2023四校联考数学试题

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．设 $z=1+\mathrm{i}$，则 $z^2-\mathrm{i}=$

A．i　　B．$-\mathrm{i}$　　C．1　　D．-1

2．设集合 $A=\{2,3,a^2-2a-3\}$，$B=\{0,3\}$，$C=\{2,a\}$．若 $B\subseteq A$，$A\cap C=\{2\}$，则 $a=$

A．-3　　B．-1　　C．1　　D．3

3．甲、乙、丙、丁四名教师带领学生参加校园植树活动，教师随机分成三组，每组至少一人，则甲、乙在同一组的概率为

A．$\frac{1}{6}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{3}$　　D．$\frac{1}{2}$

4．平面向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相互垂直，已知 $\boldsymbol{a}=(6,-8)$，$|\boldsymbol{b}|=5$，且 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $(1,0)$ 的夹角是钝角，则 $\boldsymbol{b}=$

A．$(-3,-4)$　　B．$(4,3)$　　C．$(-4,3)$　　D．$(-4,-3)$

5．已知点 A，B，C 为椭圆 D 的三个顶点，若 $\triangle ABC$ 是正三角形，则 D 的离心率是

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{\sqrt{6}}{3}$　　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

6．三棱锥 $A-BCD$ 中，$AC\perp$ 平面 BCD，$BD\perp CD$．若 $AB=3$，$BD=1$，则该三棱锥体积的最大值为

A．2　　B．$\frac{4}{3}$　　C．1　　D．$\frac{2}{3}$

7．设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 的导函数存在，且 $f'(x)<g'(x)$，则当 $x\in(a,b)$ 时

A．$f(x)<g(x)$　　B．$f(x)>g(x)$

C．$f(x)+g(a)<g(x)+f(a)$　　D．$f(x)+g(b)<g(x)+f(b)$

8．已知 a，b，c 满足 $a=\log_5(2^b+3^b)$，$c=\log_3(5^b-2^b)$，则

A．$|a-c|\geqslant|b-c|$，$|a-b|\geqslant|b-c|$　　B．$|a-c|\geqslant|b-c|$，$|a-b|\leqslant|b-c|$

C．$|a-c|\leqslant|b-c|$，$|a-b|\geqslant|b-c|$　　D．$|a-c|\leqslant|b-c|$，$|a-b|\leqslant|b-c|$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，$g(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(x)$，$g(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 单调递减，则

A. $f(f(1))<f(f(2))$　　B. $f(g(1))<f(g(2))$

C. $g(f(1))<g(f(2))$　　D. $g(g(1))<g(g(2))$

10. 已知平面 $\alpha\cap$ 平面 $\beta=l$，B，D 是 l 上两点，直线 $AB\subset\alpha$ 且 $AB\cap l=B$，直线 $CD\subset\beta$ 且 $CD\cap l=D$．下列结论中，错误的有

A. 若 $AB\perp l$，$CD\perp l$，且 $AB=CD$，则 $ABCD$ 是平行四边形

B. 若 M 是 AB 中点，N 是 CD 中点，则 $MN//AC$

C. 若 $\alpha\perp\beta$，$AB\perp l$，$AC\perp l$，则 CD 在 α 上的射影是 BD

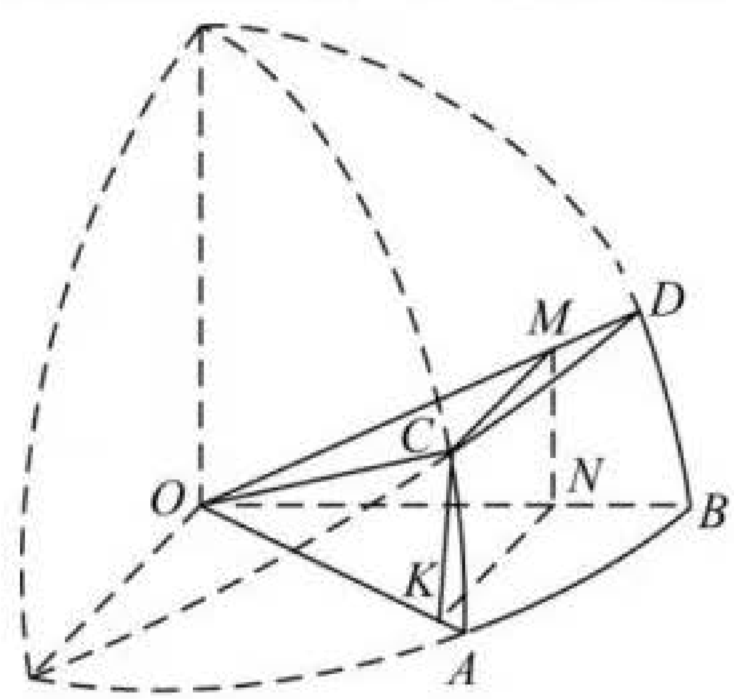
D. 直线 AB，CD 所成角的大小与二面角 $\alpha-l-\beta$ 的大小相等

11. 质点 P 和 Q 在以坐标原点 O 为圆心，半径为1的 $\odot O$ 上逆时针作匀速圆周运动，同时出发．P 的角速度大小为 $2\,\mathrm{rad/s}$，起点为 $\odot O$ 与 x 轴正半轴的交点；Q 的角速度大小为 $5\,\mathrm{rad/s}$，起点为射线 $y=-\sqrt{3}x\ (x\geqslant 0)$ 与 $\odot O$ 的交点．则当 Q 与 P 重合时，Q 的坐标可以为

A. $(\cos\frac{2\pi}{9},\sin\frac{2\pi}{9})$　　B. $(-\cos\frac{5\pi}{9},-\sin\frac{5\pi}{9})$

C. $(\cos\frac{\pi}{9},-\sin\frac{\pi}{9})$　　D. $(-\cos\frac{\pi}{9},\sin\frac{\pi}{9})$

12. 下图改编自李约瑟所著的《中国科学技术史》，用于说明元代数学家郭守敬在编制《授时历》时所做的天文计算．图中的 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{AC}$，$\overset{\frown}{BD}$，$\overset{\frown}{CD}$ 都是以 O 为圆心的圆弧，$CMNK$ 是为计算所做的矩形，其中 M，N，K 分别在线段 OD，OB，OA 上，$MN\perp OB$，$KN\perp OB$．记 $\alpha=\angle AOB$，$\beta=\angle AOC$，$\gamma=\angle BOD$，$\delta=\angle COD$，则



A. $\sin\beta=\sin\gamma\cos\delta$

B. $\cos\beta=\cos\gamma\cos\delta$

C. $\sin\alpha=\dfrac{\sin\delta}{\cos\beta}$

D. $\cos\alpha=\dfrac{\cos\gamma\cos\delta}{\cos\beta}$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 某工厂生产的产品的质量指标服从正态分布 $N(100,\sigma^2)$．质量指标介于 99 至 101 之间的产品为良品，为使这种产品的良品率达到 95.45%，则需调整生产工艺，使得 σ 至多为________．（若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P\{|X-\mu|<2\sigma\}=0.9545$）

14. 若 P，Q 分别是抛物线 $x^2=y$ 与圆 $(x-3)^2+y^2=1$ 上的点，则 $|PQ|$ 的最小值为________．

15. 数学家祖冲之曾给出圆周率 π 的两个近似值："约率" $\dfrac{22}{7}$ 与"密率" $\dfrac{355}{113}$．它们可用"调日法"得到：称小于 3.141 5926 的近似值为弱率，大于 3.141 5927 的近似值为强率．由 $\dfrac{3}{1}<\pi<\dfrac{4}{1}$，取 3 为弱率，4 为强率，得 $a_1=\dfrac{3+4}{1+1}=\dfrac{7}{2}$，故 a_1 为强率，与上一次的弱率 3 计算得 $a_2=\dfrac{3+7}{1+2}=\dfrac{10}{3}$，故 a_2 为强率，继续计算，……．若某次得到的近似值为强率，与上一次的弱率继续计算得到新的近似值；若某次得到的近似值为弱率，与上一次的强率继续计算得到新的近似值，依此类推．已知 $a_m=\dfrac{22}{7}$，则 $m=$________；$a_8=$________．

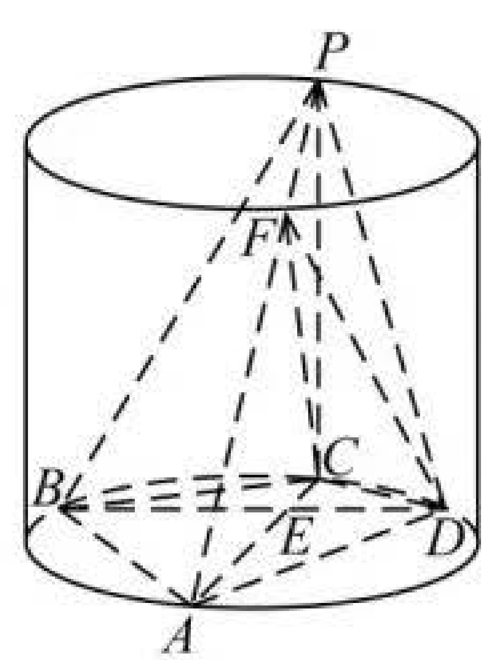
16. 右图为一个开关阵列，每个开关只有"开"和"关"两种状态，按其中一个开关1次，将导致自身和所有相邻的开关改变状态．例如，按 $(2,2)$ 将导致 $(1,2)$，$(2,1)$，$(2,2)$，$(2,3)$，$(3,2)$ 改变状态．如果要求只改变 $(1,1)$ 的状态，则需按开关的最少次数为________．

(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

如图，四边形 $ABCD$ 是圆柱底面的内接四边形，AC 是圆柱的底面直径，PC 是圆柱的母线，E 是 AC 与 BD 的交点，$AB=AD$，$\angle BAD=60°$．



（1）记圆柱的体积为 V_1，四棱锥 $P-ABCD$ 的体积为 V_2，求 $\dfrac{V_1}{V_2}$；

（2）设点 F 在线段 AP 上，$PA=4PF$，$PC=4CE$，求二面角 $F-CD-P$ 的余弦值．

18.（12 分）

已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 在区间 $(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2})$ 单调，其中 ω 为正整数，$|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，且 $f(\dfrac{\pi}{2})=f(\dfrac{2\pi}{3})$.

（1）求 $y=f(x)$ 图像的一条对称轴；

（2）若 $f(\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，求 φ.

19.（12 分）

记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，且 $a_1=1$，$a_n=T_{n-1}$（$n\geqslant 2$）.

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（2）设 m 为整数，且对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$m\geqslant\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{a_2}+\cdots+\dfrac{n}{a_n}$，求 m 的最小值.

20.（12 分）

一个池塘里的鱼的数目记为 N，从池塘里捞出 200 尾鱼，并给鱼作上标识，然后把鱼放回池塘里，过一小段时间后再从池塘里捞出 500 尾鱼，X 表示捞出的 500 尾鱼中有标识的鱼的数目.

（1）若 $N=5\,000$，求 X 的数学期望；

（2）已知捞出的 500 尾鱼中 15 尾有标识，试给出 N 的估计值（以使得 $P(X=15)$ 最大的 N 的值作为 N 的估计值）.

21.（12 分）

已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$ 过点 $A(4\sqrt{2},3)$，且焦距为 10.

（1）求 C 的方程；

（2）已知点 $B(4\sqrt{2},-3)$，$D(2\sqrt{2},0)$，E 为线段 AB 上一点，且直线 DE 交 C 于 G，H 两点. 证明：$\dfrac{|GD|}{|GE|}=\dfrac{|HD|}{|HE|}$.

22.（12 分）

椭圆曲线加密算法运用于区块链.

椭圆曲线 $C=\{(x,y)|y^2=x^3+ax+b,4a^3+27b^2\neq 0\}$. $P\in C$ 关于 x 轴的对称点记为 $\tilde{P}$. C 在点 $P(x,y)\,(y\neq 0)$ 处的切线是指曲线 $y=\pm\sqrt{x^3+ax+b}$ 在点 P 处的切线. 定义“$\oplus$”运算满足：①若 $P\in C$，$Q\in C$，且直线 PQ 与 C 有第三个交点 R，则 $P\oplus Q=\tilde{R}$；②若 $P\in C$，$Q\in C$，且 PQ 为 C 的切线，切点为 P，则 $P\oplus Q=\tilde{P}$；③若 $P\in C$，规定 $P\oplus\tilde{P}=0^*$，且 $P\oplus 0^*=0^*\oplus P=P$.

（1）当 $4a^3+27b^2=0$ 时，讨论函数 $h(x)=x^3+ax+b$ 零点的个数；

（2）已知“$\oplus$”运算满足交换律、结合律，若 $P\in C$，$Q\in C$，且 PQ 为 C 的切线，切点为 P，证明：$P\oplus P=\tilde{Q}$；

（3）已知 $P(x_1,y_1)\in C$，$Q(x_2,y_2)\in C$，且直线 PQ 与 C 有第三个交点，求 $P\oplus Q$ 的坐标.

参考公式：$m^3-n^3=(m-n)(m^2+mn+n^2)$

数学试题评分参考

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。

1．A	2．B	3．A	4．D
5．C	6．D	7．C	8．B

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的给 5 分，部分选对的给 2 分，有选错的给 0 分。

9．BD	10．ABD	11．ABD	12．ACD

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．0.5　　14．$\sqrt{5}-1$

15．6，$\dfrac{47}{15}$　（第一空 2 分，第二空 3 分）　　16．5

四、解答题：共 70 分。

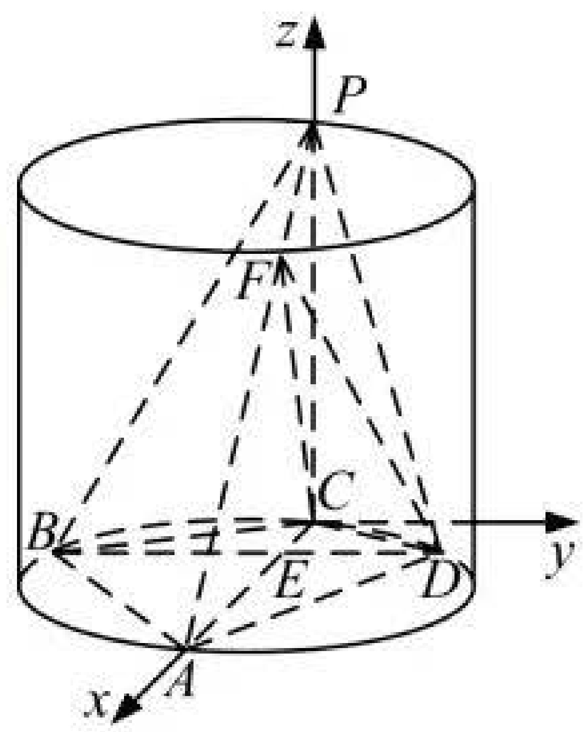
17．解：

（1）由题设得 $AC\perp BD$，$BD=2\sqrt{3}EC$，$AE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}BD=3EC$，$AC=4EC$．于是

$$V_1=\pi\cdot(\frac{1}{2}AC)^2\cdot CP=4\pi\cdot EC^2\cdot CP,$$

$$V_2=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AC\cdot BD\cdot CP=\frac{4\sqrt{3}}{3}EC^2\cdot CP.$$

所以 $\dfrac{V_1}{V_2}=\sqrt{3}\pi$．　　　　……4 分



（2）以 C 为坐标原点，$\overrightarrow{CA}$ 的方向为 x 轴正方向，$|\overrightarrow{CE}|$ 为单位长，建立如图所示的空间直角坐标系 $C-xyz$．

由（1）和题设得 $\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{PF}{FA}=\dfrac{1}{3}$，所以 $\overrightarrow{CF}=(1,0,3)$，$\overrightarrow{CD}=(1,\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{CP}=(0,0,4)$．

设平面 FCD 的法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则

$\begin{cases} \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CF}=0, \\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CD}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x+3z=0, \\ x+\sqrt{3}y=0, \end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{n}=(-3,\sqrt{3},1)$．

设平面 PCD 的法向量 $\boldsymbol{m}=(p,q,r)$，则

$\begin{cases} \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0, \\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} 4r=0, \\ p+\sqrt{3}q=0, \end{cases}$ 可取 $\boldsymbol{m}=(-3,\sqrt{3},0)$． ……8 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$．

因此二面角 $F-CD-P$ 的余弦值为 $\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$． ……10 分

18．**解：**

（1）由题设，$f(x)$ 的最小正周期 $T\geqslant 2\times(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{2\pi}{3}$．又因为 $f(\dfrac{\pi}{2})=f(\dfrac{2\pi}{3})$，所以 $x=\dfrac{1}{2}\times(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2\pi}{3})=\dfrac{7\pi}{12}$ 为 $y=f(x)$ 图像的一条对称轴． ……5 分

（2）由（1）知 $T\geqslant\dfrac{2\pi}{3}$，故 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}\leqslant 3$．由 $\omega\in\mathbf{N}^*$，得 $\omega=1$，2 或 3．

由 $x=\dfrac{7\pi}{12}$ 为 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ 的对称轴，所以 $\dfrac{7\pi}{12}\omega+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+k_1\pi$，$k_1\in\mathbf{Z}$．

因为 $f(\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\dfrac{\pi}{6}\omega+\varphi=\dfrac{\pi}{3}+2k_2\pi$ 或 $\dfrac{\pi}{6}\omega+\varphi=\dfrac{2\pi}{3}+2k_3\pi$，$k_2,k_3\in\mathbf{Z}$．

……8 分

若 $\dfrac{\pi}{6}\omega+\varphi=\dfrac{\pi}{3}+2k_2\pi$，则 $\dfrac{5\pi}{12}\omega=\dfrac{\pi}{6}+(k_1-2k_2)\pi$，即 $\omega=\dfrac{2}{5}+\dfrac{12}{5}(k_1-2k_2)$．不存在整数 k_1，k_2，使得 $\omega=1$，2 或 3．

若 $\dfrac{\pi}{6}\omega+\varphi=\dfrac{2\pi}{3}+2k_3\pi$，则 $\dfrac{5\pi}{12}\omega=-\dfrac{\pi}{6}+(k_1-2k_3)\pi$，即 $\omega=-\dfrac{2}{5}+\dfrac{12}{5}(k_1-2k_3)$．不存在整数 k_1，k_3，使得 $\omega=1$ 或 3．当 $k_1=2k_3+1$ 时，$\omega=2$．

此时 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}+2k_3\pi$，由 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，得 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$． ……12 分

19．解：

（1）由题设可得 $a_2=a_1=1$．当 $n\geqslant 2$ 时，$a_{n+1}=T_{n-1}+a_n=2a_n$，故 $a_n=2^{n-2}$．故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ 2^{n-2}, & n\geqslant 2.\end{cases}$ ……5 分

（2）设 $S_n=\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{a_2}+\cdots+\dfrac{n}{a_n}$，则 $S_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，

$S_n=1+2\cdot 2^0+\cdots+n\cdot 2^{2-n}$．故 $\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{1}{2}+2\cdot 2^{-1}+\cdots+n\cdot 2^{1-n}$．于是，

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{5}{2}+(2^{-1}+2^{-2}+\cdots+2^{2-n})-n\cdot 2^{1-n}$$
$$=\frac{5}{2}+\frac{2^{-1}(1-2^{2-n})}{1-2^{-1}}-n\cdot 2^{1-n}.$$

整理可得 $S_n=7-(n+2)2^{2-n}$． ……10 分

故 $S_n<7$，又 $S_5=\dfrac{49}{8}>6$．所以符合题设条件的 m 的最小值为 7． ……12 分

20．解：

（1）依题意 X 服从超几何分布，且 $N=5\,000$，$M=200$，$n=500$，故

$E(X)=500\times\dfrac{200}{5000}=20$． ……4 分

（2）当 $N<685$ 时，$P(X=15)=0$，

当 $N\geqslant 685$ 时，$P(X=15)=\dfrac{C_{200}^{15}C_{N-200}^{485}}{C_N^{500}}$，

记 $a(N)=\dfrac{C_{200}^{15}C_{N-200}^{485}}{C_N^{500}}$，则

$$\frac{a(N+1)}{a(N)}=\frac{C_{N+1-200}^{485}C_N^{500}}{C_{N+1}^{500}C_{N-200}^{485}}$$
$$=\frac{(N+1-500)(N+1-200)}{(N+1)(N+1-200-485)}$$
$$=\frac{(N-499)(N-199)}{(N+1)(N-684)}$$
$$=\frac{N^2-698N+499\times 199}{N^2-683N-684}.$$ ……9 分

由 $N^2-698N+499\times199>N^2-683N-684$ 当且仅当 $N<\dfrac{499\times199+684}{15}\approx6\,665.7$，

知当 $685\leqslant N\leqslant 6\,665$ 时，$a(N+1)>a(N)$；当 $N\geqslant6\,666$ 时，$a(N+1)<a(N)$，故 $N=6\,666$ 时 $a(N)$ 最大，所以 N 的估计值为 $6\,666$． ……12 分

21．解：

（1）由已知得 $\dfrac{32}{a^2}-\dfrac{9}{b^2}=1$，$2\sqrt{a^2+b^2}=10$，故 $a=4$，$b=3$．

所以 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$． ……4 分

（2）设 $E(4\sqrt{2},t)$，则 $|t|<3$，且 $|t|\neq\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$G(x_1,y_1)$，$H(x_2,y_2)$．

直线 $DE: y=\dfrac{t}{2\sqrt{2}}(x-2\sqrt{2})$．

由 $\begin{cases}y=\dfrac{t}{2\sqrt{2}}(x-2\sqrt{2}),\\ \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1\end{cases}$ 得 $(9-2t^2)x^2+8\sqrt{2}t^2x-16t^2-144=0$，所以

$x_1+x_2=\dfrac{8\sqrt{2}t^2}{2t^2-9}$，$x_1x_2=\dfrac{16t^2+144}{2t^2-9}$． ……7 分

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GD}\cdot\overrightarrow{HE}-\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{DH}&=(2\sqrt{2}-x_1,-y_1)\cdot(4\sqrt{2}-x_2,t-y_2)-(4\sqrt{2}-x_1,t-y_1)\cdot(x_2-2\sqrt{2},y_2)\\&=2x_1x_2+2y_1y_2-6\sqrt{2}(x_1+x_2)-t(y_1+y_2)+32\\&=(2+\frac{t^2}{4})x_1x_2-(\frac{3\sqrt{2}}{4}t^2+6\sqrt{2})(x_1+x_2)+4t^2+32\\&=\frac{4(t^2+8)(t^2+9)}{2t^2-9}-\frac{4t^2(3t^2+24)}{2t^2-9}+4t^2+32\\&=0.\end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{GD}\cdot\overrightarrow{HE}=\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{DH}$，即 $\dfrac{|GD|}{|GE|}=\dfrac{|HD|}{|HE|}$． ……12 分

22．解：

（1）由题设可知 $a\leqslant0$，有 $h'(x)=3x^2+a$，令 $h'(x)=0$，解得 $x_1=-\sqrt{-\dfrac{a}{3}}$，$x_2=\sqrt{-\dfrac{a}{3}}$．

当 $a<0$ 时，$x<-\sqrt{-\dfrac{a}{3}}$ 时，$h(x)$ 单调递增；$-\sqrt{-\dfrac{a}{3}}<x<\sqrt{-\dfrac{a}{3}}$ 时，$h(x)$ 单调递减；

$x>\sqrt{-\dfrac{a}{3}}$ 时，$h(x)$ 单调递增．

当$b>0$，$h(x_2)=0$，所以$h(x)$有2个零点．当$b<0$，$h(x_1)=0$，所以$h(x)$有2个零点．

当$a=0$，有$b=0$，则$h(x)$有1个零点． ……4分

（2）因为PQ为C在点P处的切线，且$Q\in C$，所以$P\oplus Q=\widetilde{P}$，$P\oplus(P\oplus Q)=P\oplus\widetilde{P}$，由题设可知$P\oplus P\oplus Q=0^{*}$．$P\oplus P\oplus Q\oplus\widetilde{Q}=0^{*}\oplus\widetilde{Q}$，所以$P\oplus(P\oplus 0^{*})=\widetilde{Q}$，故$P\oplus P=\widetilde{Q}$． ……8分

（3）直线PQ的斜率$\lambda=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，设$PQ$与$C$的第三个交点为$(x_3,y_3)$，则

$y_3=\lambda(x_3-x_1)+y_1$，代入$y_3^2=x_3^3+ax_3+b$得

$\lambda^2(x_3-x_1)^2+2\lambda y_1(x_3-x_1)+y_1^2=x_3^3+ax_3+b$，代入$y_1^2=x_1^3+ax_1+b$得

$x_3^2+(x_1-\lambda^2)x_3+x_1^2+\lambda^2x_1-2\lambda y_1+a=0$，同理可得

$x_3^2+(x_2-\lambda^2)x_3+x_2^2+\lambda^2x_2-2\lambda y_2+a=0$，两式相减得$x_3=\lambda^2-x_1-x_2$，

因此$P\oplus Q$的坐标为$\left(\left(\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)^2-x_1-x_2,\ \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\left[x_2+2x_1-\left(\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\right)^2\right]-y_1\right)$．

……12分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。