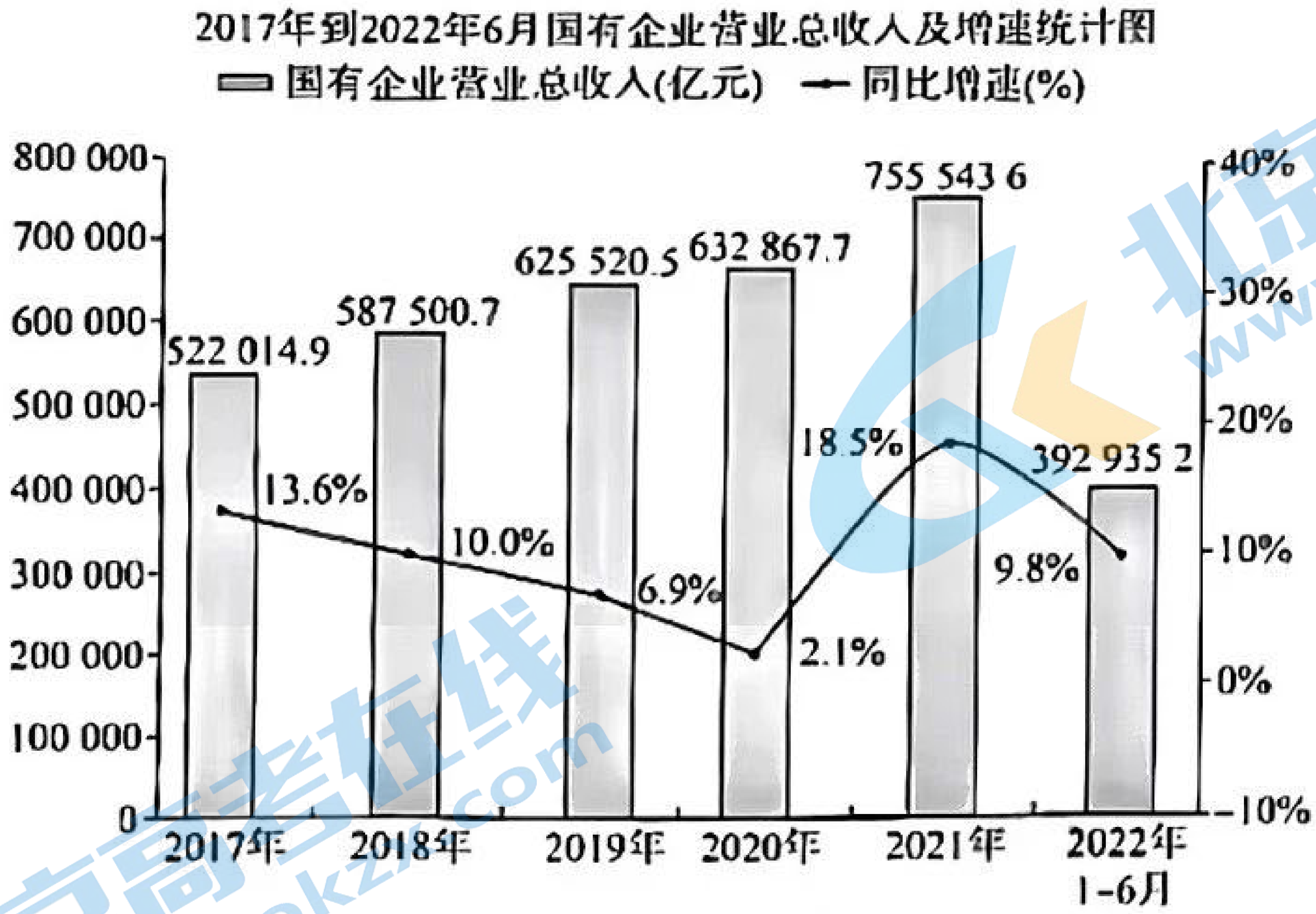
A.1　　B.$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　C.$\sqrt{2}$　　D.$\sqrt{3}$

8.若 $a=\ln 17$，$b=3$，$c=e^{\sqrt{2}}$，则

A.$b<a<c$　　B.$c<a<b$　　C.$a<b<c$　　D.$a<c<b$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9.下图反映 2017 年到 2022 年 6 月我国国有企业营业总收入及增速统计情况：



根据图中的信息，下列说法错误的是

A.2017—2022 年我国国有企业营业总收入逐年增加

B.2017—2022 年我国国有企业营业总收入逐年下降

C.2017—2021 年中，我国国有企业营业总收入增速最快的是 2021 年

D.2017—2021 年我国国有企业营业总收入的平均数大于 630 000 亿元

10.已知函数 $f(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin x$，则下列结论正确的是

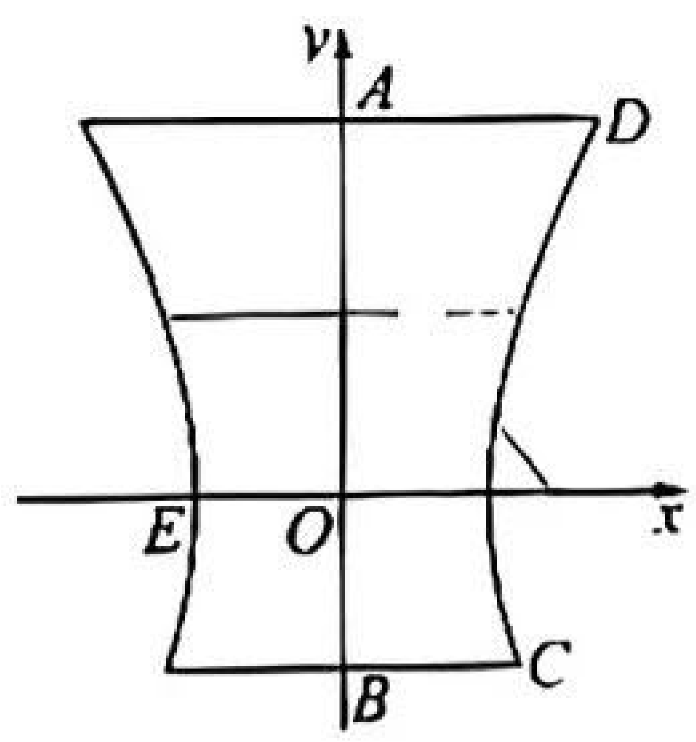
A.$f(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$对称

B.$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$上单调递减

C.将 $f(x)$的图象先向右平移$\frac{5\pi}{12}$个单位长度，再向上平移$\frac{\sqrt{3}}{2}$个单位长度后得到的函数为偶函数

D.$f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

11.如图是唐代伎乐纹八棱金杯，其主体纹饰为八位手执乐器的乐工，分布于八个棱面，乐工手执竖箜篌、曲项琵琶、排箫等，乐伎的服饰和发式则具有当时粟特特色，故此，金杯无论造型还是装饰风格都有着浓郁的域外特征，是唐代中外文化交流的见证.该杯的主体部分可近似看作是双曲线 Γ：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$与直线 $x=0,y=-3$，



$y=6$ 围成的曲边四边形 $ABCD$ 绕 y 轴旋转一周得到的几何体，若该金杯主体部分的上口

外直径为 $2\sqrt{14}$，下底外直径为 $2\sqrt{5}$，双曲线 Γ 与 x 轴交于 E，F 两点，则

A.Γ 的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$

B.Γ 的离心率 $e=\frac{\sqrt{70}}{5}$

C.Γ 的焦点到渐近线的距离为 $\sqrt{6}$

D.若 $P(m,n)$ 为 Γ 上任意一点，则 $\frac{1}{2m^2}-\frac{6}{n^2}$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$

12.已知定义域为 R 的函数 $f(x)$ 在 $[-1,0]$ 上单调递增，$f(1+x)=f(1-x)$，且图象关于 $(2,0)$ 对称，则下列关于 $f(x)$ 的说法正确的是

A.$f(0)=f(2)$

B.周期 $T=2$

C.在 $(1,2]$ 上单调递减

D.满足 $f(2\,021)>f(2\,022)>f(2\,023)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,3)$，$\boldsymbol{b}=(t,-1)$，若 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=$________.

14.有甲、乙两个加工厂加工同一型号零件，甲厂加工的次品率为 6%，乙厂加工的次品率为 5%，已知甲乙两个加工厂加工的零件数分别占当地市场总数的 45%，55%，现从当地市场上任意买一件这种型号的零件，则买到的零件是次品，且是甲厂加工的概率为________.

15.写出与圆 $x^2+y^2=1$ 和抛物线 $x^2=\frac{8}{3}y$ 都相切的一条直线的方程________.

16.已知 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)=ax^3+e^x$ 的唯一极小值，则实数 a 的取值范围是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.(10 分)已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，公比 $q>1$，若 $a_2=8$，$S_3=28$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)证明：$a_n^2>S_n+7$.

18.(12 分)在 $\triangle ABC$ 中，点 D 为线段 BC 的四等分点且靠近点 B，$\angle BAD$ 与 $\angle BAC$ 互补.

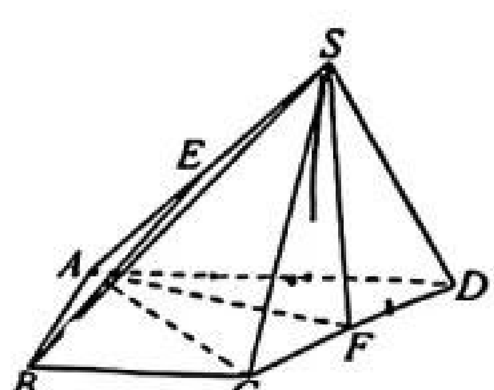
(1)求 $\frac{AC}{AD}$ 的值；

(2)若 $\angle BAD=30°$，$AB=4$，求 AD 的长.

19.(12 分)如图，在四棱锥 $S-ABCD$ 中，平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$，$AD/\!/BC$，$AB\perp AD$，$AD=2AB=2BC$，$AS=DS$，点 E，F 分别为 AS，CD 的中点.

(1)证明：$BE/\!/$ 平面 SCD；

(2)若 $AB=1$，$AS=\sqrt{3}$，求二面角 $C-AS-F$ 的余弦值.



20.(12 分)2022 年卡塔尔世界杯足球赛于 11 月 21 日至 12 月 18 日在卡塔尔境内举办，这是第二十二届世界杯足球赛，是历史上首次在卡塔尔和中东国家境内举行，也是继 2002 年韩日世界杯之后时隔二十年第二次在亚洲举行的世界杯足球赛，备受瞩目，一时间掀起了国内外的足球热潮.某机构为了了解喜爱足球运动是否与性别有关，随机抽取了男性和女性各 120 名观众进行调查，统计数据如下：

	喜爱足球运动	不喜爱足球运动
男性	80	40
女性	60	60

(1)根据上表说明，能否在犯错误概率不超过 0.01 的前提下认为喜爱足球运动与性别有关?

(2)现从参与调查且喜爱足球运动的观众中，采用按性别分层抽样的方法，选取 7 人进行有奖竞答.

①求男、女性观众各选取多少人?

②若从这 7 人中随机抽取 4 人进行本届世界杯赛事集锦分享，求抽到男生人数 X 的分布列和数学期望 $E(X)$.

附：$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，(其中 $n=a+b+c+d$).

a	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

21.(12 分)已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦距为 2，且经过点 $A(0,\sqrt{3})$.

(1)求 C 的方程；

(2)若直线 $l:y=kx+m$ 与 C 相交于不同于 A 的 P,Q 两点，PQ 的中点为 M，当$\angle PMA=2\angle PQA$ 时，求 m 的值.

22.(12 分)已知函数 $f(x)=a\ln(x+1)-2e^x+\sin x+2, a\in\mathbf{R}$.

(1)若 $a=1$，求 $f(x)$在$(0,f(0))$处的切线方程；

(2)若 $f(x)\leqslant 0$ 在$[0,\pi]$上恒成立，求 a 的取值范围.

2023届高三开年摸底联考

数学参考答案及评分意见

1.D 【解析】因为 $B=\{x|x^2-5x-6\leqslant 0\}=\{x|-1\leqslant x\leqslant 6\}$，所以 $A\cap B=(2,6]$.故选 D.

2.C 【解析】因为 $z=\frac{2i}{1+i}=\frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=1+i$，所以 z 的虚部是 1.故选 C.

3.A 【解析】因为 a_5,a_7 是关于 x 的方程 $x^2-4x+k=0$ 的两根，所以 $a_5+a_7=4$，$S_{11}=\frac{11(a_1+a_{11})}{2}=\frac{11(a_5+a_7)}{2}=22$.故选 A.

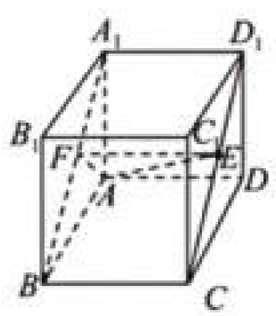
4.C 【解析】因为 $15\cos 2\theta-14\cos\theta+11=15(2\cos^2\theta-1)-14\cos\theta+11=2(3\cos\theta-2)(5\cos\theta+1)=0$，因为 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

所以 $\cos\theta=\frac{2}{3}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\tan\theta=\frac{\sqrt{5}}{2}$.故选 C.

5.B 【解析】令 $x=2$，则 $(3\times 2-5)^7=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_7=1$，令 $x=1$，则 $(3\times 1-5)^7=a_0=-2^7$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{7}a_i=1-(-2^7)=129$.故选 B.

6.A 【解析】金额总数为 $2\,000\times(1+5\%)^6+2\,000\times(1+5\%)^5+\cdots+2\,000\times(1+5\%)^1=\frac{2\,000\times 1.05^6\times\left[1-\left(\frac{1}{1.05}\right)^6\right]}{1-\frac{1}{1.05}}=\frac{2\,000\times(1.05^7-1.05)}{0.05}\approx 14\,400$ 元.故选 A.

7.D 【解析】如图，在 A_1B_1 上取点 F，使得 $A_1F=D_1E$，连接 EF，易证四边形 $FBCE$ 为平行四边形，则 $EF=BC=2$.因为 $BC\perp$ 平面 AA_1B_1B，$BC/\!/EF$，所以 $EF\perp$ 平面 AA_1B_1B，所以 AE 与平面 AA_1B_1B 所成角为 $\alpha=\angle EAF$，$\tan\alpha=\frac{EF}{AF}=\frac{2}{AF}$，而 $AF\in[\sqrt{2},2]$，所以 $\tan\alpha\in[1,\sqrt{2}]$，因为 $\sqrt{3}\notin[1,\sqrt{2}]$，故选 D.



8.C 【解析】因为 $\ln 17<\ln e^3=3$，所以 $a<b$；令 $f(x)=e^x-x^2-1$，$f'(x)=e^x-2x$，令 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=e^x-2$，令 $g'(x)=0$ 解得 $x=\ln 2$，所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上单调递减，在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f'(x)\geqslant f'(\ln 2)=2-2\ln 2>0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，$f(\sqrt{2})=e^{\sqrt{2}}-3>f(0)=0$，即 $e^{\sqrt{2}}>3$，所以 $c>b$，综上：$a<b<c$.故选 C.

9.ABD 【解析】由图知，2022 年下半年我国国有企业营业总收入及增速未知，故 A，B 错误；2017—2021 年中，我国国有企业营业总收入增速最快的是 2021 年，为 18.5%，C 正确；2017—2021 年我国国有企业营业总收入的平均数小于 630 000 亿元，D 错误.故选 ABD.

10.BCD 【解析】$f(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin x=(\cos x-\sqrt{3}\sin x)\cdot\sin x=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}$，$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，故 $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 对称，A 错误；当 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$2x+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{5\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right)$，而函数 $y=\sin x$ 在 $\left(\frac{5\pi}{6},\frac{4\pi}{3}\right)$ 上单调递减，B 正确；将 $f(x)$ 的图象先向右平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位长度，再向上平移 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 个单位长度后得到 $g(x)=\sin\left[2\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{3}\right]-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos 2x$ 为偶函数，C 正确；$f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\sin\left[2\left(-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{3}\right]-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=$

$\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin\frac{5\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$，所以 $f\left(-\frac{\pi}{12}\right)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)$，故选 BCD.

11.AC 【解析】由题意知 $D(\sqrt{14},6)$，$C(\sqrt{5},-3)$，代入 Γ 的方程解得 $a^2=2$，$b^2=6$，所以 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{6}=1$. A 正确；因为 $a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{6}$，$c=2\sqrt{2}$，所以离心率 $e=\frac{c}{a}=2$. B 错误；Γ 的焦点为 $(\pm2\sqrt{2},0)$，渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$，所以焦点到渐近线的距离为 $\frac{|2\sqrt{6}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}}=\sqrt{6}$. C 正确：$\left(\frac{1}{2m^2}-\frac{6}{n^2}\right)\left(\frac{m^2}{2}-\frac{n^2}{6}\right)=\frac{5}{4}-\left(\frac{n^2}{12m^2}+\frac{3m^2}{n^2}\right)\leqslant\frac{5}{4}-2\sqrt{\frac{n^2}{12m^2}\cdot\frac{3m^2}{n^2}}=\frac{1}{4}$，当且仅当 $\frac{n^2}{12m^2}=\frac{3m^2}{n^2}$，即 $n=\pm\sqrt{6}m$ 时取等号，但将 $n=\pm\sqrt{6}m$ 代入 Γ 的方程后，无解，D 错误. 故选 AC. 来源：高三答案公众号

12.ACD 【解析】由 $f(1+x)=f(1-x)$ 知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(0)=f(2)$，A 正确；$f(2+x)=f(-x)$，又图象关于 $(2,0)$ 对称，即 $f(2+x)=-f(2-x)$，故 $f(4+x)=-f(-x)$，所以 $-f(2+x)=f(4+x)$，即 $-f(x)=f(2+x)$，所以 $f(x)=f(x+4)$，4 为 $f(x)$ 的周期，B 错误；因为 $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上单调递增，$T=4$，所以 $f(x)$ 在 $(3,4]$ 上单调递增，又图象关于 $(2,0)$ 对称，所以 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递增，因为图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(x)$ 在 $(1,2]$ 上单调递减，C 正确；根据周期性，$f(2\,021)=f(1)$，$f(2\,022)=f(2)$，$f(2\,023)=f(3)$，因为图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(2)=f(0)$，因为周期 $T=4$，所以 $f(3)=f(-1)$，结合 $f(x)$ 在 $(1,2]$ 上单调递减，$(-1,0]$ 上单调递增，故 $f(3)=f(-1)<f(0)=f(2)<f(1)$，即 $f(2\,021)>f(2\,022)>f(2\,023)$，D 正确. 故选 ACD.

13.$\sqrt{26}$ 【解析】由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即 $2t-3=0$，解得 $t=\frac{3}{2}$，所以 $\boldsymbol{b}=\left(\frac{3}{2},-1\right)$，$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-1,5)$，$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=\sqrt{26}$，故答案为 $\sqrt{26}$.

14.$\frac{54}{109}$ 【解析】记 A_1 为事件"零件为甲厂加工"，A_2 为事件"零件为乙厂加工"，B 为事件"买一个零件为次品"，

则 $P(A_1)=0.45$，$P(A_2)=0.55$，

所以 $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)=0.45\times0.06+0.55\times0.05=0.054\,5$，

所以 $P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.45\times0.06}{0.054\,5}=\frac{54}{109}$，故答案为 $\frac{54}{109}$.

15.$\sqrt{3}x-y-2=0$ 或 $\sqrt{3}x+y+2=0$（填一个即可） 【解析】设公切线与抛物线 $x^2=\frac{8}{3}y$ 切于点 $M\left(x_0,\frac{3}{8}x_0^2\right)$，而 $y'=\frac{3}{4}x$，所以 M 处的公切线方程为 $y-\frac{3}{8}x_0^2=\frac{3}{4}x_0(x-x_0)$，即 $6x_0x-8y-3x_0^2=0$，结合公切线与圆 $x^2+y^2=1$ 相切得 $d=\frac{3x_0^2}{\sqrt{(6x_0)^2+8^2}}=r=1$，解得 $x_0=\pm\frac{4\sqrt{3}}{3}$，所以公切线的方程为 $\sqrt{3}x-y-2=0$ 或 $\sqrt{3}x+y+2=0$，故答案为 $\sqrt{3}x-y-2=0$ 或 $\sqrt{3}x+y+2=0$（填一个即可）.

16.$\left[-\frac{e^2}{12},0\right)$ 【解析】$f'(x)=3ax^2+e^x$，当 $a\geqslant0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，无极值点；当 $a<0$ 时，令 $f'(x)=0$ 知 $e^x=-3ax^2$，易知函数 $y_1=e^x$ 和 $y_2=-3ax^2$ 在 $(-\infty,0)$ 必有一交点，在交点左侧，有 $e^x<-3ax^2$，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，在交点右侧，$e^x>-3ax^2$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，因为 $f(x)$ 的极小值唯一，所以 $f'(x)\geqslant0$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立，设 $y_1=e^x$ 和 $y_2=-3ax^2$ 恰好切于点 $P(m,e^m)$，则有 $\begin{cases}e^m=-6am,\\e^m=-3am^2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=2,\\a=-\frac{e^2}{12},\end{cases}$ 此时 a 取到最小值，所以 $a\in\left[-\frac{e^2}{12},0\right)$，故答案为 $\left[-\frac{e^2}{12},0\right)$.

17.**解**：(1)由 $a_2=8$，$S_3=28$ 得 $\begin{cases}a_1q=8,\\a_1+a_1q+a_1q^2=28,\end{cases}$ 结合 $q>1$ 解得 $\begin{cases}a_1=4,\\q=2.\end{cases}$ ………………………………………… 3 分

所以 $a_n=a_1q^{n-1}=2^{n+1}$. ………………………………………………………………………… 5 分

(2) $S_n=\dfrac{4(1-2^n)}{1-2}=2\cdot 2^{n+1}-4$, ………………………………………………………………………… 7 分

所以 $a_n^2-S_n-7=(2^{n+1})^2-2\cdot 2^{n+1}-3=(2^{n+1}-3)(2^{n+1}+1)>0$, ………………………… 9 分

所以 $a_n^2>S_n+7$. ………………………………………………………………………… 10 分

18.解:(1)因为 $\angle BAD$ 与 $\angle BAC$ 互补,

所以 $\sin\angle BAD=\sin\angle BAC$, ………………………………………………………………………… 1 分

在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理得 $\dfrac{BC}{\sin\angle BAC}=\dfrac{AC}{\sin B}$,在 $\triangle BAD$ 中,由正弦定理得 $\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}=\dfrac{AD}{\sin B}$, ………………… 3 分

所以 $\dfrac{BC}{BD}=\dfrac{AC}{AD}$. ………………………………………………………………………… 4 分

因为点 D 为线段 BC 的四等分点且靠近点 B,

所以 $\dfrac{BC}{BD}=4$,所以 $\dfrac{AC}{AD}=4$. ………………………………………………………………………… 6 分

(2)因为 $\angle BAD=30^\circ$,

所以 $\angle BAC=150^\circ$. ………………………………………………………………………… 7 分

设 $AD=x$,由(1)知 $AC=4x$,

在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC=16x^2+16\sqrt{3}x+16$, ………………… 8 分

在 $\triangle BAD$ 中,由余弦定理得 $BD^2=AB^2+AD^2-2AB\cdot AD\cdot\cos\angle BAD=x^2-4\sqrt{3}x+16$, ………………… 9 分

因为 $BC=4BD$,即 $BC^2=16BD^2$,

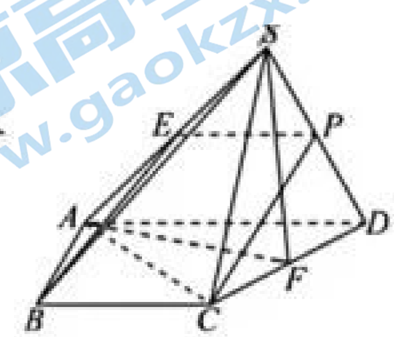
所以 $16x^2+16\sqrt{3}x+16=16(x^2-4\sqrt{3}x+16)$,解得 $x=\sqrt{3}$, ………………………………………… 11 分

所以 AD 的长为 $\sqrt{3}$. ………………………………………………………………………… 12 分

19.解:(1)如图,取 DS 的中点 P,连接 EP,PC.

因为 E,P 分别为 AS,DS 的中点,

所以 $EP\parallel AD$,$EP=\dfrac{1}{2}AD$. ………………………………………………………………………… 1 分



因为 $AD\parallel BC$,$AD=2BC$,

所以 $EP\parallel BC$,$EP=BC$,

所以四边形 $EBCP$ 为平行四边形, ………………………………………………………………………… 3 分

所以 $BE\parallel CP$. ………………………………………………………………………… 4 分

因为 $CP\subset$ 平面 SCD,$BE\not\subset$ 平面 SCD,

所以 $BE\parallel$ 平面 SCD. ………………………………………………………………………… 5 分

(2)如图,取 AD 的中点 O,连接 SO,CO.

因为 $\triangle SAD$ 为等腰三角形,

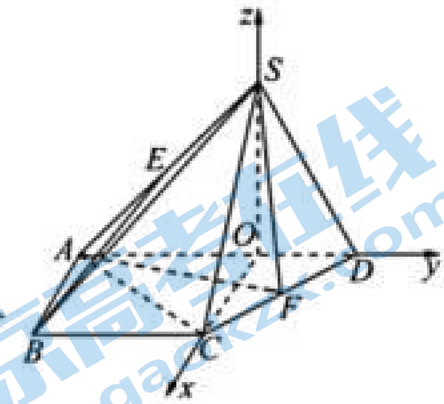
所以 $SO\perp AD$.

因为平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$,平面 $SAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$,

所以 $SO\perp$ 平面 $ABCD$,又 OC,$OD\subset$ 平面 $ABCD$,则 $SO\perp OC$,$SO\perp OD$,

易证 $CO\perp AD$, ………………………………………………………………………… 6 分

可建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$.



因为 $AB=1, AS=\sqrt{3}$,

所以 $A(0,-1,0), S(0,0,\sqrt{2}), C(1,0,0), F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$,

所以 $\overrightarrow{AC}=(1,1,0), \overrightarrow{AS}=(0,1,\sqrt{2}), \overrightarrow{AF}=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0\right), \overrightarrow{SF}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\sqrt{2}\right)$. ………………… 8 分

设平面 ACS 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$,则有 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AS}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x+y=0,\\ y+\sqrt{2}z=0,\end{cases}$ 取 $x=\sqrt{2}$ 得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},1)$. ………………… 9 分

同理可得平面 AFS 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(3\sqrt{2},-\sqrt{2},1)$. ………………………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{3\sqrt{105}}{35}$,设二面角 $C-AS-F$ 的大小为 θ,则 $\cos\theta=\frac{3\sqrt{105}}{35}$. ………………………… 12 分

20.解:(1)因为 $\chi^2=\frac{240\times(80\times60-40\times60)^2}{140\times100\times120\times120}\approx6.857>6.635$, ………………………………………… 3 分

故在犯错误概率不超过 0.01 的前提下认为喜爱足球运动与性别有关. ………………………………………… 4 分

(2)①根据分层抽样的方法得,男性人数为 $\frac{80}{140}\times7=4$ 人,女性人数为 $\frac{60}{140}\times7=3$ 人. ………………………… 6 分

②X 的可能取值为:1,2,3,4,

$P(X=1)=\frac{C_4^1C_3^3}{C_7^4}=\frac{4}{35}, P(X=2)=\frac{C_4^2C_3^2}{C_7^4}=\frac{18}{35}, P(X=3)=\frac{C_4^3C_3^1}{C_7^4}=\frac{12}{35}, P(X=4)=\frac{C_4^4}{C_7^4}=\frac{1}{35}$. ………………………… 10 分

所以 X 的分布列为:

X	1	2	3	4
P	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

………………………………………………………………… 11 分

所以 $E(X)=1\times\frac{4}{35}+2\times\frac{18}{35}+3\times\frac{12}{35}+4\times\frac{1}{35}=\frac{16}{7}$. ………………………………………… 12 分

21.解:(1)由题意知,$2c=2, c=1, b=\sqrt{3}$, ………………………………………………………… 2 分

所以 $a=\sqrt{b^2+c^2}=2$,所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ………………………………………… 4 分

(2)因为 P,Q 不同于 A,当 $\angle PMA=2\angle PQA$ 时,$\angle PQA=\angle MAQ$,此时 $MA=MQ=\frac{1}{2}PQ$,且 $PA\perp QA$, ………………… 5 分

设 $P(x_1,y_1), Q(x_2,y_2)$,

联立 $\begin{cases}y=kx+m,\\ 3x^2+4y^2=12,\end{cases}$ 得 $(4k^2+3)x^2+8kmx+4m^2-12=0$, ………………………………… 7 分

$\Delta=(8km)^2-4(4m^2-12)(4k^2+3)=-48m^2+192k^2+144$, ………………………………………… 8 分

令 $\Delta>0$ 解得 $m^2<4k^2+3$,

所以 $x_1+x_2=-\frac{8km}{4k^2+3}, x_1x_2=\frac{4m^2-12}{4k^2+3}$,① ………………………………………… 9 分

$k_{PA}\cdot k_{QA}=\frac{y_1-\sqrt{3}}{x_1}\cdot\frac{y_2-\sqrt{3}}{x_2}=\frac{(kx_1+m-\sqrt{3})\cdot(kx_2+m-\sqrt{3})}{x_1x_2}=\frac{k^2x_1x_2+k(m-\sqrt{3})(x_1+x_2)+(m-\sqrt{3})^2}{x_1x_2}=-1$,② ………

………………………………………………………………………………………… 10 分

把①代入②并整理得 $7m^2-6\sqrt{3}m-3=0$,解得 $m=\sqrt{3}$(舍去)或 $m=-\frac{\sqrt{3}}{7}$,故 m 的值为 $-\frac{\sqrt{3}}{7}$. ………………… 12 分

22.解：(1)当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln(x+1)-2e^x+\sin x+2$，$f(0)=0$. …………………………………… 1 分

$f'(x)=\dfrac{1}{x+1}-2e^x+\cos x$，所以 $f'(0)=0$，…………………………………… 3 分

故 $f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y=0$. …………………………………… 4 分

(2)由题意知，$f'(x)=\dfrac{a}{x+1}-2e^x+\cos x$． …………………………………… 5 分

当 $a\leq 0$ 时，对任意 $x\in[0,\pi]$，$-2e^x\leq -2$，$\cos x\in[-1,1]$，则 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减，$f(x)\leq f(0)=0$，满足题意；…………………………………… 7 分

当 $a>0$ 时，令 $g(x)=f'(x)$，$g'(x)=-\left[\dfrac{a}{(x+1)^2}+2e^x+\sin x\right]$，则 $g'(x)<0$ 在 $[0,\pi]$ 上恒成立，所以 $f'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减，则 $f'(0)=a-1$，$f'(\pi)=\dfrac{a}{\pi+1}-2e^{\pi}-1$． …………………………………… 8 分

①当 $a-1\leq 0$，即 $0<a\leq 1$ 时，$f'(x)\leq 0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减，所以 $f(x)\leq f(0)=0$，满足题意；…………………… 9 分

②$f'(0)>0$ 且 $f'(\pi)<0$ 时，即 $1<a<(2e^{\pi}+1)(\pi+1)$ 时，由零点存在性定理知，$\exists x_0\in[0,\pi]$，使得 $f'(x_0)=0$，当 $x\in[0,x_0)$ 时，$f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上单调递增，所以 $f(x)>f(0)=0$，不满足题意；…………………………………… 10 分

③当 $f'(\pi)\geq 0$ 时，即 $a\geq(2e^{\pi}+1)(\pi+1)$ 时，对任意 $x\in[0,\pi]$，$f'(x)\geq 0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(x)>f(0)=0$，不满足题意. …………………………………… 11 分

综上，a 的取值范围为 $(-\infty,1]$. …………………………………… 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

微信搜一搜

北京高考资讯