

## 数学II课程 教与学诊断 (2023.1)

考试时长: 120 分钟 满分: 100 分 命题人: 李久权 郑维珍 丛书畅 王嘉成

一、选择题共 12 小题, 每小题 3 分, 共 36 分. 在每小题列出的四个选项中, 选出符合题目要求的一项.

1. 下列函数的极限计算正确的是 ( )

A.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x+1} = 1$       B.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = 1$       C.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \sqrt{e}$       D.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

2. 函数  $f(x) = x^2$  在区间  $[0, 2]$  上的平均变化率等于  $x = m$  时的瞬时变化率, 则  $m =$  ( )

A.  $\frac{1}{2}$       B. 1      C. 2      D.  $\frac{3}{2}$

3. 某晚会有三个唱歌节目, 两个舞蹈节目, 要求舞蹈节目不能相邻, 有 ( ) 种排法?

A. 72      B. 36      C. 24      D. 12

4. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$  的一条渐近线方程为  $y = x$ , 则  $C$  的离心率为 ( )

A.  $\sqrt{2}$       B.  $\sqrt{3}$       C. 2      D.  $\sqrt{5}$

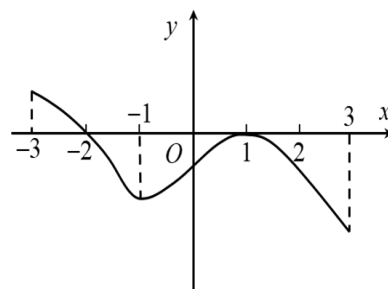
5. 已知  $f(x)$  为奇函数, 当  $x < 0$  时,  $f(x) = -x^2$ , 则曲线  $y = f(x)$  在点  $(1, 1)$  处的切线斜率是 ( )

A. -2      B. 2      C.  $-e$       D.  $e^{-2} + 1$

6. 下列结论正确的个数是 ( )

①若  $f(x) = \ln 2$ , 则  $f'(x) = \frac{1}{2}$ ;      ②若  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , 则  $f'(3) = -\frac{2}{27}$ ;  
 ③若  $f(x) = 2^x$ , 则  $f'(x) = 2^x \ln 2$ ;      ④若  $f(x) = \log_2 x$ , 则  $f'(x) = \frac{1}{x \ln 2}$ .

A. 0      B. 1      C. 2      D. 3

7. 已知函数  $f(x)$  的导函数  $f'(x)$  的图象如图所示, 则下列结论中正确的是 ( )A. 曲线  $y = f(x)$  在点  $(-2, f(-2))$  处的切线斜率小于零B. 函数  $f(x)$  在区间  $(-1, 1)$  上单调递增C. 函数  $f(x)$  在  $x = 1$  处取得极大值D. 函数  $f(x)$  在区间  $(-3, 3)$  内至多有两个零点

8. 没有一个冬天不可逾越，没有一个春天不会来临。某街道疫情防控小组选派 7 名工作人员到 A, B, C 三个小区进行调研活动，每个小区至少去 1 人，恰有两个小区所派人数相同，则不同的安排方式共有 ( )

- A. 1176                      B. 2352                      C. 1722                      D. 1302

9. 已知函数  $f(x) = x \ln(1+x)$ ，则 ( )

- A.  $f(x)$  是偶函数  
B. 曲线  $y = f(x)$  在点  $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}))$  处切线的斜率为  $-1 + \ln 2$   
C.  $f(x)$  在  $(-1, +\infty)$  上单调递增  
D.  $f(x)$  有一个零点

10. 已知函数  $f(x) = e^x + ax^2 - x + 1$ ，则“ $f(x)$  有极值”是  $a < -\frac{1}{2}$  ( )

- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                              D. 既不充分也不必要条件

11. 已知函数  $f(x) = \sin 2x - xf'(0)$ ，则该函数的图象在  $x = \frac{\pi}{2}$  处的切线方程为 ( )

- A.  $3x + y - \pi = 0$       B.  $3x - y - \pi = 0$       C.  $x + 3y - \pi = 0$       D.  $3x + y + \pi = 0$

12. 已知函数  $f(x) = e^{x-3}$ ， $g(x) = \frac{1}{2} + \ln \frac{x}{2}$ ，若  $f(m) = g(n)$  成立，则  $n - m$  的最小值为 ( )

- A.  $-1 + \ln 2$                       B.  $1 + \ln 2$                       C.  $-2 + \ln 2$                       D.  $2 + \ln 2$

二、填空题共 6 小题，每小题 4 分，共 24 分。

13.  $(x^3 - \frac{1}{x})^4$  展开式中常数项为\_\_\_\_\_。

14. 已知  $O$  为坐标原点，抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  上一点  $A$  到焦点  $F$  的距离为 4，设点  $M$  为抛物线  $C$  准线  $l$  上的动点。若  $\triangle MAF$  为正三角形，则抛物线  $C$  方程为\_\_\_\_\_。

15. 已知函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的偶函数，其导函数为  $f'(x)$ ，且当  $x < 0$  时， $2f(x) + xf'(x) < 0$ ，则不等式  $(x - 2023)^2 f(x - 2023) - f(-1) < 0$  的解集为\_\_\_\_\_。

16. 把 6 张座位编号为 1, 2, 3, 4, 5, 6 的电影票全部分给 4 个人，每个人至少分 1 张，至多分 2 张，且这两张票具有连续的编号，那么不同的分法共有\_\_\_\_\_种。(用数字作答)

17. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} \lg(x+1), & -1 < x < 0 \\ x + \frac{a}{x} - 4, & x > 0 \end{cases}$  的值域为  $\mathbb{R}$ ，则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

18. 函数  $y=f(x)$  图象上不同两点  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$  处的切线的斜率分别是  $k_A, k_B$ , 规定  $\varphi(A, B) = \frac{|k_A - k_B|}{|AB|}$  叫

曲线  $y=f(x)$  在点 A 与点 B 之间的“弯曲度”, 给出以下命题:

① 存在这样的函数, 图象上任意两点之间的“弯曲度”为常数;

② 设点 A、B 是抛物线  $y=x^2+1$  上任意不同的两点, 则  $\varphi(A, B) \leq 2$ ;

③ 设曲线  $y=e^x$  上不同两点  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 且  $x_1 - x_2 = 1$ , 若  $t \cdot \varphi(A, B) < 1$  恒成立, 则实数  $t$  的取值范围是  $(-\infty, 1)$ ;

④  $y=x^3$  与  $y=x^2$  在原点处的“弯曲度”一样.

以上正确命题的序号为\_\_\_\_\_. (写出所有正确的)

三、解答题共 4 小题, 共 40 分. 解答题应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.

19. 在下列三个条件中任选一个条件, 补充在问题中的横线上, 并解答.

条件①: 展开式中前三项的二项式系数之和为 22;

条件②: 展开式中所有项的二项式系数之和减去展开式中所有项的系数之和等于 64;

条件③: 展开式中常数项为第三项.

问题: 已知二项式  $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)^n$ , 若\_\_\_\_\_, 求:

(I) 展开式中二项式系数最大的项; (3 分)

(II) 展开式中所有的有理项; (4 分)

(III) 展开式中所有项的系数之和. (2 分)

20. 已知函数  $f(x) = ax - (2a+1)\ln x - \frac{2}{x} (a \in \mathbb{R})$ .

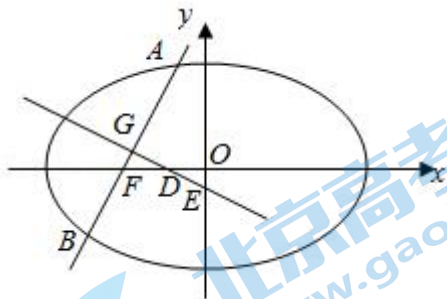
(I) 若函数  $f(x)$  在  $x=1$  处取得极值, 求  $a$  的值. (4 分)

(II) 讨论函数  $f(x)$  的单调区间. (5 分)

21. 如图, 椭圆  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左焦点为  $F$ , 过点  $F$  的直线交椭圆于  $A, B$  两点. 当直线  $AB$  经过椭圆的一个顶点时, 其倾斜角恰为  $60^\circ$ .

(I) 求该椭圆的离心率; (3分)

(II) 设线段  $AB$  的中点为  $G$ ,  $AB$  的中垂线与  $x$  轴和  $y$  轴分别交于  $D, E$  两点. 记  $\triangle GFD$  的面积为  $S_1$ ,  $\triangle OED$  ( $O$  为原点) 的面积为  $S_2$ , 求  $\frac{S_1}{S_2}$  的取值范围. (7分)



22. 已知函数  $f(x) = e^x(2x-1) - ax + a$ .

(I) 若  $a < 1$  且仅存在两个的整数, 使得  $f(x) < 0$ , 求  $a$  的取值范围; (4分)

(II) 讨论  $f(x)$  零点的个数; (4分)

(III) 证明  $\forall x_1, x_2 \in [-\frac{3}{2}, +\infty), \forall t \in (0, 1)$ , 有  $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$ . (4分)

## 关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯