2024 届高三一轮复习联考(二) 全国卷

理 科 数 学 试 题

注意事项：

1.答卷前，考生务必将自己的姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上。

2.回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

考试时间为 120 分钟，满分 150 分

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1.若复数 $z=(1+i^3)(i+i^2)$，则 $\overline{z}=$

A.2i　　B.$-2i$　　C.$2-i$　　D.$2+i$

2.已知全集 $U=R$，集合 $A=\{x|$[illegible]$\}$，$B=\{x|x-2<0\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=$

A.$\{x|x>2\}$

B.$\{x|$[illegible]$x\leqslant 2\}$

C.$\{x|1\leqslant$[illegible]$\}$

D.$\{x|$[illegible]$\}$

3.命题“$\exists x_0>1, x_0-2\ln x_0\leqslant 1$”的否定为

A.$\forall x>1, x-2\ln x\leqslant 1$

B.$\exists x_0\leqslant 1, x_0-2\ln x_0>1$

C.$\forall x>1, x-2\ln x>1$

D.$\exists x_0\leqslant 1, x_0-2\ln x_0\leqslant 1$

4.已知 x,y 是实数，点 (x,y) 在以点 $A(0,8)$，$B(8,12)$，$C(2,3)$ 为顶点的三角形区域上(包括边界)，则目标函数 $z=2x+3y$ 的最大值为

A.20　　B.24　　C.36　　D.52

5.已知 a,b 均为正数，则“不等式 $a+b\geqslant 2$ 成立”是“不等式 $ab\geqslant 1$ 成立”的

A.充分不必要条件

B.必要不充分条件

C.充要条件

D.既不充分也不必要条件

6.$\triangle ABC$ 中，$|\overrightarrow{AB}|=2$，$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，点 D 满足 $\overrightarrow{CB}=\lambda\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=5$，则 $\lambda=$

A.1　　B.2　　C.4　　D.5

7.已知函数 $f(x)=\frac{1}{e^x-1}+a$，若 $f(-x)=-f(x)$，则 a 的值为

A.-1　　B.1　　C.$\frac{1}{2}$　　D.$-\frac{1}{2}$

8.已知 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{3}$，若 $a=\frac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}$，$b=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta$，$c=\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta$，则 a,b,c 的大小关系是

A.$c>a>b$　　B.$b>c>a$

C.$c>b>a$　　D.$b>a>c$

9.已知△ABC 的外接圆面积为 4π，三边成等比数列，则△ABC 的面积的最大值为

3　　B.$4\sqrt{3}$　　C.8　　D.4

10.已知函数 $f(x)=ae^x-x^2+b$ 是增函数，则实数 a 的取值范围是

$\left(\frac{2}{e},+\infty\right)$　　B.$[1,+\infty)$　　C.$\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$　　D.$[2,+\infty)$

11.已知方程 x^2+mx [illegible] 0 有两个不相等的实数根 $\sin\theta,\cos\theta$，其中 $0\leqslant\theta<2\pi$，则

A.$\tan\theta=1$　　B.$\sin 2\theta=1$　　$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=0$　　D.$m=-1$

12.已知函数 $f(x)=|\ln(2-x)|+|\ln(2+x)|$，则函数 $f(x)$ 的最小值是

A.0　　B.1　　C.$\ln 2$　　D.$\ln 3$

二、填空题：本题共 4 小题 每小题 5 分，共 20 分。

13.已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,x)$，$\boldsymbol{b}=(2x,-2)$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同，则 $x=$________.

14.在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，若 $\cos C=\frac{b}{2a}$，$\cos B=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，则角 $A=$________

15.等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $\frac{S_4}{S_2}=3$，则 $\frac{a_4}{a_2}=$____

16.把函数 $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变，然后再把所得到的图象上所有点向右平行移动 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到函数 $y=g(x)$ 的图象，则函数 $y=f(x)+g(x)$ 的最小值为________.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17～21 题为必考题,每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题,考生根据要求作答。

(一)必考题:60 分。

17.(12 分)已知数列$\{a_n\}$的首项$a_1=1$,a_n是a_{n+1}与-1的等差中项.

(1)求a_2和a_3的值;

(2)求数列$\{a_n\}$的通项公式.

18.(12 分)在$\triangle ABC$中,角A,B,C的对边分别为a,b,c,$A=\frac{\pi}{6}$,$\sin^2 B-\sin^2 A=\sin A\sin C$.

(1)判断$\triangle ABC$的形状,并给出证明;

(2)若$c=2$,点D在边AC上,且$\triangle ABD$的周长为$\frac{7+3\sqrt{3}}{3}$,求$\triangle BCD$的面积.

19.(12 分)已知数列$\{a_n\}$中a_2 5,其前n项和为S_n,满足 [illegible]

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)求数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

20.(12 分)已知函数$f(x)=x+\ln x$,$g(x)=e^x\ln x+a$,且函数$f(x)$的零点是函数$g(x)$的零点.

(1)求实数a的值;

(2)证明:$y=g(x)$有唯一零点.

21.(12分)已知函数 $f(x)=e^x[(a-1)x+1]$.

(1)当 $a=2$ 时,求函数 $y=f(x)$ 的图象在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;

(2)对任意 $x\leqslant 0$,有 $f(x)\geqslant ax+1$,求实数 a 的取值范围.

选考题:共10分。请考生在第22、23题中任选一题作答。如果多做,则按所做的第一题

22.[选修4—4:坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系 xOy 中,抛物线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=4t^2\\ y=4t\end{cases}$ (t 为参数),以坐标原点为极点,x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=\dfrac{1}{\cos\theta-m\sin\theta}(m\neq 1)$.

(1)求曲线 C_1 的直角坐标方程;

(2)设曲线 C_1 交曲线 C 于 A,B 两点,直线 OA、OB 的斜率分别为 k_1,k_2,求 $|k_1-k_2|$ 的最小值.

23.[选修4—5:不等式选讲](10分)

已知实数 a,b,c,满足 $a>0,b>0,c>0$,且 $abc=1$.

(1)若 $a=2b+c$,求实数 a 的最小值;

(2)求证:$\dfrac{1}{bc}+\dfrac{2}{ac}+\dfrac{1}{ab}\geqslant\dfrac{2}{\sqrt{a}}+\dfrac{2}{\sqrt{c}}$.

2024届高三一轮复习联考(二)　全国卷

理科数学参考答案及评分意见

1.B 【解析】$z=(1+i^3)(i+i^2)=(1-i)(i-1)=2i$，所以$\overline{z}=-2i$，故选 B.

2.C 【解析】$\complement_U A=\{x\,|\,x\geqslant 1\}$，$B=\{x\,|\,x<2\}$，则$(\complement_U A)\cap B=\{x\,|\,1\leqslant x<2\}$.故选 C.

3.C 【解析】根据特称命题：$\exists x_0\in M$，$p(x_0)$的否定形式是全称命题：$\forall x\in M$，$\neg p(x)$，可知“$\exists x_0>1$，有 $x_0-2\ln x_0\leqslant 1$”的否定为“$\forall x>1$，有 $x-2\ln x>1$”，故选 C.

4.D 【解析】本题为线性规划问题，目标函数的最值在三角形区域的顶点处取得.将 A、B、C 的坐标依次代入目标函数，得 z 的值分别为 24，52，13，因此目标函数 $z=2x+3y$ 在点 B 取得最大值，即$z_{\max}=52$.故选 D.

5.B 【解析】若 $ab\geqslant 1$，则 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}\geqslant 2$，当且仅当 $a=b$，$ab=1$，即 $a=1$，$b=1$ 时，等号成立，因此若不等式 $ab\geqslant 1$ 成立，则不等式 $a+b\geqslant 2$ 成立；反过来，若 $a+b\geqslant 2$ 成立，取 $a=2$，$b=\frac{1}{4}$满足条件，但是 $ab=\frac{1}{2}$，则不等式 $ab\geqslant 1$ 不成立.因此不等式 $a+b\geqslant 2$ 成立是不等式 $ab\geqslant 1$ 成立的必要不充分条件，故选 B.

6.C 【解析】$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AB}-\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AC}$，根据$\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$，得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\left[\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AB}-\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AC}\right]\cdot\overrightarrow{AB}=\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\overrightarrow{AB}^2-\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=4\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)$，又$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=5$，所以 $4\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)=5$，$\lambda=4$，故选 C.

7.C 【解析】根据题意，函数 $f(x)=\frac{1}{e^x-1}+a$，其定义域为$\{x\,|\,x\neq 0\}$，由 $f(-x)=-f(x)$，即$\left(\frac{1}{e^{-x}-1}+a\right)+\left(\frac{1}{e^x-1}+a\right)=-1+2a=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$，故选 C.

8.C 【解析】$a=\frac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2+1}=\sin\theta\cdot\cos\theta$，$b=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\theta=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(1-2\sin^2\theta)=\sin\theta\cdot\sin\theta\cdot$ $\sin\theta$，$c=\frac{1}{\cos\theta}-\cos\theta=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=\sin\theta\cdot\tan\theta$，根据$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{3}$，得 $\tan\theta>1$，$1>\sin\theta>\cos\theta>0$，即 $\tan\theta>\sin\theta>\cos\theta$，$\sin\theta\cdot\tan\theta>\sin\theta\cdot\sin\theta>\sin\theta\cdot\cos\theta$，即 $c>b>a$，故选 C.

9.A 【解析】$\triangle ABC$ 的外接圆面积为 4π，所以外接圆半径为 2，不妨设三边 a，b，c 成等比数列，则 $b^2=ac$.又$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}\geqslant\frac{2ac-ac}{2ac}=\frac{1}{2}$，当且仅当 $a=c$ 时等号成立，所以 $0<B\leqslant\frac{\pi}{3}$，又$\frac{b}{\sin B}=4$，所以$\triangle ABC$的面积$S=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}b^2\sin B=8\sin^3 B\leqslant 8\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=3\sqrt{3}$，故选 A.

10.A 【解析】$f'(x)=ae^x-2x$，根据 $f(x)=ae^x-x^2+b$ 是增函数，得 $f'(x)\geqslant 0$，即 $ae^x-2x\geqslant 0$，$a\geqslant\frac{2x}{e^x}$.令 $g(x)=\frac{2x}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{2e^x(1-x)}{(e^x)^2}=\frac{2(1-x)}{e^x}$，当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，当 $x<1$ 时，$g'(x)>0$，所以 $g(x)$在$(-\infty,1)$上是增函数，在$(1,+\infty)$上是减函数，故 $g(x)$有最大值 $g(1)=\frac{2}{e}$，因此 $a\geqslant\frac{2}{e}$，实数 a 的最小值是$\frac{2}{e}$，即 a 的取值范围是$\left[\frac{2}{e},+\infty\right)$.故选 A.

11.C 【解析】$x^2+m=0$ 有两个不等的实数根 $\sin\theta,\cos\theta$，则 $\sin^2\theta+m=0,\cos^2\theta+m=0$，根据 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，得 $1+2m=0,m=-\frac{1}{2}$，故 D 不正确；于是 $\sin^2\theta=\frac{1}{2},\cos^2\theta=\frac{1}{2}$，因为 $\sin\theta\neq\cos\theta$，所以 $\begin{cases}\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\sin\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2},\\ \cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$ 于是 $\tan\theta=-1$，故 A 不正确；$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=-1$，故 B 不正确；$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta+\cos\theta)=0$，故 C 正确.故选 C.

12.D 【解析】由 $\begin{cases}2-x>0,\\ 2+x>0,\end{cases}$ 得 $-2<x<2$，所以函数 $f(x)$ 的定义域是 $(-2,2)$. $f(-x)=|\ln(2+x)|+|\ln(2-x)|=|\ln(2-x)|+|\ln(2+x)|=f(x)$，所以 $f(x)$ 是偶函数，由于函数 $f(x)$ 是偶函数，图象关于 y 轴对称，所以考虑 $0<x<2$，于是 $\ln(2+x)>0$. 当 $0<x<1$ 时，$\ln(2-x)>0$，$f(x)=\ln(2-x)+\ln(2+x)=\ln(4-x^2)$，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 是减函数，当 $1<x<2$ 时，$\ln(2-x)<0$，$f(x)=-\ln(2-x)+\ln(2+x)=\ln\frac{2+x}{2-x}=\ln\left(-1+\frac{4}{2-x}\right)$，$f(x)$ 在 $(1,2)$ 是增函数，因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 时有最小值 $f(1)=\ln 3$.故选 D.

13.$-\sqrt{2}$ 【解析】由向量 $\boldsymbol{a}=(2,x)$，$\boldsymbol{b}=(-2x,-2)$，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同，得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，且 $\lambda>0$，则 $\begin{cases}2=-2x\lambda,\\ x=-2\lambda,\end{cases}$ 得 $x=-\sqrt{2}$.

14.$\frac{\pi}{12}$ 【解析】根据 $\cos C=\frac{b}{2a}$，以及余弦定理，得 $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{b}{2a}\Rightarrow a=c$，所以△$ABC$ 为等腰三角形，即 $A=C$，由 $\cos B=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $B=\frac{5}{6}\pi$，所以 $A=\frac{\pi}{12}$.

15.2 【解析】设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，显然 $q\neq1$，$\frac{S_4}{S_2}=\frac{\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}}{\frac{a_1(1-q^2)}{1-q}}=\frac{1-q^4}{1-q^2}=1+q^2=3$，所以 $q^2=2$，$\frac{a_4}{a_2}=\frac{a_2q^2}{a_2}=q^2=2$.

16.$-\frac{9}{8}$ 【解析】把函数 $y=f(x)$ 的图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变，得到 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，然后再把所得到的图象上所有点向右平行移动 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度，得到 $y=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{12}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，即 $g(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，得 $y=f(x)+g(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$，令 $t=x+\frac{\pi}{3}$，则 $x=t-\frac{\pi}{3}$，$y=\sin t+\sin\left[2\left(t-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\sin t+\sin\left(2t-\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\sin t+\sin\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)=\sin t-\cos 2t=\sin t-(1-2\sin^2 t)=2\sin^2 t+\sin t-1$. 令 $\sin t=m$，$-1\leqslant m\leqslant1$，则 $y=f(x)+g(x)$ 可化为 $y=2m^2+m-1=2\left(m+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{9}{8}$，当 $m=-\frac{1}{4}$，即 $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{4}$ 时，$y_{\min}=-\frac{9}{8}$.

17.解：(1)由 a_n 是 a_{n+1} 与 -1 的等差中项，得 $2a_1=a_2-1$，$a_2=3$，………………………………… 2 分

$2a_2=a_3-1$，$a_3=7$，…………………………………………………………………………… 4 分

(2)$a_{n+1}=2a_n+1$,$(a_{n+1}+1)=2(a_n+1)$,………………………………………………………………………… 6 分

$a_1=1$,$a_1+1=2\neq0$,

所以$\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=2$,………………………………………………………………………………………… 8 分

因此数列$\{a_n+1\}$是以 2 为首项,2 为公比的等比数列.……………………………………………………… 10 分

从而 $a_n+1=2\cdot2^{n-1}=2^n$,

所以 $a_n=2^n-1$,$n\in\mathbf{N}^*$.……………………………………………………………………………………… 12 分

18.**解**:(1)△ABC 为直角三角形,证明如下:由正弦定理,及 $\sin^2B-\sin^2A=\sin A\sin C$,得 $b^2-a^2=ac$,…… 2 分

根据 $A=\frac{\pi}{6}$以及余弦定理,得 $a^2=b^2+c^2-2bc\times\frac{\sqrt{3}}{2}$,即 $a^2=b^2+c^2-\sqrt{3}bc$,……………………………… 4 分

所以 $ac+c^2-\sqrt{3}bc=0$,$b=\frac{a+c}{\sqrt{3}}$,于是$\left(\frac{a+c}{\sqrt{3}}\right)^2=a^2+ac$,$2a^2+ac-c^2=0$,$(2a-c)(a+c)=0$,

所以 $c=2a$,$b^2=a^2+2a^2=3a^2$,因此 $c^2=a^2+b^2$,△ABC 为直角三角形.…………………………………… 6 分

(2)由 $c=2$,以及由(1)得 $c=2a$,$b=\sqrt{3}a$,$\angle C=90°$,可得 $a=1$,$b=\sqrt{3}$,…………………………………… 8 分

设 $CD=x(0\leqslant x\leqslant\sqrt{3})$,则 $BD=\sqrt{x^2+1}$,$AD=\sqrt{3}-x$,且由△ABD 的周长为$\frac{7+3\sqrt{3}}{3}$,

得 $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{3}-x+2=\frac{7+3\sqrt{3}}{3}$,$\therefore\sqrt{x^2+1}=x+\frac{1}{3}$,解得 $x=\frac{4}{3}$,…………………………………… 10 分

所以 $CD=\frac{4}{3}$,△BCD 面积为$\frac{1}{2}BC\times CD=\frac{1}{2}\times1\times\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$.…………………………………………… 12 分

19.**解**:(1)由 $S_n=\frac{(3+a_n)n}{2}$,得 $2S_n=(3+a_n)n$,当 $n\geqslant2$ 时,$2S_{n-1}=(n-1)(a_{n-1}+3)$,根据 $a_n=S_n-S_{n-1}$,

得 $2a_n=n(a_n+3)-(n-1)(a_{n-1}+3)$,即$(n-2)a_n-(n-1)a_{n-1}=-3$.……………………………………………… 2 分

当 $n\geqslant3$ 时,$\frac{a_n}{n-1}-\frac{a_{n-1}}{n-2}=\frac{-3}{(n-1)(n-2)}$,即$\frac{a_n}{n-1}-\frac{a_{n-1}}{n-2}=3\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-2}\right)$,……………………………… 4 分

所以$\frac{a_3}{2}-\frac{a_2}{1}=3\left(\frac{1}{2}-1\right)$,

$\frac{a_4}{3}-\frac{a_3}{2}=3\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)$,

$\frac{a_5}{4}-\frac{a_4}{3}=3\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\right)$,

……

$\frac{a_n}{n-1}-\frac{a_{n-1}}{n-2}=3\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n-2}\right)$,

分别相加,得$\frac{a_n}{n-1}-\frac{a_2}{1}=3\left(\frac{1}{n-1}-1\right)$,又 $a_2=5$,所以$\frac{a_n}{n-1}-5=3\left(\frac{1}{n-1}-1\right)$,即 $a_n=2n+1(n\geqslant3)$,当 $n=1$ 时,$2a_1=a_1+3$,$a_1=3$,所以 $a_1=3$,$a_2=5$ 符合上式,所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n+1$,$n\in\mathbf{N}^*$. … 6 分

(2)由(1)知 $a_n=2n+1$,所以 $S_n=\frac{(3+a_n)n}{2}=n(n+2)$,$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$,

$T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\cdots\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}$. ………………………………………… 12 分

20.**解**:(1)$f(x)$,$g(x)$的定义域为$x\in(0,+\infty)$.设函数$f(x)$的零点为x_0,$x_0>0$,则$x_0+\ln x_0=0$,$\ln x_0=-x_0$,

$e^{-x_0}=x_0$,$e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$. ………………………………………… 2 分

$g(x_0)=e^{x_0}\ln x_0+a=\frac{1}{x_0}\times(-x_0)+a=-1+a$,因为函数$f(x)$的零点是函数$g(x)$的零点,所以$g(x_0)=0$,

因此$a=1$. ………………………………………… 6 分

(2)$g'(x)=e^x\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}=e^x\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$,令$h(x)=\ln x+\frac{1}{x}$,则$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$,令$h'(x)>0$,得$x>1$,令$h'(x)<0$,则$0<x<1$,所以$h(x)$在$(0,1)$是减函数,在$(1,+\infty)$是增函数. ………………………………………… 8 分

所以$h(x)$有最小值$h(1)=1>0$,即$h(x)>0$,

于是$g'(x)=e^xh(x)>0$,所以$g(x)$在$(0,+\infty)$是增函数,

由$g\left(\frac{1}{e}\right)=e^{\frac{1}{e}}\ln\frac{1}{e}+1=1-e^{\frac{1}{e}}<1-e^0=0$,$g(1)=1>0$,所以$g(x)$有唯一零点. ………………………………………… 12 分

21.**解**:(1)当$a=2$时,$f(x)=e^x(x+1)$,$f(0)=1$. ………………………………………… 1 分

$f'(x)=e^x(x+2)$,$f'(0)=2$, ………………………………………… 2 分

函数$y=f(x)$的图象在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y-1=2(x-0)$,即$2x-y+1=0$. ………………………………………… 4 分

(2)对任意$x\leqslant0$,有$f(x)\geqslant ax+1$,即$e^x[(a-1)x+1]-ax-1\geqslant0$,令$g(x)=e^x[(a-1)x+1]-ax-1$,则有对任意$x\leqslant0$,$g(x)\geqslant0$. ………………………………………… 5 分

$g'(x)=e^x[(a-1)x+a]-a=(a-1)xe^x+a(e^x-1)$,

当$a\geqslant1$,且$x\leqslant0$时,$(a-1)xe^x\leqslant0$以及$a(e^x-1)\leqslant0$,所以$g'(x)\leqslant0$,所以$g(x)$在$(-\infty,0)$是减函数,对任意$x\leqslant0$,有$g(x)\geqslant g(0)=0$,符合题意; ………………………………………… 7 分

令$h(x)=g'(x)=(a-1)xe^x+a(e^x-1)$,则$h'(x)=e^x[(a-1)x+2a-1]$,

当$a<\frac{1}{2}$时,$\frac{1-2a}{a-1}<0$,令$h'(x)<0$,即$e^x[(a-1)x+2a-1]<0$,$(a-1)x+2a-1<0$,$\frac{1-2a}{a-1}<x\leqslant0$,

所以$h(x)$在$\left(\frac{1-2a}{a-1},0\right]$是减函数,当$\frac{1-2a}{a-1}<x<0$时,有$h(x)>h(0)=0$,即$g'(x)>0$,

所以$g(x)$在$\left(\frac{1-2a}{a-1},0\right)$是增函数,当$\frac{1-2a}{a-1}<x<0$时,$g(x)<g(0)=0$,这与$\forall x\leqslant0$,$g(x)\geqslant0$矛盾,不符合题意; ………………………………………… 9 分

当$\frac{1}{2}\leqslant a<1$时,$a-1<0$,$2a-1\geqslant0$,当$x\leqslant0$时,$(a-1)x+2a-1\geqslant0$,$h'(x)\geqslant0$,所以$h(x)$在$(-\infty,0]$是增函数,$h(x)\leqslant h(0)=0$,即$g'(x)\leqslant0$,所以$g(x)$在$(-\infty,0]$是减函数,对任意$x\leqslant0$,有$g(x)\geqslant g(0)=0$,符合题意.

因此实数a的取值范围是$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$. ………………………………………… 12 分

22.**解**:(1)$\rho=\frac{1-m}{\cos\theta-m\sin\theta}$可化为$\rho\cos\theta-\rho m\sin\theta=1-m$,把$x=\rho\cos\theta$,$y=\rho\sin\theta$代入,得$x-my-1+m=0$,

所以曲线C_1的直角坐标方程为$x-my-1+m=0(m\neq1)$. ………………………………………… 5 分

(2)把$\begin{cases}x=4t^2\\y=4t\end{cases}$代入$x-my-1+m=0$，得$4t^2-4mt-1+m=0$，$\Delta=16m^2-16(-1+m)=16(m^2-m+1)=16\left[\left(m-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]>0$，设$A(4t_1^2,4t_1)$，$B(4t_2^2,4t_2)$，所以$t_1+t_2=m$，$t_1\cdot t_2=\frac{m-1}{4}$，$k_1=\frac{1}{t_1}$，$k_2=\frac{1}{t_2}$，

$|k_1-k_2|=\left|\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_2}\right|=\left|\frac{t_2-t_1}{t_1t_2}\right|=\frac{\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}}{|t_1t_2|}=\frac{4\sqrt{m^2-m+1}}{|m-1|}=4\sqrt{\frac{m^2-m+1}{(m-1)^2}}$，

令$m-1=n$，则$m=n+1$，$|k_1-k_2|=4\sqrt{\frac{n^2+n+1}{n^2}}=4\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}+1}=4\sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\geqslant2\sqrt{3}$.

当$\frac{1}{n}=-\frac{1}{2}$，即$n=-2$，$m=-1$时，此时$|k_1-k_2|$有最小值$2\sqrt{3}$. …………………………………… 10 分

23.(1)**解**：$a=2b+c\geqslant2\sqrt{2bc}$，又$abc=1$，所以$bc=\frac{1}{a}$，于是$a\geqslant2\sqrt{\frac{2}{a}}$，…………………………………… 2 分

两边平方，得$a^2\geqslant\frac{8}{a}$，$a^3\geqslant8$，$a\geqslant2$，当$a=2$，$2b=c$，即$a=2$，$b=\frac{1}{2}$，$c=1$时，a有最小值 2. ……………… 5 分

(2)**证明**：由$abc=1$，得$\frac{1}{bc}+\frac{2}{ac}+\frac{1}{ab}=\frac{abc}{bc}+\frac{2abc}{ac}+\frac{abc}{ab}=a+2b+c=a+b+b+c$. …………………… 6 分

又$a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，$b+c\geqslant2\sqrt{bc}$，所以$a+b+b+c\geqslant2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}$，

根据$abc=1$，得$ab=\frac{1}{c}$，$bc=\frac{1}{a}$，…………………………………………………………………… 8 分

所以$2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}=\frac{2}{\sqrt{c}}+\frac{2}{\sqrt{a}}$，

因此有$a+b+b+c\geqslant\frac{2}{\sqrt{c}}+\frac{2}{\sqrt{a}}$，于是$\frac{1}{bc}+\frac{2}{ac}+\frac{1}{ab}\geqslant\frac{2}{\sqrt{a}}+\frac{2}{\sqrt{c}}$，当且仅当$a=b=c$时，等号成立. ………… 10 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！