

数学参考答案及评分标准

2023.3

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.【答案】A

【解析】由 $\frac{1+i}{1-bi}=i$, 得 $1-bi=\frac{1+i}{i}=1-i$, 所以 $b=1$. 故选 A.

2.【答案】C

【解析】图中阴影部分表示 $B \cap \complement_{\mathbb{R}} A$, 由 $\frac{2}{x-1} < 1$, 得 $x < 1$ 或 $x > 3$, 所以 $\complement_{\mathbb{R}} A = \{x \mid 1 \leq x \leq 3\}$,

由 $\frac{1}{2} < 2^x < 4$, 解得 $-1 < x < 2$, 所以 $B = \{x \mid -1 < x < 2\}$, 故 $B \cap \complement_{\mathbb{R}} A = \{x \mid 1 \leq x < 2\}$, 故选 C.

3.【答案】B

【解析】将两个 0 视为一个元素, 将两个 9 也视为一个元素, 所以共有 $A_4^4 = 24$ (种) 不同的结果, 故选 B.

4.【答案】D

【解析】因为 $\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a}$,

所以 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mathbf{b} - \frac{1}{2}\mathbf{a}\right) = \frac{3}{4}\mathbf{a} + \frac{1}{4}\mathbf{b}$, 故选 D.

5.【答案】C

【解析】由题意, 花灯的体积等于上面的正六棱台体积与下面的正六棱柱体积的和, 正六棱台的

两个底面积分别为 $S_1 = 6 \times \frac{1}{2} \times 20 \times 20 \times \sin 60^\circ = 600\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$, $S_2 = 6 \times \frac{1}{2} \times 40 \times 40 \times \sin 60^\circ =$

$2400\sqrt{3} \text{ (cm}^2\text{)}$, 所以花灯的体积 $V = 60S_1 + \frac{1}{3} \times 10 \times (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) = 60 \times 600\sqrt{3} + \frac{1}{3} \times$

$10 \times (600\sqrt{3} + 2400\sqrt{3} + \sqrt{600\sqrt{3} \times 2400\sqrt{3}}) = 50\,000\sqrt{3} \text{ (cm}^3\text{)}$, 故选 C.

6.【答案】B

【解析】由题可知 $F(0, 2)$, 设直线 l 的方程为 $y = kx + 2$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. 由 $\begin{cases} y = kx + 2, \\ x^2 = 8y, \end{cases}$ 得

$x^2 - 8kx - 16 = 0$, 故 $x_1 x_2 = -16$. 又 $y_1 = \frac{x_1^2}{8}$, $y_2 = \frac{x_2^2}{8}$, 所以 $y_1 y_2 = \frac{(x_1 x_2)^2}{64} = 4$. 圆 $x^2 + (y - 2)^2$

$= 4$ 的圆心为 $F(0, 2)$, 半径 $r = 2$, 所以 $|AD| = |AF| - r = |AF| - 2$, $|BE| = |BF| - r =$

$|BF| - 2$. 又 $|AF| = y_1 + 2$, $|BF| = y_2 + 2$, 所以 $|AD| = y_1 + 2 - 2 = y_1$, $|BE| = y_2 + 2 - 2 = y_2$,

所以 $|AD| \cdot |BE| = y_1 y_2 = 4$, 故选 B.

7.【答案】A

【解析】因为 $a = \left(\frac{9}{11}\right)^{0.1} < \left(\frac{9}{11}\right)^0 = 1$, $b = \log_9 10 > \log_9 9 = 1$, $c = \lg 11 > \lg 10 = 1$, $2 = \lg 100 > \lg 99 = \lg 9 + \lg 11 > 2\sqrt{\lg 9 \times \lg 11}$, 所以 $1 > \lg 9 \times \lg 11$, 故 $\frac{1}{\lg 9} > \lg 11$. 又 $b = \log_9 10 = \frac{1}{\lg 9}$, 所以 $b > c$, 所以 $b > c > a$. 故选 A.

8.【答案】C

【解析】由 $f'(2-x) + f'(x) = 2$, 令 $x=1$, 得 $2f'(1) = 2$, 所以 $f'(1) = 1$.

由 $f(x-1)$ 为奇函数, 得 $f(x-1) = -f(-x-1)$, 所以 $f'(x-1) = f'(-x-1)$,

故 $f'(x) = f'(-x-2)$ ①.

又 $f'(2-x) + f'(x) = 2$ ②,

由①和②得 $f'(2-x) + f'(-x-2) = 2$, 即 $f'(4-x-2) + f'(-x-2) = 2$,

所以 $f'(x) + f'(x+4) = 2$ ③,

令 $x=-1$, 得 $f'(-1) + f'(3) = 2$, 得 $f'(3) = 0$,

令 $x=1$, 得 $f'(1) + f'(5) = 2$, 得 $f'(5) = 1$.

又 $f'(x+4) + f'(x+8) = 2$ ④,

由③-④得 $f'(x) - f'(x+8) = 0$, 即 $f'(x) = f'(x+8)$,

所以函数 $f'(x)$ 是以 8 为周期的周期函数,

故 $f'(7) = f'(-1) = 2$,

所以 $f'(1) + f'(3) + f'(5) + f'(7) = 1 + 0 + 1 + 2 = 4$,

所以 $\sum_{i=1}^{25} f'(2i-1) = f'(1) + f'(3) + f'(5) + f'(7) + \dots + f'(49) = 6(f'(1) + f'(3) + f'(5) + f'(7)) + f'(49) = 24 + 1 = 25$. 故选 C.

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9.【答案】AC

【解析】因为离群点 (168, 89) 的横坐标 168 小于平均值 173.5, 纵坐标 89 相对过大, 所以去掉离群点后经验回归直线的截距变小而斜率变大, 所以 $\hat{a}_1 > \hat{a}_2$, $\hat{b}_1 < \hat{b}_2$, 所以 A 正确, B 错误; 去掉离群点后成对样本数据的线性相关程度更强, 拟合效果会更好, 所以 $r_1 < r_2$, $R_1^2 < R_2^2$, 所以 C 正确, D 错误. 故选 AC.

10.【答案】ABD

【解析】如图 1, 设点 M 为棱 A_1D_1 的中点, 则 $MC_1 \parallel AE$, 所以四边形 AEC_1M 为平行四边形, 又 $A_1B \parallel ME$, $A_1B \not\subset$ 平面 AEC_1 , $ME \subset$ 平面 AEC_1 , 所以 $A_1B \parallel$ 平面 AEC_1 , 故 A 正确; 由上可知, 四边形 AEC_1M 为平面 AEC_1 截正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的截面, 易得 $AE = EC_1 = C_1M = MA = \sqrt{5}$, 故四边形 AEC_1M 为菱形, 又其对角线 $EM = 2\sqrt{2}$, $AC_1 = 2\sqrt{3}$, 故其面积为 $\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{6}$, 故 D 正确;

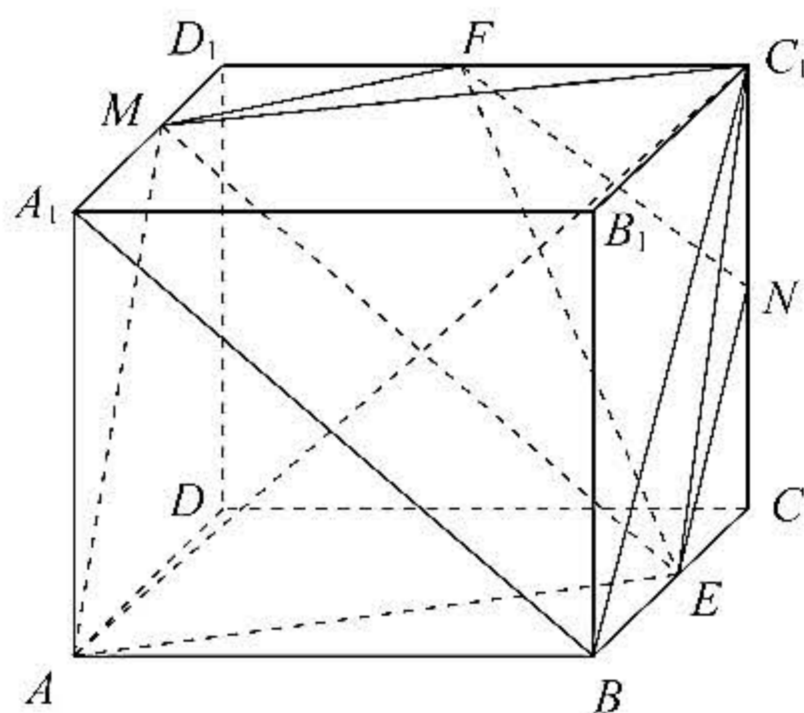


图1

设 CC_1 的中点为 N , 连接 EN, FN . 因为 E, N 分别为 BC 与 CC_1 的中点, 所以 $EN \parallel BC_1$, 故 $\angle NEF$ 为 EF 与 BC_1 所成的角, 又 $EN = FN = \sqrt{2}, EF = \sqrt{6}$,

$$\text{由余弦定理可得 } \cos \angle NEF = \frac{EN^2 + EF^2 - NF^2}{2EN \cdot EF} = \frac{2 + 6 - 2}{2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{6}} =$$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 EF 与 BC_1 所成的角为 30° , 故 B 正确;

如图 2, 假设 $EF \perp$ 平面 B_1AC 正确, 则 $EF \perp B_1C$, 又 $FC_1 \perp B_1C, EF \cap FC_1 = F$, 所以 $B_1C \perp$ 平面 EFC_1 , 得 $B_1C \perp EC_1$.

在正方形 B_1C_1CB 中, $B_1C \perp EC_1$ 显然不成立, 所以假设错误, 即 $EF \perp$ 平面 B_1AC 错误, 故 C 错误. 故选 ABD.

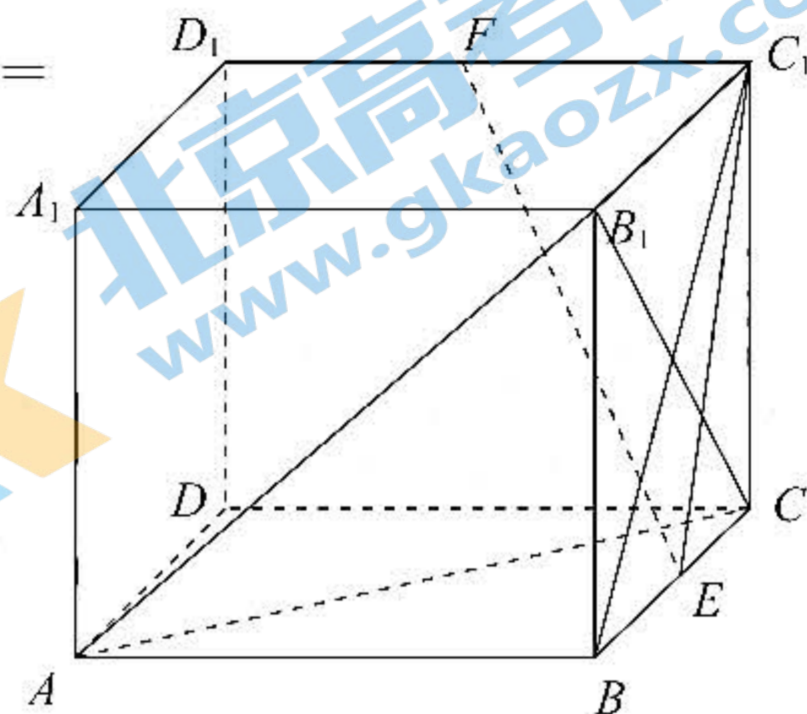


图2

11. 【答案】ACD

【解析】由 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2$, 得 $\omega = \pi$, 所以 A 正确;

当 $\omega = 2$ 时, $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$, 所以函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得

$$f(x - \frac{\pi}{3}) = \cos[2(x - \frac{\pi}{3}) + \frac{\pi}{3}] = \cos(2x - \frac{\pi}{3}) \neq g(x), \text{ 所以 B 错误;}$$

$$\text{若 } f(x) \text{ 在区间 } (\frac{2\pi}{3}, \pi) \text{ 上单调递增, 则 } \begin{cases} \frac{2\pi\omega}{3} + \frac{\pi}{3} \geq \pi + 2k\pi, \\ \pi\omega + \frac{\pi}{3} \leq 2\pi + 2k\pi, \end{cases} \quad k \in \mathbf{Z}, \text{ 解得 } 1 + 3k \leq \omega \leq \frac{5}{3} + 2k, k \in \mathbf{Z},$$

又 $\omega > 0$, 所以只有当 $k=0$ 时, 此不等式有解, 即 $1 \leq \omega \leq \frac{5}{3}$, 所以 C 正确;

$$\text{若 } f(x) \text{ 在区间 } (0, \pi) \text{ 上只有一个零点, 则 } \begin{cases} \pi\omega + \frac{\pi}{3} > \frac{\pi}{2}, \\ \pi\omega + \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2}, \end{cases} \text{ 解得 } \frac{1}{6} < \omega \leq \frac{7}{6}, \text{ 所以 D 正确. 故}$$

选 ACD.

12. 【答案】AB

【解析】由 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 得 $y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2} (x > a)$, 所以 $y' = \frac{\frac{b^2}{a^2}x}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2 - b^2}}$, 则在点 $A(x_1, y_1)$ 处的

切线斜率为 $y' = \frac{\frac{b^2}{a^2}x_1}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x_1^2 - b^2}} = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$, 所以在点 $A(x_1, y_1)$ 处的切线方程为 $y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x -$

$x_1)$, 又有 $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, 化简即可得切线方程为 $\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$,

所以 $\frac{x_1 x_2}{a^2} - \frac{y_1 y_2}{b^2} = 1$, 所以 $x_1 x_2 = a^2$, 故 C 错误;

由 $x_1 x_2 = a^2$, 得 $x_2 = \frac{a^2}{x_1}$, 又 $x_1 > a$, 所以 $0 < x_2 < a$, 故 A 正确;

由 $F_1(-c, 0), F_2(c, 0), B\left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right)$, 得 $|F_1B| = \frac{a^2}{x_1} + c, |BF_2| = c - \frac{a^2}{x_1}$,

$$\text{故 } \frac{|F_1B|}{|BF_2|} = \frac{\frac{a^2}{x_1} + c}{c - \frac{a^2}{x_1}} = \frac{cx_1 + a^2}{cx_1 - a^2},$$

由 $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$, 得 $y_1^2 = \frac{b^2 x_1^2}{a^2} - b^2$,

$$\text{所以 } |AF_1| = \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2} = \sqrt{(x_1 + c)^2 + \frac{b^2 x_1^2}{a^2} - b^2} = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} x_1^2 + 2cx_1 + a^2} = \frac{c}{a} x_1 + a,$$

$$\text{所以 } |AF_2| = |AF_1| - 2a = \frac{c}{a} x_1 - a,$$

$$\text{所以 } \frac{|AF_1|}{|AF_2|} = \frac{\frac{c}{a} x_1 + a}{\frac{c}{a} x_1 - a} = \frac{cx_1 + a^2}{cx_1 - a^2} = \frac{|F_1B|}{|BF_2|},$$

设点 A 到 x 轴的距离为 h ,

$$\text{则 } S_{\triangle AF_1B} = \frac{1}{2} |F_1B| h = \frac{1}{2} |AF_1| |AB| \sin \angle F_1AB, S_{\triangle AF_2B} = \frac{1}{2} |F_2B| h = \frac{1}{2} |AF_2| |AB| \sin \angle F_2AB,$$

$$\frac{S_{\triangle AF_1B}}{S_{\triangle AF_2B}} = \frac{|F_1B|}{|F_2B|} = \frac{|AF_1| \sin \angle F_1AB}{|AF_2| \sin \angle F_2AB}, \text{ 又 } \frac{|AF_1|}{|AF_2|} = \frac{|F_1B|}{|BF_2|}, \text{ 所以 } \angle F_1AB = \angle F_2AB, \text{ 故 B 正确;}$$

由上可得 $\overrightarrow{F_1B} = \left(\frac{a^2}{x_1} + c, 0\right), \overrightarrow{BF_2} = \left(c - \frac{a^2}{x_1}, 0\right)$, 因为 $\overrightarrow{F_1B} = 3\overrightarrow{BF_2}$, 则 $\frac{a^2}{x_1} + c = 3\left(c - \frac{a^2}{x_1}\right)$, 得 $x_1 = \frac{2a^2}{c}$,

$$|AF_1| = \frac{c}{a} x_1 + a = \frac{c}{a} \times \frac{2a^2}{c} + a = 3a, |AF_2| = \frac{c}{a} x_1 - a = \frac{c}{a} \times \frac{2a^2}{c} - a = a,$$

$$\text{所以 } \cos \angle F_1AF_2 = \frac{|AF_1|^2 + |AF_2|^2 - |F_1F_2|^2}{2 \times |AF_1| \times |AF_2|} = \frac{9a^2 + a^2 - 4c^2}{6a^2} = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}e^2 = \frac{1}{3}, \text{ 解得 } e = \sqrt{2},$$

故 D 错误. 故选 AB.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 【答案】-16

【解析】因为 $S_{13} = 0$, 所以 $a_8 = a_1 + 7d = 0$. 又 $a_3 = a_1 + 2d = 10$, 所以 $d = -2, a_1 = 14$, 所以 $S_n = -n^2 + 15n$, 所以 $S_{16} = -16^2 + 15 \times 16 = -16$.

14. 【答案】 $-\sqrt{2}$

$$\text{【解析】} \frac{\cos 70^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 65^\circ} = \frac{\sin 20^\circ - \cos 20^\circ}{\cos(45^\circ + 20^\circ)} = \frac{\sin 20^\circ - \cos 20^\circ}{\cos 45^\circ \cos 20^\circ - \sin 45^\circ \sin 20^\circ} = -\sqrt{2}.$$

15. 【答案】 $\frac{1}{\ln 2}$

【解析】因为 $f(x) = e^x - ax^2 - a$, 定义域为 \mathbf{R} , 所以 $f'(x) = e^x - 2ax$,

故 $e^{x_1} - 2ax_1 = 0, e^{x_2} - 2ax_2 = 0$. 又 $x_2 = 2x_1$, 所以 $e^{2x_1} - 4ax_1 = 0$.

又 $e^{x_1} > 0$,

$$\text{故 } e^{x_1} = 2, \text{ 所以 } x_1 = \ln 2, \text{ 所以 } a = \frac{e^{x_1}}{2x_1} = \frac{1}{\ln 2}.$$

16.【答案】 $2^n(x+1)-1=0$

【解析】由题意, $f^{(n)}(x) = 2^n x + 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2^0 = 2^n x + \left(\frac{1-2^n}{1-2}\right) = 2^n(x+1)-1$,

所以 $f^{(100)}(32) = 33 \times 2^{100} - 1 = 33 \times 16^{25} - 1 = 33 \times (17-1)^{25} - 1$

$= 33(C_{25}^{25} 17^{25} - C_{25}^{24} 17^{24} + C_{25}^{23} 17^{23} - C_{25}^{22} 17^{22} + \dots + C_{25}^1 17 - 1) - 1$

$= 33(C_{25}^{25} 17^{25} - C_{25}^{24} 17^{24} + C_{25}^{23} 17^{23} - C_{25}^{22} 17^{22} + \dots + C_{25}^1 17) - 34$

$= 17[33(C_{25}^{25} 17^{24} - C_{25}^{24} 17^{23} + C_{25}^{23} 17^{22} - C_{25}^{22} 17^{21} + \dots + C_{25}^1) - 2]$.

又 $33(C_{25}^{25} 17^{24} - C_{25}^{24} 17^{23} + C_{25}^{23} 17^{22} - C_{25}^{22} 17^{21} + \dots + C_{25}^1) - 2$ 为正整数, 所以 $f^{(100)}(32)$ 除以 17 的余数为 0.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解: (1) 由 $2\cos\left(\frac{\pi}{3}-C\right) = 2\cos\frac{\pi}{3}\cos C + 2\sin\frac{\pi}{3}\sin C = \cos C + \sqrt{3}\sin C$, 1 分

所以 $\frac{b}{a} = \cos C + \sqrt{3}\sin C$, 故 $b = \sqrt{3}a\sin C + a\cos C$.

由正弦定理得 $\sin B = \sqrt{3}\sin A\sin C + \sin A\cos C$, 2 分

又 $B = \pi - (A+C)$,

所以 $\sin B = \sin[\pi - (A+C)] = \sin(A+C) = \sqrt{3}\sin A\sin C + \sin A\cos C$, 3 分

故 $\sin A\cos C + \cos A\sin C = \sin A\cos C + \sqrt{3}\sin A\sin C$, 所以 $\cos A = \sqrt{3}\sin A$, 4 分

所以 $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 所以 $A = \frac{\pi}{6}$ 5 分

(2) 由题意, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2} \times 2c \times \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, 所以 $c = 3\sqrt{3}$ 7 分

由余弦定理可得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bcc\cos A = 4 + 27 - 2 \times 2 \times 3\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 13$, 9 分

所以 $a = \sqrt{13}$ 10 分

18. 证明: (1) 因为 $a_1 = S_1 = 2a_1 - 4 \times 1 + 2$, 所以 $a_1 = 2, a_1 + 4 = 6$ 1 分

由 $S_n = 2a_n - 4n + 2$, 得 $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 4(n-1) + 2, n \geq 2$,

所以 $a_n = S_n - S_{n-1} = (2a_n - 4n + 2) - [2a_{n-1} - 4(n-1) + 2] = 2a_n - 2a_{n-1} - 4, n \geq 2$, 3 分

所以 $a_n = 2a_{n-1} + 4, n \geq 2$, 故 $\frac{a_n + 4}{a_{n-1} + 4} = 2, n \geq 2$, 4 分

所以数列 $\{a_n + 4\}$ 是以 6 为首项, 2 为公比的等比数列. 5 分

(2) 由(1)得 $a_n + 4 = 6 \times 2^{n-1} = 3 \times 2^n$, 故 $a_n = 3 \times 2^n - 4$, 6 分

所以 $a_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} - 4$,

故 $\frac{2^n}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{2^n}{(3 \times 2^n - 4) \cdot (3 \times 2^{n+1} - 4)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3 \times 2^n - 4} - \frac{1}{3 \times 2^{n+1} - 4} \right)$, 9 分

所以 $T_n = \frac{2}{a_1 \cdot a_2} + \frac{2^2}{a_2 \cdot a_3} + \dots + \frac{2^n}{a_n \cdot a_{n+1}}$

$= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} - \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{3 \times 2^n - 4} - \frac{1}{3 \times 2^{n+1} - 4} \right)$

$= \frac{1}{6} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{3 \times 2^{n+1} - 4} < \frac{1}{6}$ 12 分

19. (1) 证明: 如图, 过点 B 在平面 $ABCD$ 内作 BO 垂直于 AD , 交 DA 的延长线于点 O , 连接 OP 1 分

因为 $PB \perp BC, AD \parallel BC$, 所以 $PB \perp DO$.

又 $BO \perp DO, PB, BO \subset$ 平面 $POB, BO \cap PB = B$, 所以 $DO \perp$ 平面 POB 2 分

又 $PO \subset$ 平面 POB , 所以 $DO \perp PO$, 即 $AO \perp PO$.

因为 $\angle ADC = 45^\circ, AB \parallel DC$, 所以 $\angle OAB = 45^\circ$.

又 $OA \perp OB$, 所以 $\angle OBA = 45^\circ = \angle OAB$, 故 $OA = OB$ 3 分

因为 $\triangle PAB$ 为等边三角形, 所以 $PA = PB$.

又 $PO = PO$, 所以 $\triangle POA \cong \triangle POB$.

又 $PO \perp OA$, 所以 $PO \perp OB$ 4 分

又 $OA, OB \subset$ 平面 $ABCD, OA \cap OB = O$, 所以 $PO \perp$ 平面 $ABCD$,

所以点 O 为点 P 在平面 $ABCD$ 的正投影.

又点 O 在直线 AD 上, 故点 P 在平面 $ABCD$ 的正投影在直线 AD 上. 5 分

(2) 解: 由(1)得 PO, OB, OA 两两垂直, 以 O 为坐标原点, 分别以 OB, OA, OP 所在直线为 x, y, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$ 6 分

易得 $PO = OB = OA = \sqrt{2}$. 又 $AD = \sqrt{2}$,

所以 $B(\sqrt{2}, 0, 0), P(0, 0, \sqrt{2}), C(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), D(0, 2\sqrt{2}, 0)$,

故 $\vec{BC} = (0, \sqrt{2}, 0), \vec{PC} = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\sqrt{2}), \vec{DC} = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0)$.

..... 7 分

设 $n = (x_1, y_1, z_1)$ 为平面 PBC 的法向量, 则有 $\begin{cases} n \cdot \vec{BC} = 0, \\ n \cdot \vec{PC} = 0, \end{cases}$

即 $\begin{cases} \sqrt{2}y_1 = 0, \\ \sqrt{2}x_1 + \sqrt{2}y_1 - \sqrt{2}z_1 = 0, \end{cases}$ 可取 $n = (1, 0, 1)$ 9 分

设 $m = (x_2, y_2, z_2)$ 为平面 PDC 的法向量, 则有 $\begin{cases} m \cdot \vec{DC} = 0, \\ m \cdot \vec{PC} = 0, \end{cases}$

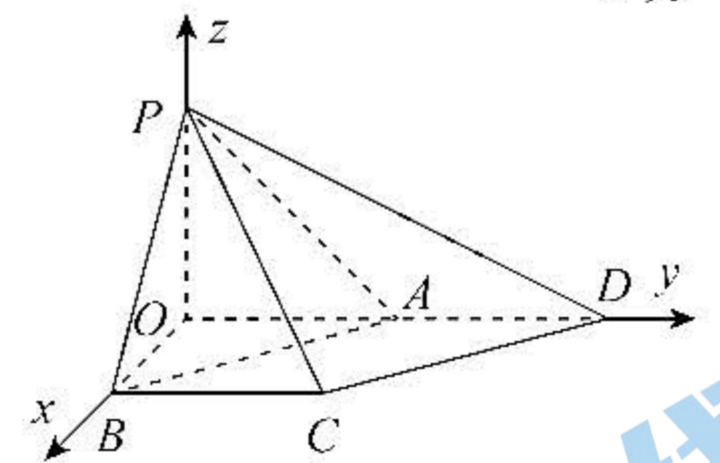
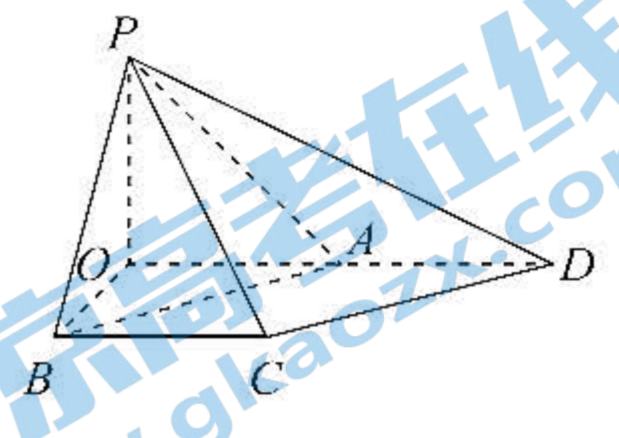
即 $\begin{cases} \sqrt{2}x_2 - \sqrt{2}y_2 = 0, \\ \sqrt{2}x_2 + \sqrt{2}y_2 - \sqrt{2}z_2 = 0, \end{cases}$ 可取 $m = (1, 1, 2)$, 10 分

所以 $|\cos \langle n, m \rangle| = \frac{|n \cdot m|}{|n| |m|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以平面 PBC 与平面 PDC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 12 分

20. 解: (1) 由频率分布直方图, 得 $\bar{x} = 0.8 \times 0.1 + 0.9 \times 0.2 + 1 \times 0.35 + 1.1 \times 0.3 + 1.2 \times 0.05 = 1$, 2 分

$s^2 = (0.8 - 1)^2 \times 0.1 + (0.9 - 1)^2 \times 0.2 + (1 - 1)^2 \times 0.35 + (1.1 - 1)^2 \times 0.3 + (1.2 - 1)^2 \times 0.05 = 0.011$ 4 分



(2) i. 由(1)可知 $\hat{\mu}=1, \hat{\sigma}=\sqrt{0.011} \approx 0.105$,

所以 $\hat{\mu}-3\hat{\sigma}=1-0.315=0.685, \hat{\mu}+3\hat{\sigma}=1+0.315=1.315$, 5分

显然 $1.33 > 1.315$, 故需停止生产并检查设备. 7分

ii. 抽测一个零件关键指标在 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 之内的概率为 0.9973 , 所以抽测一个零件关键指标在 $(\mu-3\sigma, \mu+3\sigma)$ 之外的概率为 $1-0.9973=0.0027$, 8分

故 $X \sim B(10, 0.0027)$, 所以 $P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0.9973^{10} \approx 0.0267$, 10分

X 的数学期望 $E(X) = 10 \times 0.0027 = 0.027$ 12分

21. 解: (1) 由题意得 $\frac{c}{a} = \frac{1}{2}$ 1分

由椭圆的定义可知 $4a=8$, 所以 $a=2$, 所以 $c=1$ 2分

又 $a^2=b^2+c^2$, 所以 $b^2=3$, 3分

所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 4分

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 直线 l 的方程为 $x=my+1$,

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ x = my + 1, \end{cases} \text{整理得 } (3m^2 + 4)y^2 + 6my - 9 = 0,$$

则有 $y_1 + y_2 = \frac{-6m}{3m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2 + 4}$, 6分

$$\text{故 } |AB| = \sqrt{(1+m^2)[(y_1+y_2)^2 - 4y_1 y_2]} = \sqrt{(1+m^2)\left[\left(\frac{-6m}{3m^2+4}\right)^2 + \frac{36}{3m^2+4}\right]} = 12 \times \frac{m^2+1}{3m^2+4}.$$

..... 7分

直线 l' 的方程为 $x = -\frac{1}{m}y - 1$, 设 $C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$,

$$\text{由} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \\ x = -\frac{1}{m}y - 1, \end{cases} \text{整理得 } \left(\frac{3}{m^2} + 4\right)y^2 + \frac{6}{m}y - 9 = 0,$$

则有 $y_3 + y_4 = \frac{-\frac{6}{m}}{\frac{3}{m^2} + 4}, y_3 y_4 = \frac{-9}{\frac{3}{m^2} + 4}$, 8分

$$\text{则 } |CD| = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{m^2}\right)[(y_3+y_4)^2 - 4y_3 y_4]} = 12 \times \frac{\frac{1}{m^2} + 1}{\frac{3}{m^2} + 4} = 12 \times \frac{m^2+1}{4m^2+3}, \text{ 9分}$$

所以四边形 $ACBD$ 的面积

$$S = \frac{1}{2} |AB| |CD| = 72 \times \frac{m^2+1}{3m^2+4} \times \frac{m^2+1}{4m^2+3} = 72 \times \frac{m^2+1}{3(m^2+1)+1} \times \frac{m^2+1}{4(m^2+1)-1} = \frac{72}{\left(3 + \frac{1}{m^2+1}\right)\left(4 - \frac{1}{m^2+1}\right)}, \text{ 10分}$$

$7 \geq 2\sqrt{\left(3 + \frac{1}{m^2+1}\right)\left(4 - \frac{1}{m^2+1}\right)}$, 当且仅当 $m^2=1$ 时, 等号成立, 11 分

所以 $S = \frac{72}{\left(3 + \frac{1}{m^2+1}\right)\left(4 - \frac{1}{m^2+1}\right)} \geq \frac{288}{49}$,

综上, 四边形 ACBD 面积的最小值为 $\frac{288}{49}$ 12 分

22. (1) 证明: $f(0) = e^0 + \cos 0 - 2 = 0$, 1 分

当 $x < 0$ 时, $e^x < 1$, $\cos x \leq 1$, 所以 $e^x + \cos x < 2$,

故 $e^x + \cos x - 2 < 0$, 故 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上无零点, 2 分

当 $x \geq 0$ 时, $f'(x) = e^x - \sin x$,

$e^x \geq 1$, $-\sin x \geq -1$, 所以 $f'(x) = e^x - \sin x \geq 0$, 3 分

所以当 $x \geq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 单调递增, 所以 $f(x) \geq f(0) = 0$,

故函数 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上有唯一零点 0.

综上, 函数 $f(x)$ 在定义域上有唯一零点. 4 分

(2) 解: 由 $f(x) > ax - \sin x$, 得 $e^x + \cos x - 2 > ax - \sin x$, 即 $e^x + \sin x + \cos x - 2 - ax > 0$.

设 $g(x) = e^x + \sin x + \cos x - 2 - ax$, 则 $g'(x) = e^x + \cos x - \sin x - a$,

则 $g''(x) = e^x - \sin x - \cos x$ 5 分

设 $h(x) = e^x - x - 1$, 则 $h'(x) = e^x - 1$, 当 $x > 0$ 时, $h'(x) > 0$,

所以函数 $h(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 故在区间 $(0, +\infty)$ 上, $h(x) > h(0) = 0$,

即在区间 $(0, +\infty)$ 上 $e^x > x + 1$ 6 分

设函数 $p(x) = x - \sin x$, 则 $p'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, 所以函数 $p(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

故在区间 $(0, +\infty)$ 上 $p(x) > p(0) = 0$, 即在区间 $(0, +\infty)$ 上, $x > \sin x$, 7 分

所以在区间 $(0, +\infty)$ 上, $e^x > x + 1 > \sin x + \cos x$, 即 $g''(x) = e^x - \sin x - \cos x > 0$,

所以在区间 $(0, +\infty)$ 上函数 $g'(x)$ 单调递增. 8 分

当 $a \leq 2$ 时, $g'(0) = 2 - a \geq 0$, 故在区间 $(0, +\infty)$ 上函数 $g'(x) > 0$,

所以函数 $g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

又 $g(0) = 0$, 故 $g(x) > 0$, 即函数 $f(x) > ax - \sin x$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上恒成立. 9 分

当 $a > 2$ 时,

$g'(0) = 2 - a < 0$,

$g'[\ln(a+2)] = a + 2 + \cos[\ln(a+2)] - \sin[\ln(a+2)] - a = 2 - \sqrt{2} \sin\left(\ln(a+2) - \frac{\pi}{4}\right) > 0$,

在区间 $(0, \ln(a+2))$ 上函数 $g'(x)$ 存在零点 x_0 10 分

又在区间 $(0, +\infty)$ 上函数 $g'(x)$ 单调递增,

故在区间 $(0, x_0)$ 上函数 $g'(x) < 0$, 所以在区间 $(0, x_0)$ 上函数 $g(x)$ 单调递减.

又 $g(0) = 0$, 所以在区间 $(0, x_0)$ 上函数 $g(x) < 0$, 与题设矛盾. 11 分

综上, a 的取值范围为 $(-\infty, 2]$ 12 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯