高三文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分150分，考试时间120分钟。
2. 答题前，考生务必用直径0.5毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径0.5毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本试卷主要命题范围：高考范围。

一、选择题：本题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M=\{x|x>1\}$，$N=\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<5\right\}$，则 $M\cup N=$

A. $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<1\right\}$　　B. $\{x|x>1\}$　　C. $\left\{x\middle|-\frac{1}{2}<x<5\right\}$　　D. $\left\{x\middle|x>-\frac{1}{2}\right\}$

2. 已知 $z=\frac{3-i}{i}+2i$，则 $|z|=$

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

3. 已知 $a>0$ 且 $a\neq 1$，则"$a>\pi$"是"$a^e>a^\pi$"的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

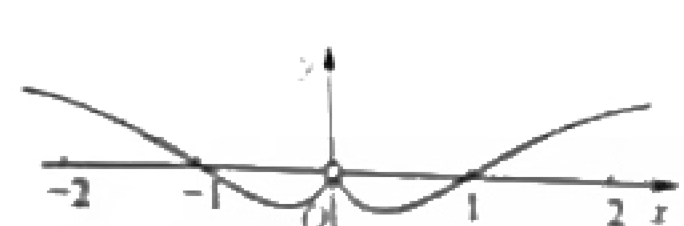
C. 充要条件　　D. 既不充分又不必要条件

4. 已知 $\tan\alpha=-3$，则 $\frac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}=$

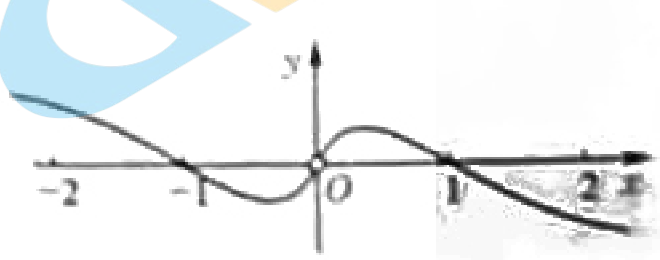
A. 3　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. -3

5. 函数 $f(x)=\frac{x\ln|x|}{2^{|x|}}$ 的部分图象大致是

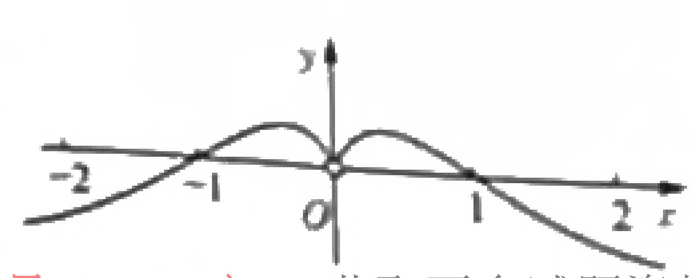
A



B



C



D

6. 2021 年 10 月 26 日国务院印发《2030 年前碳达峰行动方案》，要求我国二氧化碳排放力争于 2030 年前达到峰值. 低碳生活已经深入民心，新能源汽车备受欢迎，下表是某地区近 5 个月新能源汽车的销售量与月份统计表：

月份代号 x	1	2	3	4	5
销售量 y(万辆)	0.4	0.6	0.9	1.2	1.4

若根据表中数据求得的 x 与 y 的线性回归方程为 $\hat{y}=\hat{b}x+0.12$，则利用此回归方程预测第 6 个月新能源汽车的销售量为

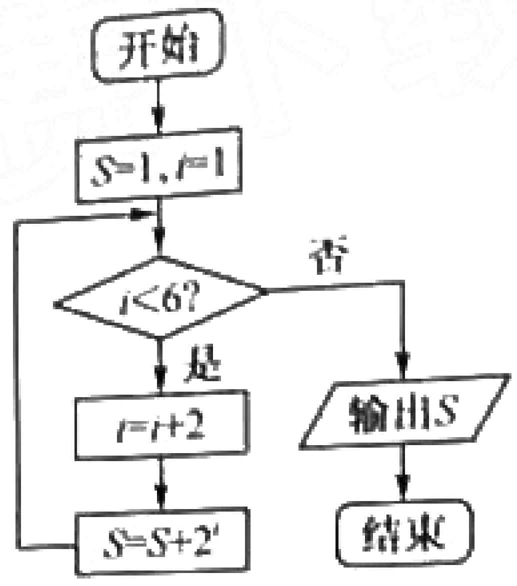
A. 1.7 万辆

B. 1.68 万辆

C. 1.6 万辆

D. 1.58 万辆

7. 执行如图所示的程序框图，则输出 S 的值为



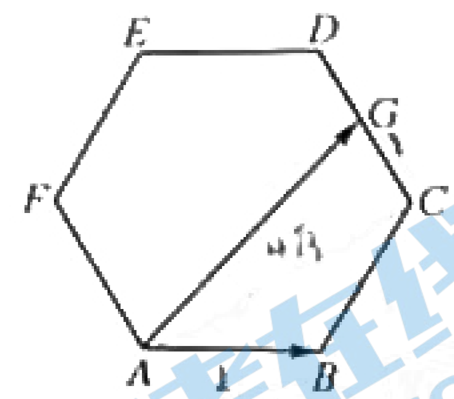
A. 146

B. 156

C. 169

D. 176

8. 如图，在正六边形 $ABCDEF$ 中，若 $|\overrightarrow{AB}|=2$，G 为 CD 的中点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=$



A. 7

B. 5

C. 3

D. 1

9. 已知曲线 $y=x\ln x-3x^2$ 的一条切线在 y 轴上的截距为 2，则这条切线的方程为

A. $4x-y-2=0$

B. $5x-y-2=0$

C. $4x+y-2=0$

D. $5x+y-2=0$

10. 在正四面体 $ABCD$ 中，E 为 AB 的中点，则直线 CE 与直线 AD 所成角的余弦值为

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 经过点 $(-1,-1)$，且 C 的实轴长大于 $\sqrt{2}$，则 C 的离心率的取值范围为

A. $(1,\sqrt{2})$

B. $(1,\sqrt{3})$

C. $(\sqrt{2},+\infty)$

D. $(\sqrt{3},+\infty)$

12. 已知函数 $f(x)=3\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$，若 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$，$f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{9}\right)$ 内有最小值，没有最大值，则 ω 的最大值为

A. 19

B. 13

C. 10

D. 7

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知 x,y 满足 $\begin{cases} x-2y+2\geq 0, \\ 3x-y-3\leq 0, \\ x+2\geq 0, \end{cases}$ 则 $z=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y$ 的最大值为________.

14. 写出一个同时满足以下条件的抛物线 C 的方程为________.

①C 的顶点在坐标原点；②C 的对称轴为坐标轴；③C 的焦点到其准线的距离为 $\frac{3}{4}$.

15. 已知△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，$a=3c=3$，$\sqrt{3}\cos A+\sin C=0$，则 $b=$________.

16. 已知体积为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ 的圆锥的侧面展开图为一个半圆，则该圆锥的外接球的表面积为________.

三、解答题：共70分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第17～21题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第22、23题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共60分.

17. (12分)

设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $5a_2$，$3a_3$，S_4-1 既成等差数列，又成等比数列.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

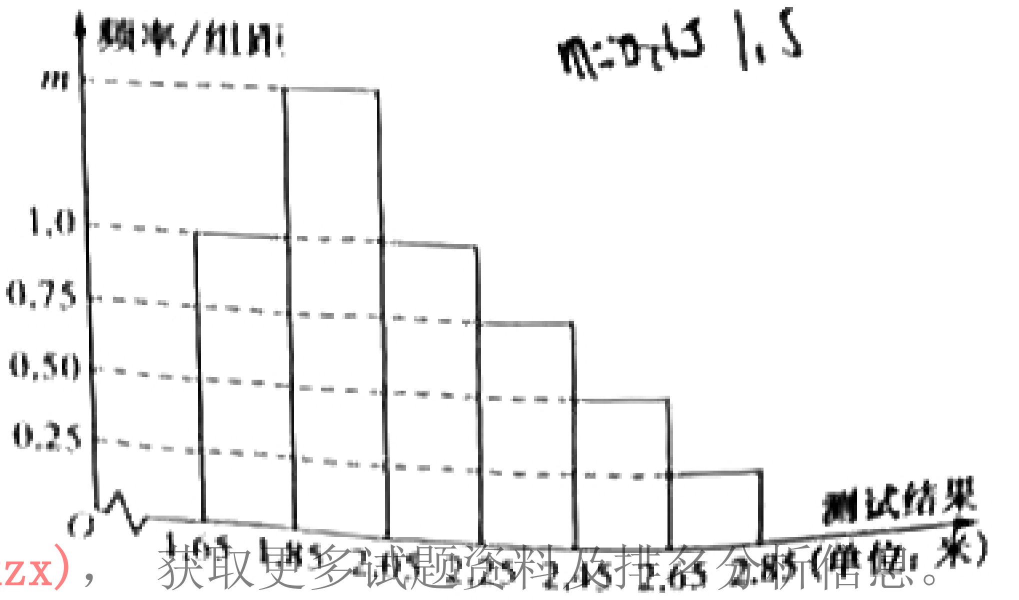
(2)若 $b_n=\frac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

18. (12分)

大力开展体育运动，增强学生体质，是学校教育的重要目标之一. 某校组织全校学生进行了立定跳远训练. 为了解训练的效果，从该校男生中随机抽出100人进行立定跳远达标测试，成绩(单位：米)均在 $[1.65,2.85]$ 内，整理数据得到如下频率分布直方图. 学校规定男生立定跳远2.05米及以上为达标，否则不达标.

(1)若男生立定跳远的达标率低于60%，该校男生还需加强立定跳远训练. 请你通过计算，判断该校男生是否还需加强立定跳远训练；

(2)从该校随机抽取的100名立定跳远成绩在 $[1.65,1.85)$ 和 $[2.25,2.45)$ 内的男生中，用分层抽样的方法抽取7人，再从这7人中随机抽取2人，求这2人来自不同区间的概率.

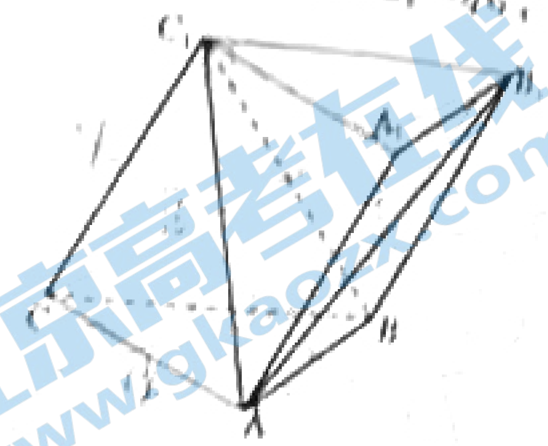


19.(12分)

如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面为等边三角形，侧面 BCC_1B_1 为菱形，$\angle CBB_1=120°$，$AC_1=\sqrt{6}$，$AB_1=\sqrt{10}$.

(1)证明：$\triangle AB_1C_1$ 为直角三角形；

(2)求点 C 到平面 AB_1C_1 的距离.



20.(12分)

在平面直角坐标系 xOy 中，已知 $A(-4,0)$，$B(4,0)$，M 是一个动点，C，D 分别为线段 AM，BM 的中点，且直线 OC，OD 的斜率之积是 $-\frac{3}{4}$，记 M 的轨迹为 E.

(1)求 E 的方程；

(2)若过点 $F(2,0)$ 且不与 x 轴重合的直线与 E 交于 P，Q 两点，点 P 关于 x 轴的对称点为 P_1(P_1 与 Q 不重合)，求证：直线 P_1Q 过定点.

21.(12分)

已知函数 $f(x)=\frac{2}{3}x^3-\left(a+\frac{1}{2}\right)x^2+ax+2a(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)当 $x\geqslant 0$ 时，不等式 $\frac{f(x)}{e^x}\leqslant x-a-1$ 恒成立，求 a 的取值范围.

(二)选考题：共10分.请考生在第22、23题中任选一题作答.如果多做，则按所做的第一题计分.

22.[选修4—4：坐标系与参数方程](10分)

在直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{t}{2}+6,\\ y=-\frac{t}{3}-2\end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2=\frac{4}{1+3\sin^2\theta}$.

(1)求直线 l 的普通方程和曲线 C 的直角坐标方程；

(2)若直线 l 与 x 轴、y 轴的交点分别为 A，B 两点，P 为曲线 C 上的任意一点，求 $\triangle ABP$ 的面积的最小值.

23.[选修4—5：不等式选讲](10分)

已知函数 $f(x)=|x-2|-|x+1|$，不等式 $f(x)\geqslant -m$ 的解集为 $(-\infty,1]$.

(1)求实数 m 的值；

(2)若正实数 a，b 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=m$，证明：$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}ab$.

高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. D　因为 $M=\{x|x>1\}$，$N=\left\{x\left|-\frac{1}{2}<x<5\right.\right\}$，所以 $M\cup N=\left\{x\left|x>-\frac{1}{2}\right.\right\}$. 故选 D.

2. B　$z=\frac{3-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}+2\mathrm{i}=-3\mathrm{i}-1+2\mathrm{i}=-1-\mathrm{i}$，所以 $|z|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. 故选 B.

3. A　由“$a>\pi$”可知，函数 $f(x)=a^x$ 在 **R** 上单调递增，所以 $a^a>a^\pi$，充分性成立；因为 $a^a>a^\pi$，所以当 $0<a<1$ 时，则 $a<\pi$；当 $a>1$ 时，则 $a>\pi$，必要性不成立，所以“$a>\pi$”是“$a^a>a^\pi$”的充分不必要条件. 故选 A.

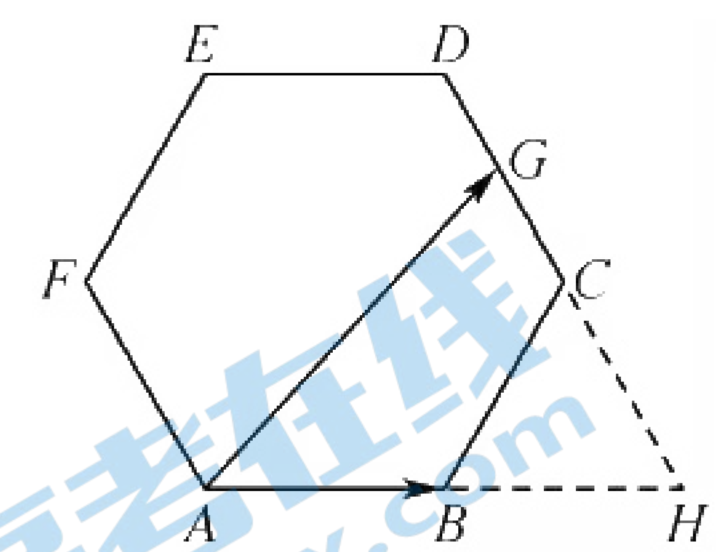
4. C　$\frac{\sin 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}=\frac{2\cos\alpha\sin\alpha}{2\sin^2\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{\tan\alpha}=-\frac{1}{3}$. 故选 C.

5. A　易知 $f(x)=\frac{x\log_2|x|}{2^x+2^{-x}}$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，因为 $f(-x)=\frac{-x\log_2|-x|}{2^{-x}+2^x}=-\frac{x\log_2|x|}{2^x+2^{-x}}=-f(x)$，所以 $f(x)$ 为奇函数，排除答案 B，D；又 $f(2)=\frac{2}{2^2+2^{-2}}>0$，排除选项 C. 故选 A.

6. B　$\bar{x}=\frac{1}{5}(1+2+3+4+5)=3$，$\bar{y}=\frac{1}{5}(0.4+0.6+0.9+1.2+1.4)=0.9$，因为直线 $\hat{y}=\hat{b}x+0.12$ 过点 $(\bar{x},\bar{y})$，所以 $3\hat{b}+0.12=0.9$，解得 $\hat{b}=0.26$，所以 $\hat{y}=0.26x+0.12$，将 $x=6$ 代入，得 $\hat{y}=0.26\times 6+0.12=1.68$（万辆）. 故选 B.

7. C　根据程序框图，$S=1$，$i=1<6$；执行第 1 次循环：$i=1+2=3$，$S=1+2^3=9$；$3<6$，执行第 2 次循环：$i=3+2=5$，$S=9+2^5=41$；$5<6$，执行第 3 次循环：$i=5+2=7$，$S=41+2^7=169$；$7>6$，结束循环，输出 $S=169$. 故选 C.

8. B　如图，延长 AB，DC 交于点 H，



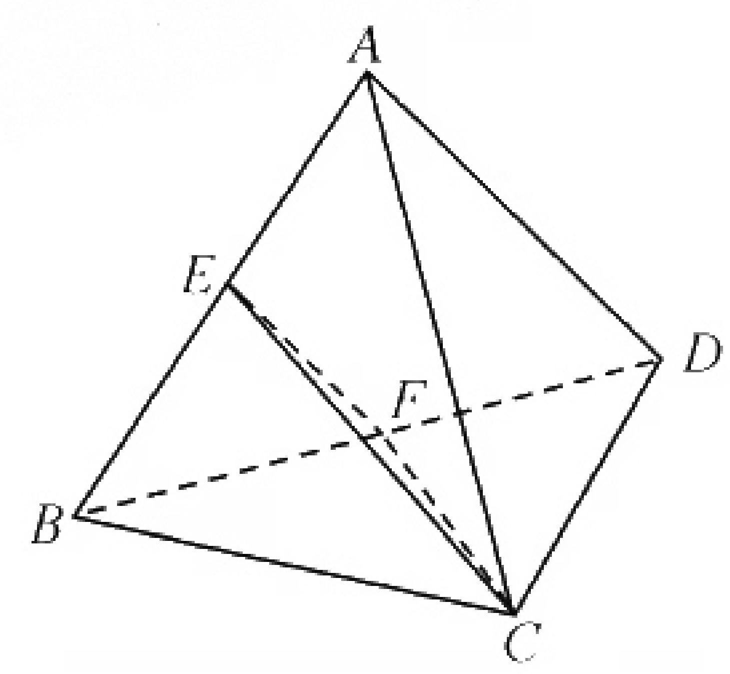
则 $\angle ABC=120^\circ$，$\angle BHC=60^\circ$，

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG})=|\overrightarrow{AB}|^2+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CG}$

$=4+2\times 2\cos 60^\circ+2\times 1\cos 120^\circ=5$. 故选 B.

9. D　函数 $y=x\ln x-3x^2$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，设切点坐标为 $(x_0,x_0\ln x_0-3x_0^2)$，因为 $y'=\ln x-6x+1$，则切线斜率为 $\ln x_0-6x_0+1$，所以切线方程为 $y-x_0\ln x_0+3x_0^2=(\ln x_0-6x_0+1)(x-x_0)$，将点 $(0,2)$ 代入切线方程并整理得 $3x_0^2-x_0-2=0$，解得 $x_0=1$，或 $x_0=-\frac{2}{3}$（舍去），所以这条切线的方程为 $y+3=-5(x-1)$，即 $5x+y-2=0$. 故选 D.

10. A　如图，设正四面体的棱长为 2，取 BD 的中点 F，



连结 EF，FC，则 $EF\parallel AD$，

所以 $\angle CEF$ 或其补角为直线 CE 与直线 AD 所成的角，

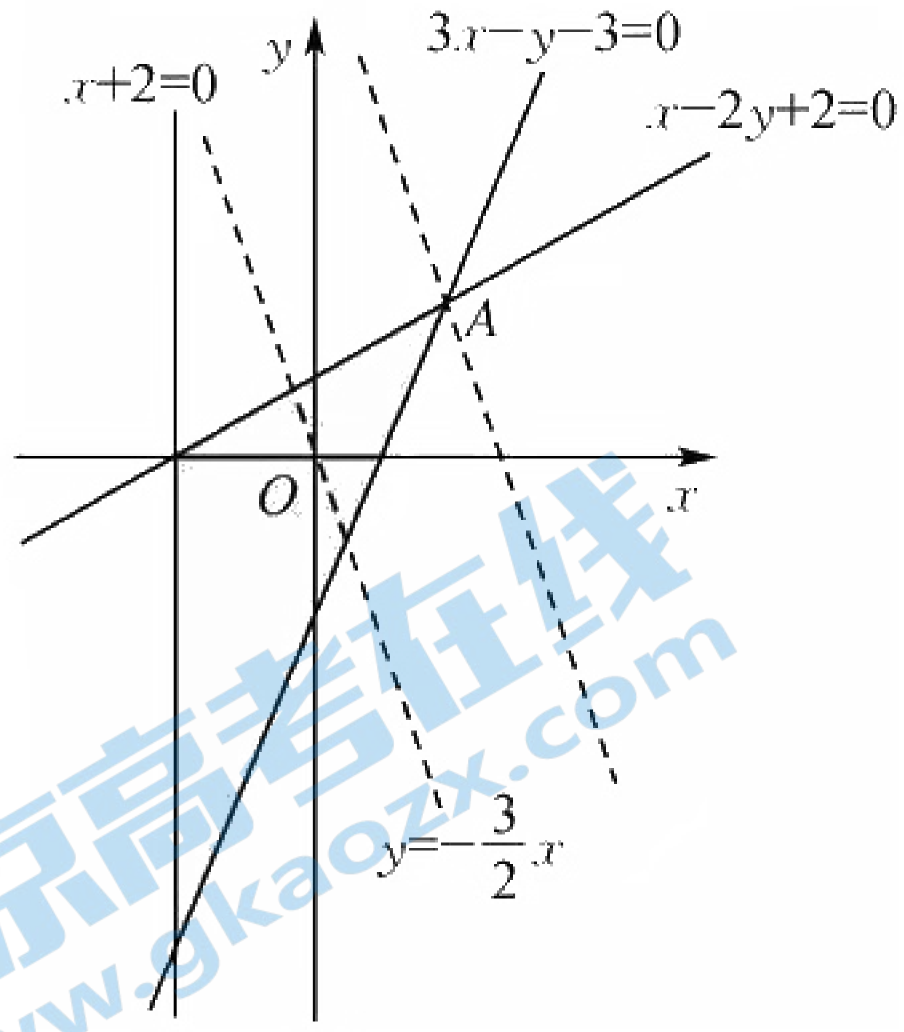
易知 $EF=1$，$CE=CF=\sqrt{3}$，

所以 $\cos\angle CEF=\frac{EF^2+EC^2-CF^2}{2EF\cdot EC}=\frac{\sqrt{3}}{6}$. 故选 A.

11. D　由题意可知，$\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1$，所以 $b^2-a^2=a^2b^2$，又 $b^2=c^2-a^2$，所以 $c^2-2a^2=a^2(c^2-a^2)$，所以 $a^2=\frac{c^2-2a^2}{c^2-a^2}=\frac{e^2-2}{e^2-1}>\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$，解得 $e>\sqrt{3}$. 故选 D.

12. B　由 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$，得 $\frac{\pi}{3}\omega+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=6k+1$，$k\in\mathbf{Z}$，由 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{9}\right)$ 内有最小值，无最大值，可得 $\frac{1}{4}\times\frac{2\pi}{\omega}<\frac{4\pi}{9}-\frac{\pi}{3}\leqslant\frac{3}{4}\times\frac{2\pi}{\omega}$，解得 $\frac{9}{2}<\omega\leqslant\frac{27}{2}$，所以 ω 的最大值为 13. 故选 B.

13. $\frac{7}{5}$ 作出满足条件的可行域如图阴影部分所示，作出直线 $y=-\frac{3}{2}x$ 并平移，当平移后的直线经过点 $A\left(\frac{8}{5},\frac{9}{5}\right)$ 时，z 取得最大值，且 $z_{\max}=\frac{1}{2}\times\frac{8}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{9}{5}=\frac{7}{5}$.



14. $y^2=\frac{3}{2}x$（答案不唯一） 由①②可知 C 的方程为抛物线的标准方程，由③可知，$p=\frac{3}{4}$，所以抛物线 C 的方程可以为 $y^2=\frac{3}{2}x$.

15. $\sqrt{7}$ 由 $a=3c=3$ 及正弦定理得 $\sin A=3\sin C$，由 $\sqrt{3}\cos A+\sin C=0$，得 $\cos A=-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin C$，由 $\sin^2A+\cos^2A=1$，得 $9\sin^2C+\frac{1}{3}\sin^2C=1$，解得 $\sin C=\pm\frac{\sqrt{21}}{14}$，又 $0<C<\pi$，所以 $\sin C=\frac{\sqrt{21}}{14}$，则 $\cos A=-\frac{\sqrt{7}}{14}$，由余弦定理，得 $9=1+b^2-2\times b\times\left(-\frac{\sqrt{7}}{14}\right)$，整理得 $b^2+\frac{\sqrt{7}}{7}b-8=0$，解得 $b=\sqrt{7}$ 或 $b=-\frac{8}{7}\sqrt{7}$（舍去），故 $b=\sqrt{7}$.

16. $\frac{32\pi}{3}$ 设圆锥的底面半径为 r，母线长为 l，由题意得 $2\pi r=\pi l$，所以 $l=2r$，则圆锥的高为 $h=\sqrt{l^2-r^2}=\sqrt{3}r$，由 $V=\frac{1}{3}\pi r^2h=\frac{1}{3}\pi\times r^2\times\sqrt{3}r=\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$，解得 $r=\sqrt{2}$，$l=2\sqrt{2}$，$h=\sqrt{6}$，设圆锥的外接球的半径为 R，由球的性质可知，$R^2=(h-R)^2+r^2$，即 $R^2=(\sqrt{6}-R)^2+2$，解得 $R=\frac{4}{\sqrt{6}}$，所以该圆锥的外接球的表面积为 $S=4\pi R^2=\frac{32\pi}{3}$.

17. 解：(1)设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，

因为 $5a_2,3a_3,S_4-1$ 既成等差数列，又成等比数列，

所以 $5a_2,3a_3,S_4-1$ 均相等且不为 0，……………………………… 2 分

所以 $\begin{cases}5a_2=3a_3,\\3a_3=S_4-1,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}5a_1+5d=3(a_1+2d),\\3(a_1+2d)=4a_1+6d-1,\end{cases}$ 解之得 $a_1=1,d=2$，满足条件 ……………… 5 分

故 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$. ……………………………… 6 分

(2)由(1)得 $a_{n+1}=2n+1$，$S_n=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$，……………………………… 7 分

所以 $b_n=\frac{a_{n+1}}{S_nS_{n+1}}=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$. ……………………………… 9 分

故 $T_n=\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+\cdots+\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$. ……………………………… 12 分

18. 解：(1)由频率分布直方图可知，男生立定跳远的达标率为 $0.2\times(1.0+0.75+0.50+0.25)=0.5$

因为 $50\%<60\%$，所以该校男生还需加强立定跳远训练. ……………………………… 4 分

(2)由题意可知，抽取的 7 人应从立定跳远成绩在 $[1.65,1.85)$ 内的男生中抽取 4 人，分别记为 A_1,A_2,A_3,A_4，成绩在 $[2.25,2.45)$ 内的男生中抽取 3 人，分别记为 B_1,B_2,B_3. ……………………………… 6 分

从这 7 人中随机抽取 2 人的基本事件有：$\{A_1,A_2\}$，$\{A_1,A_3\}$，$\{A_1,A_4\}$，$\{A_1,B_1\}$，$\{A_1,B_2\}$，$\{A_1,B_3\}$，$\{A_2,A_3\}$，$\{A_2,A_4\}$，$\{A_2,B_1\}$，$\{A_2,B_2\}$，$\{A_2,B_3\}$，$\{A_3,A_4\}$，$\{A_3,B_1\}$，$\{A_3,B_2\}$，$\{A_3,B_3\}$，$\{A_4,B_1\}$，$\{A_4,B_2\}$，$\{A_4,B_3\}$，$\{B_1,B_2\}$，$\{B_1,B_3\}$，$\{B_2,B_3\}$，共 21 个；……………………………… 9 分

其中这 2 人来自不同区间的有：$\{A_1,B_1\}$，$\{A_1,B_2\}$，$\{A_1,B_3\}$，$\{A_2,B_1\}$，$\{A_2,B_2\}$，$\{A_2,B_3\}$，$\{A_3,B_1\}$，$\{A_3,B_2\}$，$\{A_3,B_3\}$，$\{A_4,B_1\}$，$\{A_4,B_2\}$，$\{A_4,B_3\}$，共 12 个；……………………………… 11 分

故这 2 人来自不同区间的概率为 $P=\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$. ………………………………………………………………………… 12 分

19. (1)证明:取 BC 的中点 D,连结 AD,C_1D.

因为$\triangle ABC$ 为等边三角形,所以 $AD\perp BC$.

因为侧面 BCC_1B_1 为菱形,$\angle CBB_1=120°$,所以$\triangle BCC_1$ 为等边三角形,

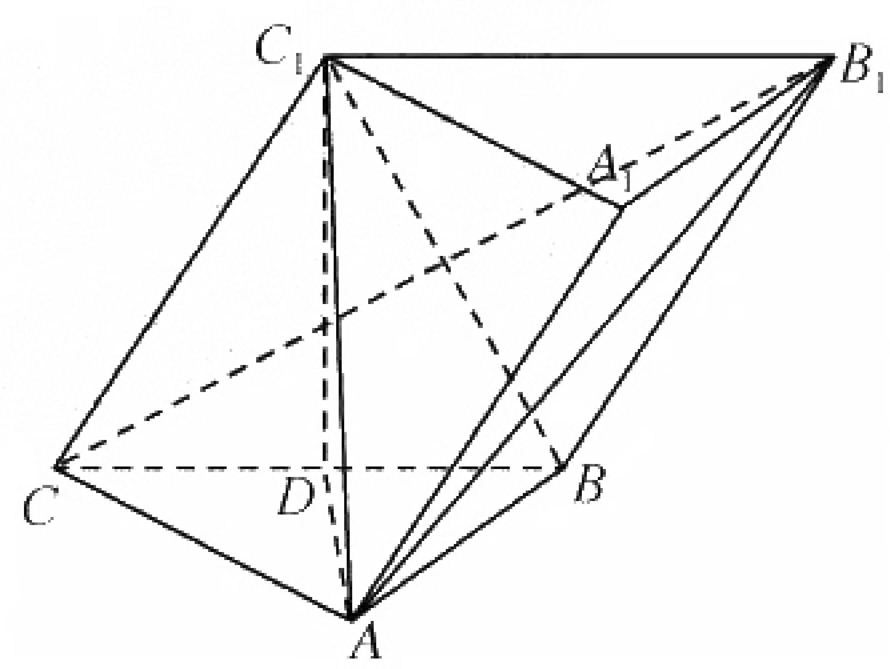
所以 $C_1D\perp BC$, …… 2 分

因为 $AD\cap C_1D=D$,AD,$C_1D\subset$平面 AC_1D,所以 $BC\perp$平面 AC_1D,

又 $AC_1\subset$平面 AC_1D,所以 $BC\perp AC_1$, ………………………………………………………………………… 4 分

又 $BC/\!/B_1C_1$,所以 $B_1C_1\perp AC_1$,

故$\triangle AB_1C_1$ 为直角三角形. ……………………………………………………………………………………… 6 分



(2)解:由(1)及 $AC_1=\sqrt{6}$,$AB_1=\sqrt{10}$可知,$B_1C_1=2$,则 $BC=2$.

在$\triangle BCC_1$ 中,$C_1D=\sqrt{3}$,同理 $AD=\sqrt{3}$,

又 $AC_1=\sqrt{6}$,所以 $AC_1{}^2=C_1D^2+AD^2$,所以 $AD\perp C_1D$.

法 1:又 $C_1D\perp BC$,$AD\cap BC=D$,AD,$BC\subset$平面 ABC,所以 $C_1D\perp$平面 ABC.

……………………………………………………………………………………………………… 8 分

所以 $V_{三棱锥A-A_1B_1C_1}=V_{三棱锥B_1-ABC}=\frac{1}{3}V_{三棱柱ABC-A_1B_1C_1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}BC\times AD\times C_1D=1$,

则 $V_{三棱锥C-AB_1C_1}=V_{三棱柱ABC-A_1B_1C_1}-V_{三棱锥A-A_1B_1C_1}-V_{三棱锥B_1-ABC}=\frac{1}{3}V_{三棱柱ABC-A_1B_1C_1}=1$. ……………………… 10 分

设点 C 到平面 AB_1C_1 的距离为 d,

又 $S_{\triangle AB_1C_1}=\frac{1}{2}AC_1\times B_1C_1=\sqrt{6}$,

则$\frac{1}{3}\times S_{\triangle AB_1C_1}\cdot d=1$,所以 $d=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

故点 C 到平面 AB_1C_1 的距离为$\frac{\sqrt{6}}{2}$. ……………………………………………………………………… 12 分

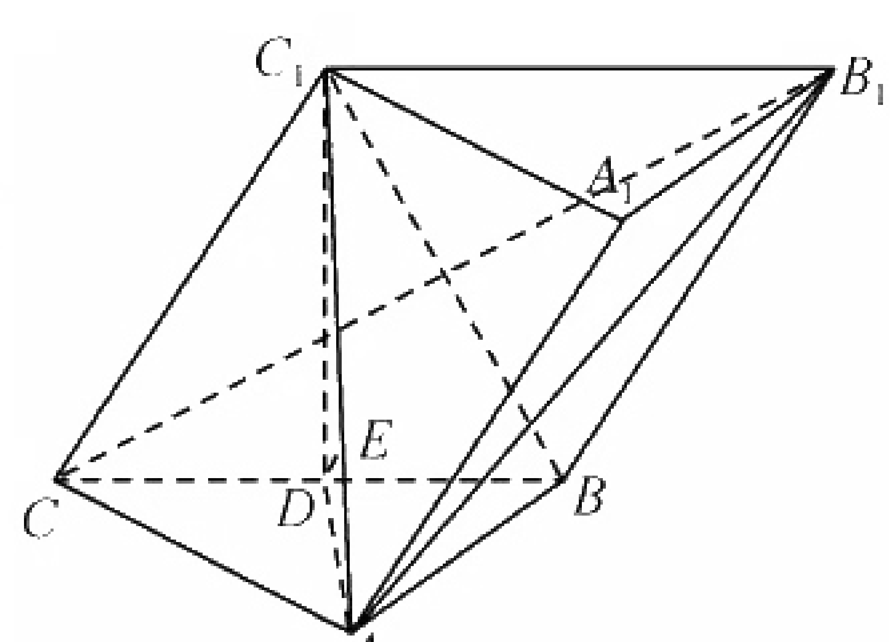
法 2:又 $AD\perp BC$,$C_1D\cap BC=D$,C_1D,$BC\subset$平面 BC_1C,所以 $AD\perp$平面 BC_1C,即 $AD\perp$平面 B_1C_1C. ……………… 8 分

设点 C 到平面 AB_1C_1 的距离为 d,

因为 $V_{三棱锥C-AB_1C_1}=V_{三棱锥A-B_1C_1C}$,且 $AD=\sqrt{3}$,$S_{\triangle AB_1C_1}=\frac{1}{2}AC_1\times B_1C_1=\sqrt{6}$,$S_{\triangle B_1C_1C}=\frac{1}{2}CC_1\times B_1C_1\sin 120°=\sqrt{3}$,

所以$\frac{1}{3}\times\sqrt{6}d=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}$,所以 $d=\frac{\sqrt{6}}{2}$,

故点 C 到平面 AB_1C_1 的距离为$\frac{\sqrt{6}}{2}$. ……………………………………………………………………… 12 分



法 3:因为 $BC/\!/B_1C_1$,$B_1C_1\subset$平面 AB_1C_1,$BC\not\subset$平面 AB_1C_1,

所以 $BC/\!/$平面 AB_1C_1,因此点 C 到平面 AB_1C_1 的距离等于点 D 到平面 AB_1C_1 的距离.

作 $DE\perp AC_1$,垂足为 E. 由(1)可知,$BC\perp$平面 AC_1D.

因为 $BC/\!/B_1C_1$,所以 $B_1C_1\perp$平面 AC_1D.

又因为 $B_1C_1\subset$平面 AB_1C_1,所以平面 $AB_1C_1\perp$平面 AC_1D.

又因为 $DE\subset$平面 AC_1D,$DE\perp AC_1$,平面 $AB_1C_1\cap$平面 $AC_1D=AC_1$,

所以 $DE\perp$ 平面 AB_1C_1，因此 DE 即为点 D 到平面 AB_1C_1 的距离. ………………………………………………… 8 分

由(1)及 $AC_1=\sqrt{6}$，$AB_1=\sqrt{10}$ 可知，$B_1C_1=2$，则 $BC=2$.

在 $\triangle BCC_1$ 中，$C_1D=\sqrt{3}$，同理 $AD=\sqrt{3}$，

又 $AC_1=\sqrt{6}$，所以 $AC_1{}^2=C_1D^2+AD^2$，所以 $AD\perp C_1D$.

因此 $\triangle ADC_1$ 为等腰直角三角形.

所以 $DE=\frac{1}{2}AC_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

故点 C 到平面 AB_1C_1 的距离为 $\frac{\sqrt{6}}{2}$. …………………………………………………………………………………… 12 分

20. (1)解：由题意可知，直线 OC，OD 的斜率存在，且 $AM\parallel OD$，$BM\parallel OC$.

所以直线 BM，AM 的斜率之积也等于 $-\frac{3}{4}$，

设 $M(x,y)$，则直线 AM 的斜率为 $\frac{y}{x+4}$，直线 BM 的斜率为 $\frac{y}{x-4}$，

所以 $\frac{y}{x+4}\cdot\frac{y}{x-4}=-\frac{3}{4}$，整理得 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1(y\neq 0)$，

故 E 的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1(y\neq 0)$. ………………………………………………………………………………… 4 分

(或：直接设 $M(x,y)$，则 $C\left(\frac{x-4}{2},\frac{y}{2}\right)$，$D\left(\frac{x+4}{2},\frac{y}{2}\right)$. 由直线 OC，OD 的斜率之积是 $-\frac{3}{4}$，即可得到点 M 的轨迹 E 的方程.)

(2)证法 1：由题意知，过点 F 的直线 PQ 的斜率存在且不为 0，可设其方程为 $x=my+2$，

由 $\begin{cases}x=my+2,\\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1,\end{cases}$ 整理得 $(3m^2+4)y^2+12my-36=0$.

则 $\Delta=(12m)^2+4\times 36(3m^2+4)>0$，

设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $P_1(x_1,-y_1)$，$y_1+y_2=-\frac{12m}{3m^2+4}$，$y_1y_2=-\frac{36}{3m^2+4}$. ………………………… 5 分

直线 P_1Q 方程为 $\frac{y+y_1}{y_2+y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$，………………………………………………………………………………… 6 分

令 $y=0$，则 $x=\frac{y_1(x_2-x_1)}{y_2+y_1}+x_1=\frac{my_1(y_2-y_1)}{y_2+y_1}+my_1+2$

$=\frac{my_1y_2-my_1{}^2+my_1y_2+my_1{}^2}{y_2+y_1}+2$

$=\frac{2my_1y_2}{y_2+y_1}+2=\frac{2m\times\left(-\frac{36}{3m^2+4}\right)}{-\frac{12m}{3m^2+4}}+2=8$，……………………………………………………… 10 分

故直线 P_1Q 恒过定点 $(8,0)$. …………………………………………………………………………………………………… 12 分

证法 2：设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，则 $P_1(x_1,-y_1)$，

因为直线 P_1Q 的方程为 $\frac{y+y_1}{y_2+y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$，

令 $y=0$，则 $x=\frac{y_1(x_2-x_1)}{y_2+y_1}+x_1=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_2+y_1}$. ① ……………………………………………………………… 6 分

因为 P、F、Q 三点共线，所以$\frac{0-y_1}{2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，整理得 $2=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{y_2-y_1}$. ② …………………………………… 8 分

由①②，得 $2x=\frac{x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2}{y_2^2-y_1^2}=\frac{(16-\frac{4}{3}y_1^2)y_2^2-(16-\frac{4}{3}y_2^2)y_1^2}{y_2^2-y_1^2}=16$，因此 $x=8$.

所以直线 P_1Q 恒过定点$(8,0)$. …………………………………… 12 分

21. 解：(1)$f'(x)=2x^2-(2a+1)x+a=(2x-1)(x-a)$， …………………………………… 1 分

若 $a>\frac{1}{2}$，则当 $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(a,+\infty)$时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(\frac{1}{2},a\right)$时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$在$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{2},a\right)$上单调递减，在$(a,+\infty)$上单调递增. …………………………………… 2 分

若 $a=\frac{1}{2}$时，$f'(x)\geqslant0$，所以 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增； …………………………………… 3 分

若 $a<\frac{1}{2}$，则当 $x\in(-\infty,a)\cup\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，当 $x\in\left(a,\frac{1}{2}\right)$时，$f'(x)<0$，

所以 $f(x)$在$(-\infty,a)$上单调递增，在$\left(a,\frac{1}{2}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递增. …………………………………… 4 分

(2)当 $x\geqslant0$ 时，$\frac{f(x)}{e^x}\leqslant x-a-1$ 恒成立等价于当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)\leqslant e^x(x-a-1)$恒成立，

即当 $x\geqslant0$ 时，$f(x)-e^x(x-a-1)\leqslant0$ 恒成立.

设 $g(x)=\frac{2}{3}x^3-\left(a+\frac{1}{2}\right)x^2+ax+2a-e^x(x-a-1)$，$x\in[0,+\infty)$，

则 $g'(x)=2x^2-(2a+1)x+a-e^x(x-a)=(x-a)(2x-1-e^x)$. …………………………………… 5 分

设 $h(x)=2x-1-e^x(x\geqslant0)$，则 $h'(x)=2-e^x$，

当 $0<x<\ln 2$ 时，$h'(x)>0$，当 $x>\ln 2$ 时，$h'(x)<0$，

所以 $h(x)$在$(0,\ln 2)$上单调递增，在$(\ln 2,+\infty)$上单调递减，

所以 $h(x)\leqslant h(\ln 2)=2\ln 2-3=\ln 4-3<0$， …………………………………… 7 分

若 $a\leqslant0$ 时，$g'(x)\leqslant0$，所以 $g(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减，

则 $g(x)\leqslant g(0)=3a+1\leqslant0$，

解得 $a\leqslant-\frac{1}{3}$. …………………………………… 9 分

若 $a>0$ 时，当 $x\in(0,a)$时，$g'(x)>0$，当 $x\in(a,+\infty)$时，$g'(x)<0$，

所以 $g(x)$在$(0,a)$上单调递增，在$(a,+\infty)$上单调递减，

则 $x\in(0,a)$时，$g(x)>g(0)=3a+1>0$，不合题意， …………………………………… 11 分

故实数 a 的取值范围为$\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right]$. …………………………………… 12 分

22. 解：(1)由直线 l 的参数方程为$\begin{cases}x=\frac{t}{2}+6,\\ y=-\frac{t}{3}-2\end{cases}$消去参数 t，得

直线 l 的普通方程 $2x+3y-6=0$； …………………………………… 2 分

由 $\rho^2=\frac{4}{1+3\sin^2\theta}$，得 $\rho^2+3\rho^2\sin^2\theta=4$，则 $x^2+4y^2=4$，

所以曲线 C 的直角坐标方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. …………………………………… 5 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 〞精益求精、专业严谨 〞的建设理念，不断探索“K12教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。