2024年新高考改革适应性练习（5）（九省联考题型）

数学参考答案

一、单项选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	B	D	A	C	B	D

二、多项选择题（本题共3小题，每小题6分，共18分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得6分，有选错的得0分，若只有2个正确选项，每选对一个得3分；若只有3个正确选项，每选对一个得2分．具体得分如【附】评分表．）

题号	9	10	11
答案	AC	BD	ACD

【附】评分表

<table>
<tr><td colspan="2">9-11题（每题满分6分）</td><td colspan="2">得分情况</td></tr>
<tr><td rowspan="5">正确选项个数</td><td rowspan="2">2个
（如AC）</td><td>选对1个（选A或C）</td><td>3分</td></tr>
<tr><td>选对2个（选AC）</td><td>6分</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3个
（如ACD）</td><td>选对1个（选A或C或D）</td><td>2分</td></tr>
<tr><td>选对2个（选AC或CD或AD）</td><td>4分</td></tr>
<tr><td>选对3个（选ACD）</td><td>6分</td></tr>
</table>

三、填空题（本题共3小题，每小题5分，共15分．）

题号	12	13	14
答案	$\sqrt{3}$N	$(-6,7)$	79

四、解答题（本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．）

15.（13 分）

（1）由题意，$A+B+C=\pi$，所以

$$c\sin\frac{B+C}{2}=a\sin C$$

$$\Leftrightarrow\ c\sin\frac{\pi-A}{2}=a\sin C$$

$$\Leftrightarrow\ c\cos\frac{A}{2}=a\sin C$$

正弦定理边化角得

$$\sin C\cos\frac{A}{2}=\sin A\sin C$$

$$\Leftrightarrow \cos\frac{A}{2}=\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$$

解得 $A=\frac{\pi}{3}$，所以 A 的值是 $\frac{\pi}{3}$．

（2）由向量积的定义，

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=c\cdot b\cdot\cos A=\frac{1}{2}bc=2$$

即 $bc=4$，由余弦定理得，

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-4$$

由基本不等式，

$$b^2+c^2-4\geq 2bc-4=4$$

所以 $a^2\geq 4$，即 $a\geq 2$，当且仅当 $b=c=2$，即 $\triangle ABC$ 是等边三角形时等号成立．

故 a 的最小值是 2．

16.（15 分）

（1）由差数列的定义，数列 $\{2^n\}$ 的一阶差数列为

$$\{2^n-2^{n-1}\}=\{2^{n-1}\}$$

数列 $\{2^n\}$ 的二阶差数列为 $\{2^{n-1}\}$ 的一阶差数列，即

$$\{2^{n-1}-2^{n-2}\}=\{2^{n-2}\}$$

故数列 $\{2^n\}$ 的二阶差数列为 $\{2^{n-2}\}$．

（2）通过找规律得，$\{2^n\}$ 的 m 阶差数列为 $\{2^{n-m}\}$ 下面进行证明．

我们采用数学归纳法进行证明：

①（归纳奠基）当 $m=1$ 时，显然成立；$m=2$ 时，由（1）得结论也成立.

②（归纳递推）我们假设该结论对 $m=k\ (k\geq 3)$ 时成立，尝试证明对 $m=k+1$ 时也成立.

由差数列的定义，$\{2^n\}$ 的 $k+1$ 阶差数列即 $\{2^n\}$ 的 k 阶差数列的一阶差数列，即

$$\{2^{n-k}-2^{n-k-1}\}=\{2^{n-k-1}\}$$

故该结论对 $m=k+1$ 时也成立．数学归纳法证毕.

故 $\{2^n\}$ 的 m 阶差数列为 $\{2^{n-m}\}$．该数列是以 2^{1-m} 为首项，2 为公比的等比数列，故其前 n 项和

$$S=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{2^{1-m}(1-2^n)}{1-2}=2^{n+1-m}-2^{1-m}$$

故 $\{2^n\}$ 的 m 阶差数列为 $\{2^{n-m}\}$，其前 n 项和 $S=2^{n+1-m}-2^{1-m}$.

17.（15 分）

（1）$f(x)=ax-\ln(x+1)\ ,x>-1$，$f'(x)=a-\frac{1}{x+1}$，

注意到 $f(0)=0$，由题意 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极值点，所以 $f(0)=a-1=0$，

解得 $a=1$．故 a 的值是 1.

代入原函数验证得，$f(x)$ 有且仅有一个零点 0，有且仅有一个极值点 0，结论成立.

（2）首先注意到 $f(0)=0$，

$f(x)=ax-\ln(x+1)\ ,x>-1$，$f'(x)=a-\frac{1}{x+1}$，$f'(0)=a-1$，

①若 $a\leq 0$，则 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，

则对所有 $x>0$，$f(x)<f(0)=0$，不满足题意，故舍去；

②若 $0<a<1$，则 $f'(0)<0$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近递减，

所以存在 $\varepsilon>0$，$f(\varepsilon)<f(0)=0$，不满足题意，故舍去；

③若 $a\geq 1$，则 $f'(x)=\frac{1}{x+1}(ax+a-1)$，

函数 $g(x)=ax+a-1$ 是一条递增的直线，所以当 $x>0$ 时，$g(x)>g(0)=a-1\geq 0$，

即 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，

则对所有 $x>0$，$f(x)>f(0)=0$，符合题意，该情况成立.

综上所述，a 的取值范围是 $[1,+\infty)$.

18.（17 分）

（1）记蚂蚁爬行 n 次在底面 $ABCD$ 的概率为 P_n，则它前一步只有两种情况：在下底面或在上底面，

结合题意易得，$P_1=\frac{2}{3}$，$P_{n+1}=\frac{1}{3}P_n+\frac{2}{3}(1-P_n)$，$P_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(P_n-\frac{1}{2}\right)$，

所以 $\left\{P_n-\frac{1}{2}\right\}$ 是首项为 $\frac{1}{6}$，公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列，

$$P_n-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1},P_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

（2）结合题意易得：$X=0,1,2$，

当 $X=2$ 时，蚂蚁第 3 次、第 5 次都在 C 处，

$$P(X=2)=\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 2\times\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times 2\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times 2\times\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\right)$$
$$=\frac{1}{18}$$

当 $X=1$ 时，蚂蚁第 3 次在 C 处或第 5 次在 C 处，

设蚂蚁第 3 次在 C 处的概率为 P_1，

$$P_1=\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 2\times\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times 2\times\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times 2\times\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{18}$$

设蚂蚁第 5 次在C处的概率为 P_2，

设蚂蚁不过点 C 且第 3 次在 D_1 的概率为 P_3，设蚂蚁不过点 C 且第 3 次在 B_1 的概率为 P_4，

设蚂蚁不过点 C 且第 3 次在 A 的概率为 P_5，由对称性知，$P_3=P_4$，

$$P_3=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 4+\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times 3=\frac{13}{54}$$

$$又\ P_5=\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\times 6+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{11}{27}$$

$$得\ P_2=2P_3\times\frac{1}{6}\times\frac{2}{3}\times 2+P_5\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 2=\frac{7}{54}$$

$$\therefore P(X=1)=P_1+P_2=\frac{5}{27}$$

$$P(X=0)=1-P(X=1)-P(X=2)=\frac{41}{54}$$

X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{41}{54}$	$\frac{5}{27}$	$\frac{1}{18}$

X 的数学期望

$$E(X)=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)+2\times P(X=2)=\frac{8}{27}$$

19.（17 分）

（1）设复数 $z=a+b\mathrm{i}\,(a,b\in R)$，则

$$|z^2|-|z^2-9|$$

$$=(a^2+b^2)-\sqrt{(a^2-b^2-9)^2+4a^2b^2}=7$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(a^2-b^2-9)^2+4a^2b^2}=a^2+b^2-7$$

两边平方得

$$(a^2-b^2-9)^2+4a^2b^2=(a^2+b^2)^2+49-14(a^2+b^2)$$

$$\Leftrightarrow a^2-8b^2=8$$

$$\Leftrightarrow\frac{a^2}{8}-b^2=1$$

所以 W 是一个焦点在实轴上，顶点为 $(\pm2\sqrt{2},0)$，渐近线为 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}x$ 的双曲线.

其离心率

$$e=\frac{\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1^2}}{2\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

（2）由（1）的计算得 $L=2\sqrt{2}$，$e=\frac{3\sqrt{2}}{4}$，$F_1(c,0)=(3,0)$，则直线 $x=\frac{L}{e}=\frac{8}{3}$，

设 $z=a+b\mathrm{i}\,(a,b\in R,a>0)$，则 $d=\left|a-\frac{8}{3}\right|=a-\frac{8}{3}$，

$$ed=\frac{3\sqrt{2}}{4}\left(a-\frac{8}{3}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{4}a-2\sqrt{2}$$

$$|ZF_1|=\sqrt{(a-3)^2+b^2}$$

由 $\frac{a^2}{8}-b^2=1$ 得 $b^2=\frac{a^2}{8}-1$，代入得

$$|ZF_1|=\sqrt{(a-3)^2+b^2}=\sqrt{(a-3)^2+\frac{a^2}{8}-1}=\sqrt{\frac{9}{8}a^2-6a+8}=\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}a-2\sqrt{2}\right)^2}$$

$$=\frac{3\sqrt{2}}{4}a-2\sqrt{2}=ed$$

所以 $|ZF_1|=ed$，原式得证.

（3）由（1）得 W 的两条渐近线 $l_1: y=\frac{\sqrt{2}}{4}x$，$l_2: y=-\frac{\sqrt{2}}{4}x$，

由对称性，不妨设 $z=a+b\mathrm{i}\,(a,b\in R, a>0)$，则 $k_{l_3}=k_{l_1}=\frac{\sqrt{2}}{4}$，

所以 $l_3: y=\frac{\sqrt{2}}{4}(x-a)+b$，同理得 $l_4: y=-\frac{\sqrt{2}}{4}(x-a)+b$.

联立 l_2 和 l_3：

$$\begin{cases} y=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}x \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(x-a)+b \end{cases}$$

得 $P\left(\frac{a}{2}-\sqrt{2}b, \frac{b}{2}-\frac{\sqrt{2}}{8}a\right)$，

易知直线 $OZ: bx-ay=0$，所以点 P 到直线 OZ 的距离

$$d=\frac{\left|b\left(\frac{a}{2}-\sqrt{2}b\right)-a\left(\frac{b}{2}-\frac{\sqrt{2}}{8}a\right)\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{|8b^2-a^2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

由（1）$a^2-8b^2=8$，所以

$$d=\frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{|8b^2-a^2|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}\cdot\frac{8}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}$$

而 $|OZ|=\sqrt{a^2+b^2}$，所以

$$S_{\triangle OPZ}=\frac{1}{2}\cdot d\cdot|OZ|=\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{2}{a^2+b^2}}\times\sqrt{a^2+b^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{\square OPQZ}=2S_{\triangle OPZ}=\sqrt{2}$$

故平行四边形 $OPQZ$ 的面积为定值 $\sqrt{2}$.