2019 北京市清华附中高三三模

数　　学（文）

一、选择题（本大题共 8 小题，共 40.0 分）

1. 若集合$\{x|2^x>2\sqrt{2}\}=\{x|log_{\frac{1}{2}}(x-a)<0\}$，则实数 a 的值为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2　　C. $\frac{3}{2}$　　D. 1

2. 已知数据 x_1，x_2，x_3，…，x_n是某市 n（$n\geqslant3$，$n\in N^*$）个普通职工的年收入，设这 n 个数据的中位数为 x，平均数为 y，标准差为 z，如果再加上世界首富的年收入 x_{n+1}，则这（$n+1$）个数据中，下列说法正确的是（　　）

A. 年收入平均数可能不变，中位数可能不变，标准差可能不变
B. 年收入平均数大大增大，中位数可能不变，标准差变大
C. 年收入平均数大大增大，中位数可能不变，标准差也不变
D. 年收入平均数大大增大，中位数一定变大，标准差可能不变

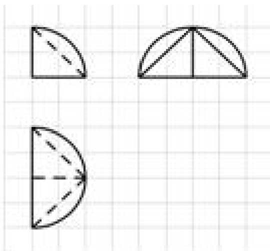
3. 若椭圆的两个焦点与短轴的一个端点构成一个正三角形，则该椭圆的离心率为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$　　D. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}log_2x, & x\geq1\\ \frac{1}{1-x}, & x<1\end{cases}$，则不等式 $f(x)\leqslant1$ 的解集为（　　）

A. $(-\infty,2]$　　B. $(-\infty,0]\cup(1,2]$　　C. $[0,2]$　　D. $(-\infty,0]\cup[1,2]$

5. 如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗线画出的是某几何体的三视图，则该几何体的体积为（　　）



A. $\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}$
B. $\frac{\pi}{3}-\frac{1}{3}$
C. $\frac{8\pi}{3}-\frac{16}{3}$
D. $\frac{8\pi}{3}-\frac{8}{3}$

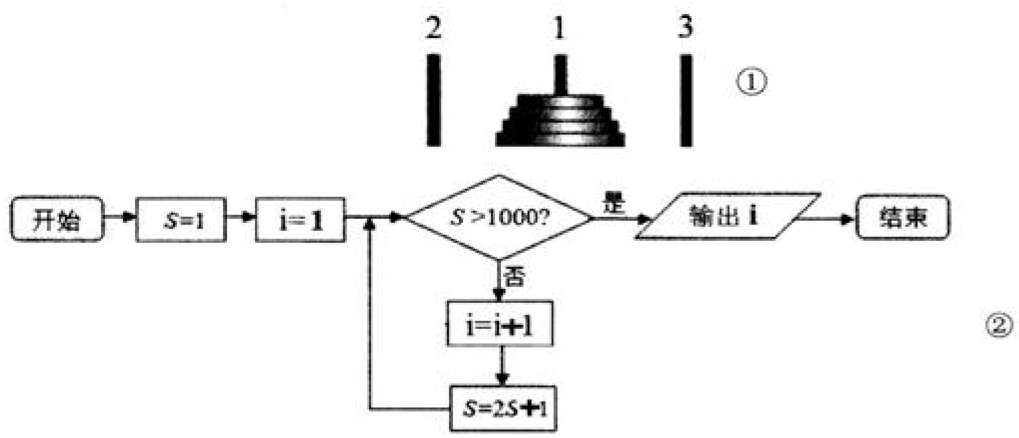
6. 在数列$\{a_n\}$中，已知 $a_1=1$，且对于任意的 m，$n\in N^*$，都有 $a_{m+n}=a_m+a_n+mn$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为（　　）

A. $a_n=n$　　B. $a_n=n+1$　　C. $a_n=\frac{n(n-1)}{2}$　　D. $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$

7. 若椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 和双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 的共同焦点为 F_1，F_2，P 是两曲线的一个交点，则$|PF_1|\cdot|PF_2|$的值为（　　）

A. $\frac{21}{2}$　　B. 84　　C. 3　　D. 21

8. 如图①，一块黄铜板上插着三根宝石针，在其中一根针上从下到上穿好由大到小的若干金片．若按照下面的法则移动这些金片：每次只能移动一片金片；每次移动的金片必须套在某根针上；大片不能叠在小片上面．设移完 n 片金片总共需要的次数为 a_n，可推得 $a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+1$．如图②是求移动次数在 1000 次以上的最小片数的程序框图模型，则输出的结果是（　　）



A. 8　　B. 9　　C. 10　　D. 11

二、填空题（本大题共 6 小题，共 30.0 分）

9. 已知向量$\vec{a}=(1，2)$，$\vec{b}=(x，1)$，$\vec{c}=(1，3)$，若$(\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{c}$，则 x=______.

10. 在△ABC 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，S 为△ABC 的面积，sin（A+C）$=\frac{2S}{b^2-c^2}$，且 A，B，C 成等差数列，则 C 的大小为______.

11. 设 θ 为第二象限角，若 tan（θ$+\frac{\pi}{4}$）$=\frac{1}{2}$，则 sinθ+cosθ=______.

12. 已知$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$为单位向量且夹角为$\frac{2\pi}{3}$，设$\vec{a}=3\overrightarrow{e_1}+2\overrightarrow{e_2}$，$\vec{b}=3\overrightarrow{e_2}$，则$\vec{a}$在$\vec{b}$方向上的投影为______.

13. 《中国诗词大会》（第三季）亮点颇多，在“人生自有诗意”的主题下，十场比赛每场都有一首特别设计的开场诗词在声光舞美的配合下，百人团齐声朗诵，别有韵味，若《沁园春•长沙》、《蜀道难》、《敕勒歌》、《游子吟》、《关山月》、《清平乐•六盘山排在后六场，且《蜀道难》排在《游子吟》的前面，《沁园春•长沙》与《清平乐•六盘山》不相邻且均不排在最后，则六场的排法有______种．（用数字作答）．

14. 若直线 $y=x+1$ 是曲线 $f(x)=x+\frac{1}{x}-alnx$（$a\in R$）的切线，则 a 的值是______.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80.0 分）

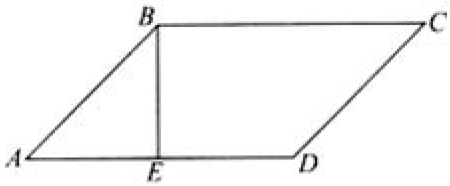
15. 在△ABC 中，3sin$A$=2sin$B$，$tanC=\sqrt{35}$.
（1）求 cos2C;
（2）若 $AC-BC=1$，求△ABC 的周长.

16. 已知正项数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，$4S_n=a_n^2+4n-1$，$a_1=1$.
（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式;
（2）设$\{a_n\}$是递增数列，$b_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}$，$T_n$ 为数列$\{b_n\}$的前 n 项和，若$T_n\le\frac{m}{6}$恒成立，求实数 m 的取值范围.

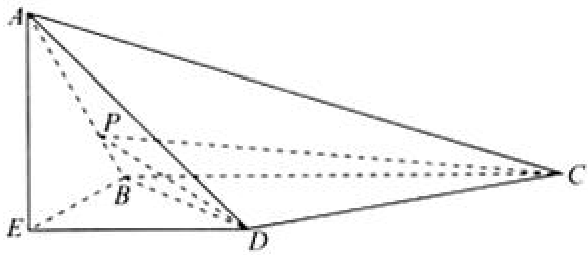
17. 如图①，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle A=45$，$AB=\sqrt{2}$，$BC=2$，$BE\perp AD$ 于点 E，将△ABE 沿 BE 折起，使$\angle AED=90°$，连接 AC、AD，得到如图②所示的几何体.

（1）求证：平面 $ACD\perp$ 平面 ABC;

（2）若点 P 在线段 AB 上，直线 PD 与平面 BCD 所成角的正切值为$\frac{1}{5}$，求三棱锥 $P\text{-}BCD$ 的体积.



①

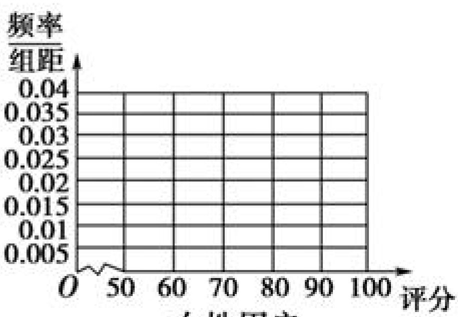


②

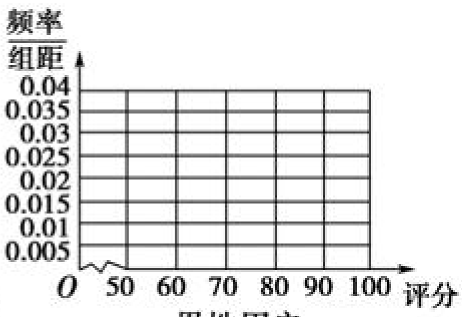
18. 手机厂商推出一款 6 寸大屏手机，现对 500 名该手机使用者（200 名女性，300 名男性）进行调查，对手机进行评分，评分的频数分布表如下：

女性用户	分值区间	[50，60）	[60，70）	[70，80）	[80，90）	[90，100]
	频数	20	40	80	50	10
男性用户	分值区间	[50，60）	[60，70）	[70，80）	[80，90）	[90，100]
	频数	45	75	90	60	30

（Ⅰ）完成下列频率分布直方图，计算女性用户评分的平均值，并比较女性用户和男性用户评分的波动大小（不计算具体值，给出结论即可）；



女性用户



男性用户

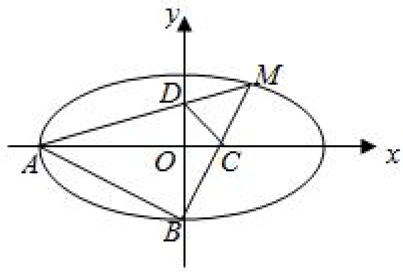
（Ⅱ）把评分不低于 70 分的用户称为“评分良好用户”，能否有 90%的把握认为“评分良好用户”与性别有关？

参考附表：

$P(K^2\geq k_0)$	0.10	0.050	0.010	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	10.828

参考公式：$K^2=\frac{n(ad-bc)2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$

19. 已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，过椭圆的焦点且与长轴垂直的弦长为 1．



（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设点 M 为椭圆上位于第一象限内一动点，A，B 分别为椭圆的左顶点和下顶点，直线 MB 与 x 轴交于点 C，直线 MA 与轴交于点 D，求证：四边形 $ABCD$ 的面积为定值．

20. 已知函数 $f(x)=x^2+(2-a)x-a\ln x$（$a\in R$）．

（1）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（2）当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)>0$，求 a 的最大整数值．

数学试题答案

1. 【答案】*A*

【解析】

解：由 $2^x>2\sqrt{2}$，解得 $x>\frac{3}{2}$；

由 $\log_{\frac{1}{2}}$（x-a）<0 的解集为{x|x>a+1}，

令 $a+1=\frac{3}{2}$，解得 $a=\frac{1}{2}$．

故选：A．

根据指数函数与对数函数的性质，列方程求出 a 的值．

本题考查了指数函数与对数函数的性质与应用问题，是基础题．

2. 【答案】*B*

【解析】

解：数据 x_1，x_2，x_3，…，x_n是某市 n（n≥3，n∈N^*）个普通职工的年收入，

设这 n 个数据的中位数为 x，平均数为 y，标准差为 z，

再加上世界首富的年收入 x_{n+1}，则这（n+1）个数据中，

年收入平均数会大大增大，中位数可能不变，标准差会变大，

故 A，C，D 都错误，B 正确．

故选：B．

年收入平均数会大大增大，中位数可能不变，标准差会变大．

本题考查命题真假的判断，考查平均数、中位数、标准差等基础知识，考查运算求解能力，是基础题．

3. 【答案】*A*

【解析】

解：由题意，椭圆的两个焦点与短轴的一个端点构成一个正三角形，

∴2c=a

∴$e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$

故选：A．

根据椭圆的两个焦点与短轴的一个端点构成一个正三角形，所以得到 2c=a，然后根据离心率 $e=\frac{c}{a}$，即可得到答案．

此题考查学生掌握椭圆的简单性质，考查了数形结合的数学思想，是一道综合题．

4. 【答案】*D*

【解析】

解：当 x≥1 时，f（x）≤1 即为：$\log_2 x\leq 1$

解得 1≤x≤2

当 x<1 时，f（x）≤1，即为：$\frac{1}{1-x}\leq 1$

解得 x≤0．

综上可得，原不等式的解集为（-∞，0]∪[1，2]

故选：D．

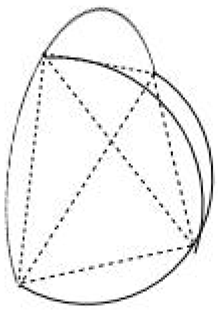
对 x 讨论，当 x>0 时，当 x≤0 时，运用分式函数和对数函数的单调性，解不等式，即可得到所求解集．

本题考查分段函数的运用：解不等式，注意运用分类讨论的思想方法，以及分式函数和对数函数的单调性，考查运算能力，属于基础题．

5. 【答案】*D*

【解析】

解：根据三视图可知，该几何体是$\frac{1}{4}$球替，挖去一个三棱锥，如图所示；



则该几何体的体积为 $V=\frac{1}{4}\cdot\frac{4\pi}{3}\cdot2^3-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot4\cdot2\cdot2=\frac{8\pi}{3}-\frac{8}{3}$.

故选：D.

根据三视图可知该几何体是$\frac{1}{4}$球，挖去一个三棱锥，把数据代入体积公式即可求解.

本题考查了利用三视图求棱锥和球体积计算问题，根据三视图的特征找出几何体结构特征是关键.

6. 【答案】*D*

【解析】

解：数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=1$，且对于任意的 m，n∈N*，都有 $a_{m+n}=a_m+a_n+mn$，

当 n=2 时，$a_2=a_1+a_1+1\times1=3=1+2$，

当 n=3 时，$a_3=a_1+a_2+1\times2=6=1+2+3$，

所以：$a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

故选：D.

直接利用赋值法和数列的通项公式的转换的应用求出结果.

本题考查的知识要点：数列的通项公式的求法及应用，主要考察学生的运算能力和转换能力，赋值法的应用，属于基础题型.

7. 【答案】*D*

【解析】

解：由椭圆和双曲线定义

不妨设$|PF_1|>|PF_2|$

则$|PF_1|+|PF_2|=10$

$|PF_1|-|PF_2|=4$

所以$|PF_1|=7$

$|PF_2|=3$

$\therefore|pF_1|\cdot|pF_2|=21$

故选：D.

设$|PF_1|>|PF_2|$，根据椭圆和双曲线的定义可分别表示出$|PF_1|+|PF_2|$和$|PF_1|-|PF_2|$，进而可表示出$|PF_1|$和$|PF_2|$，根据焦点相同进而可求得$|pF_1|\cdot|pF_2|$的表达式.

本题主要考查了圆锥曲线的共同特征，解答关键是正确运用椭圆和双曲线的简单的几何性质.

8. 【答案】*C*

【解析】

解：i=1，S>1000 否，i=2，S=2+1=3，

i=2，S>1000 否，i=3，S=6+1=7，

i=3，S>1000 否，i=4，S=14+1=15，

i=4，S>1000 否，i=5，S=30+1=31，

i=5，S>1000 否，i=6，S=62+1=63，

i=6，S>1000 否，i=7，S=126+1=127，

i=7，S>1000 否，i=8，S=254+1=255，

i=8，S>1000 否，i=9，S=510+1=511，

i=9，S>1000 否，i=10，S=1022+1=1023，

i=10，S＞1000 是，输出 i=10，
故选：C.
根据程序框图进行模拟运算即可.
本题主要考查程序框图的识别和判断，利用模拟运算法是解决本题的关键.

9.【答案】-10
【解析】
解：$\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(x+1,3)$；
∵ $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{c}$；
∴ $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=x+1+9=0$；
∴x=-10.
故答案为：-10.
可以求出 $\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}=(x+1,3)$，根据 $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\perp\overrightarrow{c}$ 即可得出 $(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=0$，进行数量积的坐标运算即可求出 x.
考查向量垂直的充要条件，向量加法和数量积的坐标运算.

10.【答案】$\frac{\pi}{6}$
【解析】
解：△ABC 中，A，B，C 成等差数列，可得 2B=A+C=π-B，即 B=$\frac{\pi}{3}$，
sin（A+C）=$\frac{2S}{b^2-c^2}$，即为 sinB=$\frac{acsinB}{b^2-c^2}$，
即有 $b^2=c^2+ac$，由余弦定理可得 $b^2=a^2+c^2-2accosB=a^2+c^2-ac$，
即有 a=2c，b=$\sqrt{3}$c，
cosC=$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{4c^2+3c^2-c^2}{2\cdot 2c\cdot\sqrt{3}c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，
由 C 为三角形的内角，可得 C=$\frac{\pi}{6}$.
故答案为：$\frac{\pi}{6}$.
由等差数列中项性质和三角形的内角和定理可得 B，再由余弦定理和面积公式，可得 a=2c，b=$\sqrt{3}$c，再由余弦定理求得 cosC，可得角 C.
本题考查等差数列的中项性质和三角形的内角和定理、余弦定理和面积公式，考查方程思想和运算能力，属于中档题.

11.【答案】$-\frac{\sqrt{10}}{5}$
【解析】
解：∵tan（θ+$\frac{\pi}{4}$）=$\frac{tan\theta+1}{1-tan\theta}=\frac{1}{2}$，
∴tanθ=-$\frac{1}{3}$，
而 $\cos^2\theta=\frac{cos^2\theta}{sin^2\theta+cos^2\theta}=\frac{1}{1+tan^2\theta}$，
∵θ为第二象限角，
∴cosθ=-$\sqrt{\frac{1}{1+tan^2\theta}}$=-$\frac{3\sqrt{10}}{10}$，sinθ=$\sqrt{1-cos^2\theta}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，
则 sinθ+cosθ=$\frac{\sqrt{10}}{10}-\frac{3\sqrt{10}}{10}$=-$\frac{\sqrt{10}}{5}$.
故答案为：$-\frac{\sqrt{10}}{5}$
已知等式利用两角和与差的正切函数公式及特殊角的三角函数值化简，求出 tanθ的值，再根据θ为第二象限角，利用同角三角函数间的基本关系求出 sinθ与 cosθ的值，即可求出 sinθ+cosθ的值.
此题考查了两角和与差的正切函数公式，以及同角三角函数间的基本关系，熟练掌握公式是解本题的关键.

12.【答案】$\frac{1}{2}$

【解析】

解：根据题意得，$\vec{a}\cdot\vec{b}=9\vec{e_1}\cdot\vec{e_2}+6\vec{e_2}^2=9\times1\times1\times(-\frac{1}{2})+6\times1\times1=-\frac{9}{2}+6=\frac{3}{2}$；

又∵|b|=3，

∴ $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 方向上的投影为 $\frac{a\cdot b}{|b|}=\frac{\frac{3}{2}}{3}=\frac{1}{2}$；

故答案为 $\frac{1}{2}$.

运用向量的夹角公式和投影的概念可解决此问题.

本题考查向量的夹角，投影的概念.

13.【答案】144

【解析】

解：《沁园春•长沙》、《蜀道难》、《敕勒歌》、《游子吟》、《关山月》、《清平乐•六盘山》，

分别记为 A，B，C，D，E，F，

由已知有 B 排在 D 的前面，A 与 F 不相邻且不排在最后.

第一步：在 B，C，D，E 中选一个排在最后，共 C_4^1=4（种）选法

第二步：将剩余五个节目按 A 与 F 不相邻排序，共 $A_5^5-A_2^2\cdot A_4^4$=72（种）排法，

第三步：在前两步中 B 排在 D 的前面与后面机会相等，则 B 排在 D 的前面，只需除以 A_2^2=2 即可，

即六场的排法有 4×72÷2=144（种）

故答案为：144.

由特殊位置优先处理，先排最后一个节目，共 C_4^1=4（种），相邻问题由捆绑法求解即剩余五个节目按 A 与 F 不相邻排序，共 $A_5^5-A_2^2\cdot A_4^4$=72（种）排法，

定序问题用倍缩法求解即可 B 排在 D 的前面，只需除以 A_2^2 即可，

本题考查了排列、组合及简单的计数原理，属中档题.

14.【答案】-1

【解析】

解：设切点的横坐标为 x_0，f′（x）=$1-\frac{1}{x^2}-\frac{a}{x}=\frac{x^2-ax-1}{x^2}$=1⇒$x_0=-\frac{1}{a}$⇒$-a=\frac{1}{x_0}$，

则有：f（x_0）=$x_0+\frac{1}{x_0}-a\ln x_0=x_0+1$⇒$\ln x_0-x_0+1=0$，

令 h（x）=lnx-x+1⇒h′（x）=$\frac{1}{x}-1=0$⇒x=1，

则 h（x）在（0，1）上单调递增，在（1，+∞）上单调递减，

又因为 h（1）=0，所以 x_0=1⇒a=-1；

故答案为：-1.

设切点的横坐标为 x_0，求出导函数，利用直线 y=x+1 与曲线 y=f（x）相切，转化求解切点横坐标以及 a 的值即可.

本题考查函数的导数的应用，函数的切线方程的求法. 考查转化思想以及计算能力.

15.【答案】解：（1）∵$\tan C=\sqrt{35}$，

∴$\cos^2C=\frac{1}{1+\tan^2C}=\frac{1}{36}$，

∴$\cos 2C=2\cos^2C-1=2\times\frac{1}{36}-1=-\frac{17}{18}$.

（2）∵$3\sin A=2\sin B$，

∴由正弦定理可得：$3a=2b$，

又∵$AC-BC=1$，即：$b-a=1$，

∴解得：$a=2$，$b=3$，

∵由（1）可得：$\cos C=\frac{1}{6}$，

∴由余弦定理可得：$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos C}=\sqrt{4+9-2\times2\times3\times\frac{1}{6}}=\sqrt{11}$，

∴△ABC 的周长 $a+b+c=5+\sqrt{11}$.

【解析】

（1）由已知利用同角三角函数基本关系式可求 $\cos^2C=\dfrac{1}{1+tan^2C}$ 的值，根据二倍角的余弦函数公式即可计算得解.

（2）由正弦定理可得：3a=2b，结合 b-a=1，即可解得 a，b 的值，由（1）可得 $\cos C=\dfrac{1}{6}$，利用余弦定理可求 c 的值，即可得解△ABC 的周长.

本题主要考查了同角三角函数基本关系式，二倍角的余弦函数公式，正弦定理，余弦定理在解三角形中的综合应用，考查了计算能力和转化思想，属于基础题.

16.【答案】解：（1）$n\geqslant2$ 时，$4a_n=4S_n-4S_{n-1}=\boldsymbol{a_n^2}+4n-1-[\boldsymbol{a_{n-1}^2}+4(n-1)-1]$，化为：$\boldsymbol{(a_n-2)^2}=\boldsymbol{a_{n-1}^2}$，$a_n>0$.

∴$a_n-a_{n-1}=2$，或 $a_n+a_{n-1}=2$，

$a_n-a_{n-1}=2$ 时，数列$\{a_n\}$是等差数列，$a_n=1+2(n-1)=2n-1$.

$a_n+a_{n-1}=2$，∵$a_1=1$，可得 $a_n=1$.

（2）$\{a_n\}$是递增数列，∴$a_n=2n-1$.

$\boldsymbol{b_n=\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)}$，

数列$\{b_n\}$的前 n 项和 $T_n=\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\ldots\ldots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)<\dfrac{1}{2}}$，

∵$\boldsymbol{T_n\leq\dfrac{m}{6}}$恒成立，∴$\boldsymbol{\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{m}{6}}$，解得 $m\geqslant3$.

∴实数 m 的取值范围是$[3，+\infty)$.

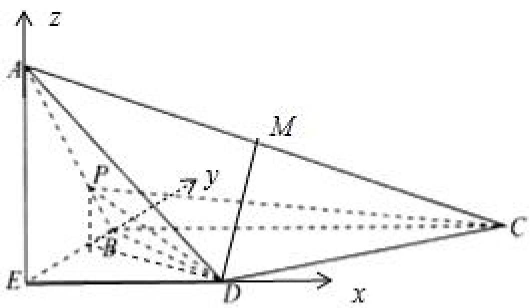
【解析】

（1）$n\geqslant2$ 时，$4a_n=4S_n-4S_{n-1}$，化为：$(a_n-2)^2=a_{n-1}^2$，$a_n>0$. 化简进而得出.

（2）$\{a_n\}$是递增数列，取 $a_n=2n-1$. 可得 $b_n=\dfrac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，利用裂项求和方法、数列的单调性即可得出.

本题考查了数列递推关系、等差数列的通项公式、裂项求和方法、数列的单调性，考查了推理能力与计算能力，属于中档题.

17.【答案】（1）证明：



②

方法 1：∵$BE\perp AE$，$DE\perp AE$，$BE\cap DE=E$，

∴$AE\perp$平面 $BCDE$，

以 E 为坐标原点，以 ED，EB，EA 所在直线为坐标轴建立空间直角坐标系如图：

则 $A(0，0，1)$，$B(0，1，0)$，$C(2，1，0)$，$D(1，0，0)$，

设 AC 的中点为 M，则 $M\left(1，\dfrac{1}{2}，\dfrac{1}{2}\right)$，

∴$\overrightarrow{\boldsymbol{DM}}=\left(0，\dfrac{1}{2}，\dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}=(0，1，-1)$，$\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}=(2，0，0)$，

∴$\overrightarrow{\boldsymbol{DM}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}=0$，$\overrightarrow{\boldsymbol{DM}}\cdot\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}=0$，

∴$DM\perp AB$，$DM\perp BC$，

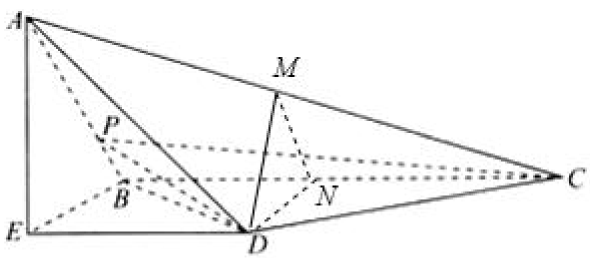
又 $AB\cap BC=B$，$AB\subset$平面 ABC，$BC\subset$平面 ABC，

∴$DM\perp$平面 ABC，

又 $DM\subset$平面 ACD，

∴平面 $ACD\perp$平面 ABC.

方法 2：取 AC 的中点 M，BC 的中点 N，连接 DM，DN，MN.



在平行四边形中，由 $AB=\boldsymbol{\sqrt{2}}$，$\angle BAE=45°$，$BE\perp AD$ 可得 $AE=BE=1$，

又 $AD=BC=2$，∴$DE=1$，

∴$BN=BE=DE$，又 $BN/\!/DE$，$BE\perp DE$，

∴四边形 $BEDN$ 是正方形，∴$DN/\!/BE$，$BN\perp BE$，

又 MN 是△ABC 的中位线，∴$MN/\!/AB$，

又 $BE\cap AB=B$，$DN\cap MN=N$，

∴平面 $DMN/\!/$平面 ABE，

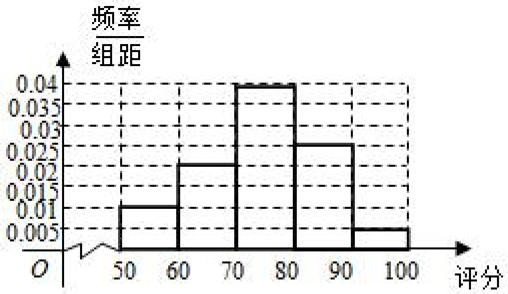
∵$BE\perp AE$，$DE\perp AE$，$BE\cap DE=E$，

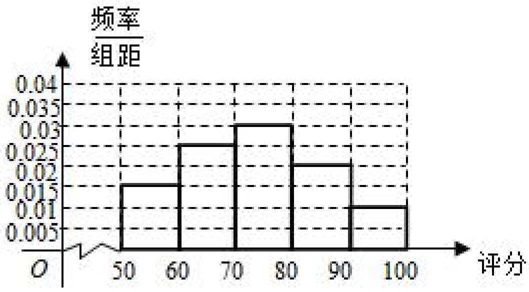
∴$AE\perp$平面 $BCDE$，又 $BC\subset$平面 $BCDE$，

∴$AE\perp BC$，又 $BC\perp BE$，$BE\cap AE=E$，
∴$BC\perp$平面 EAB，
∴$BC\perp$平面 DMN，∴$BC\perp DM$．
∵$AD=\sqrt{AE^2+DE^2}=\sqrt{2}$，$CD=AB=\sqrt{2}$，
∴$AD=CD$，∴$DM\perp AC$，
又 $AC\cap BC=C$，
∴$DM\perp$平面 ABC，
又 $DM\subset$平面 ACD，∴平面 $ABC\perp$平面 ACD．
（2）过 P 作 $PN\perp BE$，垂足为 N，连接 DN，
则 $PN// AE$，∴$PN\perp$平面 $BCDE$，
∴$\angle PDN$ 为直线 PD 与平面 BCD 所成的角．
设 $PN=x$，则 $BN=x$，故 $EN=1-x$，∴$DN=\sqrt{1+(1-x)^2}$，
∴$\tan\angle PDN=\frac{PN}{DN}=\frac{x}{\sqrt{1+(1-x)^2}}=\frac{1}{5}$，解得 $x=\frac{1}{4}$，即 $PN=\frac{1}{4}$．
∵$BD=\sqrt{BE^2+DE^2}=\sqrt{2}$，$CD=AB=\sqrt{2}$，$BC=2$，
∴$BD^2+CD^2=BC^2$，∴$BD\perp CD$．
∴$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot CD=1$，
∴三棱锥 $P-BCD$ 的体积 $V=\frac{1}{3}\cdot S_{\triangle BCD}\cdot PN=\frac{1}{3}\times 1\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$．
【解析】

（1）取 AC 中点 M，建系，利用向量证明 DM⊥AB，DM⊥BC 即可得出 DM⊥平面 ABC，故而平面 ACD⊥平面 ABC；
（2）做出直线 PD 与平面 BCD 所成角，求出 P 到平面 BCDE 的距离，代入体积公式即可．
本题考查来了面面垂直的判定，棱锥的体积计算，属于中档题．

18.【答案】解：（Ⅰ）女性用户和男性用户的频率分布表分别如下左、右图：





由图可得女性用户的波动小，男性用户的波动大．　　　…（4 分）
（Ⅱ）2×2 列联表如下图：

	女性用户	男性用户	合计
“认可”手机	140	180	320
“不认可”手机	60	120	180
合计	200	300	500

$K2=\frac{500(140\times120-180\times60)^2}{200\times300\times320\times180}\approx5.208>2.706$，
所以有 95%的把握认为性别和对手机的“认可”有关．
【解析】

（Ⅰ）利用所给数据，可得频率分布直方图，并比较女性用户和男性用户评分的波动大小；
（Ⅱ）求出 K^2，与临界值比较，即可得出结论．
本题考查频率分布直方图的作法及应用，考查独立检验的应用，考查频率分布直方图等基础知识，考查运算求解能力，是基础题．

19.【答案】解：（1）∵椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，过椭圆的焦点且与长轴垂直的弦长为 1，

∴$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{2b^2}{a}=1\\ a^2=b^2+c^2\end{cases}$，解得 $a=2$，$b=1$，

∴椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

证明：（2）∵椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，∴A（-2，0），B（0，-1），

设 M（m，n），（$m>0$，$n>0$），则$\frac{m^2}{4}+n^2=1$，即 $m^2+4n^2=4$，

则直线 BM 的方程为 $y=\frac{n+1}{m}x-1$，

令 $y=0$，得$x_C=\frac{m}{n+1}$，

同理，直线 AM 的方程为 $y=\frac{n}{m+2}(x+2)$，令 $x=0$，得$y_D=\frac{2n}{m+2}$，

∴$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\times|AC|\times|BD|=\frac{1}{2}\times|\frac{m}{n+1}+2|\times|\frac{2n}{m+2}+1|=\frac{1}{2}\times\frac{(m+2n+2)^2}{(m+2)(n+1)}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{m^2+4n^2+4+4mn+4m+8n}{mn+m+2n+2}=\frac{1}{2}\times\frac{4mn+4m+8n+8}{mn+m+2n+2}=2$，

∴四边形 $ABCD$ 的面积为定值 2.

【解析】

（1）由椭圆的离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，过椭圆的焦点且与长轴垂直的弦长为 1，列出方程组，求出 a，b，由此能求出椭圆 C 的方程.

（2）设 M（m，n），（m>0，n>0），则 $m^2+4n^2=4$，从而直线 BM 的方程为 $y=\frac{n+1}{m}x-1$，进而$x_C=\frac{m}{n+1}$，同理，得$y_D=\frac{2n}{m+2}$，进而$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\times|AC|\times|BD|=\frac{1}{2}\times|\frac{m}{n+1}+2|\times|\frac{2n}{m+2}+1$，由此能证明四边形 ABCD 的面积为定值 2.

本题考查椭圆方程的求法，考查四边形的面积为定值的证明，是中档题，解题时要认真审题，注意椭圆性质、韦达定理、直线与椭圆位置关系等知识点的合理运用.

20.【答案】解：（1）函数 $f(x)$ 的定义域为（0，+∞）.

$f'(x)=2x+2-a-\frac{a}{x}=\frac{2x^2+(2-a)x-a}{x}=\frac{2(x+1)(x-\frac{a}{2})}{x}$，

当 $a\leq0$ 时，$f'(x)>0$，∴$f(x)$ 在（0，+∞）上单调递增，

当 $a>0$ 时，令 $f'(x)>0$，得 $x>\frac{a}{2}$，令 $f'(x)<0$，解得：$0<x<\frac{a}{2}$，

∴$f(x)$ 在$(0，\frac{a}{2})$上单调递减，在$(\frac{a}{2}，+\infty)$上单调递增.

（2）由（1）知，当 $a\leq0$ 时，$f(x)$ 在（0，+∞）上单调递增，

又 $f(1)=3-a>0$，所以当 $x\geq1$ 时，$f(x)\geq f(1)>0$，满足题意.

由（1）知，当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在$(0，\frac{a}{2})$上单调递减，在$(\frac{a}{2}，+\infty)$上单调递增.

若 $0<\frac{a}{2}\leq1$，即 $0<a\leq2$，$f(x)$ 在[1，+∞）上单调递增，

所以当 $x\geq1$ 时，$f(x)\geq f(1)=3-a>0$，满足题意.

若$\frac{a}{2}>1$，即 $a>2$，$f(x)$ 在$[1，\frac{a}{2})$上单调递减，在$(\frac{a}{2}，+\infty)$上单调递增.

∴$f(x)_{min}=f(\frac{a}{2})=\frac{a^2}{4}+(2-a)\cdot\frac{a}{2}-a\ln\frac{a}{2}=a-\frac{a^2}{4}-a\ln\frac{a}{2}$，

∵$f(x)>0$，∴$f(x)_{min}>0$，即 $a-\frac{a^2}{4}-a\ln\frac{a}{2}>0$，∴$1-\frac{a}{4}-\ln\frac{a}{2}>0$，

令 $g(a)=1-\frac{a}{4}-\ln\frac{a}{2}=-\frac{a}{4}-\ln a+1+\ln2$（$a>0$），

∴$g'(a)=-\frac{1}{4}-\frac{1}{a}<0$，

∴$g(a)$ 在（2，+∞）上单调递减，

又 $g(2)=\frac{1}{2}>0$，$g(3)=\frac{1}{4}-\ln\frac{3}{2}<0$，

∴$g(a)$ 在（2，3）上存在唯一零点 x_0，

∴$2<a<x_0$，（$2<x_0<3$）.

综上所述，a 的取值范围为（-∞，x_0），故 a 的最大整数值为 2．

【解析】

（1）函数 f（x）的定义域为（0，+∞），$f'(x)=\frac{2(x+1)(x-\frac{a}{2})}{x}$，对 a 分类讨论即可得出单调性．

（2）利用（1）的单调性，对 a 分类讨论，进而得出结论．

本题考查了利用导数研究函数的单调性极值与最值、方程与不等式的性质，考查了推理能力与计算能力，属于难题．