

2023 北京顺义一中高一（上）期中

数 学

一、选择题（每小题 4 分，共 40 分，四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 设集合 $A = \{x \mid x < 3x - 1\}$, $B = \{x \mid -1 < x < 3\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $(-1, +\infty)$ B. $(\frac{1}{2}, 3)$ C. $(-\infty, 3)$ D. $(-1, \frac{1}{2})$

2. 下列函数是偶函数且在 $(0, +\infty)$ 单调递减的是 ()

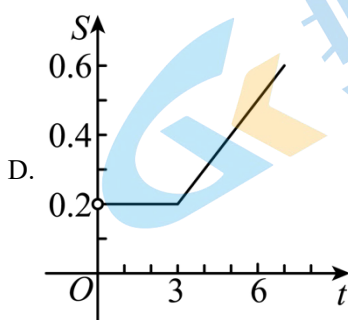
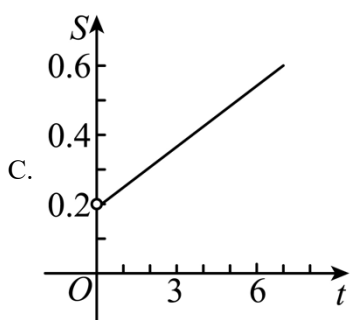
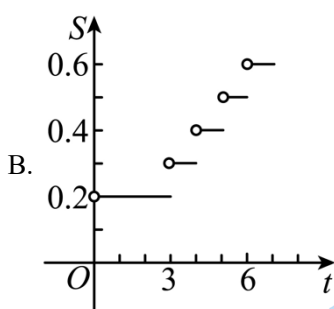
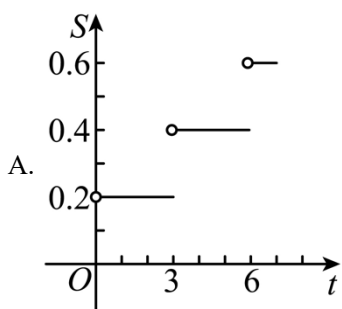
- A. $y = x^2$ B. $y = x$
 C. $y = \frac{1}{x}$ D. $y = -x^2 + 1$

3. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一个函数，且 $f(x) = x$, 则 $g(x)$ 可以是 ()

- A. $g(x) = (\sqrt{x})^2$ B. $g(x) = \sqrt[3]{x^3}$ C. $g(x) = \sqrt{x^2}$ D. $g(x) = \frac{x^2}{x}$

故选: B

4. 电讯资费调整后，市话费标准为：通话时间不超过 3 分钟收费 0.2 元；超过 3 分钟后，每增加 1 分钟收费 0.1 元，不足 1 分钟按 1 分钟计费. 通话收费 S (元) 与通话时间 t (分钟) 的函数图像可表示为下图中的 ()



5. 已知幂函数 $f(x) = x^a$ 图像经过点 $(3, \frac{1}{9})$, 则下列命题正确的有 ()

- A. 函数 $f(x)$ 为偶函数
 B. 函数 $f(x)$ 为增函数
 C. 若 $x > 1$, 则 $f(x) > 1$

D. 若 $0 < x_1 < x_2$, 则 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

6. 已知 $p: x \geq k, q: (2-x)(x+1) < 0$, 如果 p 是 q 的充分不必要条件, 则 k 的取值范围是 ()

A. $[2, +\infty)$ B. $(-\infty, -1]$

C. $[1, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

7. 奇函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(1) = 0$, 则不等式 $\frac{f(x) - f(-x)}{x} > 0$ 的解集为 ()

A. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ B. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

C. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ D. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

8. 已知函数 $f(x) = mx^2 - mx - 1$, “ $\exists x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0$ ”为假命题, 则实数 m 的取值范围是 ()

A. $(-4, 0]$ B. $(-4, 0)$

C. $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ D. $(-\infty, -4) \cup [0, +\infty)$

9. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - ax - 7, & x \leq 1 \\ \frac{a}{x}, & x > 1 \end{cases}$, 在 \mathbf{R} 上单调递增, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $[-4, 0)$ B. $(-\infty, -2]$ C. $(-\infty, 0)$ D. $[-4, -2]$

10. 定义新运算 \oplus : 当 $a \geq b$ 时, $a \oplus b = a$; 当 $a < b$ 时, $a \oplus b = b^2$, 则函数

$f(x) = (1 \oplus x)x - (2 \oplus x), x \in [-2, 2]$ 的最大值等于 ()

A. -1 B. 1 C. 6 D. 12

二、填空题 (共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分)

11. 函数 $f(x) = \frac{2}{x-1} + \sqrt{2+x}$ 的定义域为_____.

12. $\sqrt{(-3)^2} + (\pi-3)^0 - 8^{\frac{2}{3}} + (\sqrt[3]{-4})^3 =$ _____.

13. 已知函数 $f(x)$ 为 \mathbf{R} 上的奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, 则 $f(-1) =$ _____.

14. 若偶函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减且 $f(1) = 0$, 则不等式 $f(x-3) \geq 0$ 的解集是_____.

15. 1859 年, 我国清朝数学家李善兰将“function”一词译成“函数”, 并给出定义: “凡此变数中函彼变数, 则此为彼之函数”.

①若 $f(-2) = f(2)$, 则函数 $f(x)$ 是偶函数

②若定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 上单调递增, 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 则函数 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 上是增函数

③函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[a,b]$, $a < c < b$, 若 $f(x)$ 在 $[a,c]$ 上是增函数, 在 $[c,b]$ 上是减函数, 则

$$f(x)_{\max} = f(c)$$

④对于任意的 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 满足 $\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

上面关于函数性质的说法正确的序号是_____。(请写出所有正确答案的序号)

三、解答题 (共 6 小题, 共 85 分, 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程)

16. 已知集合 $A = \{x | 2 \leq x \leq 8\}$, $B = \{x | 1 < x < 6\}$, $C = \{x | x > a\}$, $U = R$.

(1) 求 $A \cup B$, $(\complement_U A) \cap B$;

(2) 若 $A \cap C \neq \emptyset$, 求 a 的取值范围.

17. 设函数 $f(x) = x + \frac{4}{x}$.

(1) 判断函数 $f(x)$ 奇偶性;

(2) 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最小值;

(3) 直接写出函数 $f(x)$ 的单调增区间 (不需证明过程).

18. 已知函数 $f(x) = x^2 - 2ax + 1$.

(1) 若函数 $f(x)$ 为偶函数, 求实数 a 的值;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 4]$ 上是减函数, 求实数 a 的取值范围;

(3) 求函数 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最小值.

19. 已知定义在区间 $(-1, 1)$ 上的函数 $f(x) = \frac{x+a}{x^2+1}$ 为奇函数.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 判断函数 $f(x)$ 在区间 $(-1, 1)$ 上的单调性并用定义证明;

(3) 解关于 t 的不等式 $f(2t-1) + f(t) < 0$.

20. 2021 年 3 月 1 日, 国务院新闻办公室举行新闻发布会, 工业和信息化部提出了芯片发展的五项措施, 进一步激励国内科技巨头加大了科技研发投入的力度. 根据市场调查某数码产品公司生产某款运动手环的年固定成本为 50 万元, 每生产 1 万只还需另投入 20 万元. 若该公司一年内共生产该款运动手环 x 万只并能全部销售完, 平均每万只的销售投入为 $R(x)$ 万元, 且 $R(x) = \begin{cases} 100 - kx, & 0 < x \leq 20 \\ \frac{2100}{x} - \frac{9000k}{x^2}, & x > 20 \end{cases}$. 当该公司一年

内共生产该款运动手环 5 万只并全部销售完时, 年利润为 300 万元.

(1) 求出 k 的值并写出年利润 W (万元) 关于年产量 x (万部) 的函数解析式 $W(x)$;

(2) 当年产量为多少万只时, 公司在该款运动手环的生产中所获得的利润最大? 并求出最大利润.

21. 对于正整数集合 A ，记 $A - \{a\} = \{x | x \in A, x \neq a\}$ ，记集合 X 所有元素之和为 $S(X)$ ， $S(\emptyset) = 0$ 。若 $\exists x \in A$ ，存在非空集合 A_1, A_2 ，满足：① $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ；② $A_1 \cup A_2 = A - \{x\}$ ；③ $S(A_1) = S(A_2)$ ，则称 A 存在“双拆”。若 $\forall x \in A$ ， A 均存在“双拆”，称 A 可以“任意双拆”。

(1) 判断集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 和 $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ 是否存在“双拆”？如果是，继续判断可否“任意双拆”？

(不必写过程，直接写出判断结果)；

(2) $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ ，证明： A 不能“任意双拆”；

(3) 若 A 可以“任意双拆”，求 A 中元素个数的最小值。

参考答案

一、选择题（每小题4分，共40分，四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 【答案】B

【分析】化简结合 A ，再应用交集的运算即可.

【详解】集合 $A = \{x \mid x < 3x - 1\} = \{x \mid x > \frac{1}{2}\}$, $B = \{x \mid -1 < x < 3\}$, 则 $A \cap B = (\frac{1}{2}, 3)$.

故选：B

2. 【答案】D

【分析】由函数的单调性与奇偶性直接判断.

【详解】对于 A, $y = x^2$ 是偶函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 不符合题意;

对于 B, $y = x$ 是奇函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 不符合题意;

对于 C, $y = \frac{1}{x}$ 是奇函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 不符合题意;

对于 D, $y = -x^2 + 1$ 是偶函数, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 符合题意;

故选：D.

3. 【答案】B

【分析】根据相同函数的判断法则，定义域和对应法则要相同去判断 A、D 选项函数的定义域与已知函数不同，C 选项函数的对应法则和已知函数不一样，B 选项对应法则和定义域和已知函数都一样，即可得出答案.

【详解】解： $f(x) = x$ 的定义域为 R .

A 选项： $g(x) = (\sqrt{x})^2$ 定义域为 $[0, +\infty)$ ，与 $f(x) = x$ 的定义域不同，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一个函数，

A 错误；

B 选项： $g(x) = \sqrt[3]{x^3} = x$ ，其定义域为 R ，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是同一个函数，B 正确；

C 选项： $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ ，与 $f(x) = x$ 对应法则不一样，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一个函数，C 错误；

D 选项： $g(x) = \frac{x^2}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，与 $f(x) = x$ 的定义域不同，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不是同一

个函数，D 错误.

故选：B

4. 【答案】B

【详解】

【分析】由题意知，当 $0 < t \leq 3$ 时， $S=0.2$.

当 $3 < t \leq 4$ 时， $S=0.2+0.1=0.3$.

当 $4 < t \leq 5$ 时， $S=0.3+0.1=0.4$.

.....

所以对应的函数图像为 B.

故选 B.

5. 【答案】 A

【分析】代点求出解析式，即可判断 A, B, C, 作差法判断 D.

【详解】将点 $\left(3, \frac{1}{9}\right)$ 代入函数 $f(x) = x^a$, 得 $\frac{1}{9} = 3^a$, 则 $a = -2$,

即 $f(x) = x^{-2}$, 所以是偶函数, 且在 $(0, +\infty)$ 单调递减, A 正确, B 错误;

当 $x > 1$ 时, $\frac{1}{x^2} < 1$, 即 $f(x) < 1$, C 错误;

当 $0 < x_1 < x_2$ 时, $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right) - \frac{4}{(x_1+x_2)^2}$,

若 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}\right) - \frac{4}{(x_1+x_2)^2} > 0$, 整理得 $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} > \frac{8}{(x_1+x_2)^2}$,

化简得 $\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1^2} + \frac{(x_1+x_2)^2}{x_2^2} > 8$,

即证明 $\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1^2} + \frac{(x_1+x_2)^2}{x_2^2} = 1 + \frac{2x_2}{x_1} + \frac{x_2^2}{x_1^2} + \frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{2x_1}{x_2} + 1 > 8$ 成立,

利用基本不等式, $1 + \frac{2x_2}{x_1} + \frac{x_2^2}{x_1^2} + \frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{2x_1}{x_2} + 1 \geq 2 + 2\sqrt{4} + 2 = 8$,

因为 $0 < x_1 < x_2$, 故等号不成立, $\therefore 1 + \frac{2x_2}{x_1} + \frac{x_2^2}{x_1^2} + \frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{2x_1}{x_2} + 1 > 8$,

即 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$, D 错误.

故选: A

6. 【答案】 D

【分析】先将 q 化简, 再根据充分不必要条件可判断得解.

【详解】 $\because (2-x)(x+1) < 0$, 解得 $x < -1$ 或 $x > 2$,

$\therefore q: x < -1$ 或 $x > 2$,

因为 P 是 q 的充分不必要条件, 即 P 对应的集合是 q 对应集合的真子集,

$\therefore k > 2$.

故选: D.

7. 【答案】 D

【分析】

本题首先可根据奇函数的性质将不等式转化为 $\frac{2f(x)}{x} > 0$ ，然后分为 $x > 1$ 、 $0 < x < 1$ 、 $-1 < x < 0$ 、 $x < -1$ 以及 $x = 1$ 、 -1 五种情况进行讨论，根据函数单调性和奇偶性判断出函数值的大小，即可得出结果。

【详解】因为函数 $f(x)$ 是奇函数，

所以 $f(-x) = -f(x)$ ，不等式 $\frac{f(x) - f(-x)}{x} > 0$ 即 $\frac{2f(x)}{x} > 0$ ，

因为奇函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，且 $f(1) = 0$ ，

所以当 $x > 1$ 时， $f(x) > 0$ ，此时 $\frac{2f(x)}{x} > 0$ ，

当 $0 < x < 1$ 时， $f(x) < 0$ ，此时 $\frac{2f(x)}{x} < 0$ ；

当 $-1 < x < 0$ 时， $f(x) > 0$ ，此时 $\frac{2f(x)}{x} < 0$ ；

当 $x < -1$ 时， $f(x) < 0$ ，此时 $\frac{2f(x)}{x} > 0$ ，

当 $x = 1$ 、 -1 时， $\frac{2f(x)}{x} = 0$ ，

综上所述，不等式 $\frac{f(x) - f(-x)}{x} > 0$ 的解集为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ，

故选：D.

【点睛】解抽象函数解不等式方法：（1）化简不等式；（2）确定函数的单调性；（3）画出函数的草图，或求出函数的零点；（4）根据图象或单调性，求出不等式的解。

8. 【答案】A

【分析】由“ $\exists x \in \mathbf{R}, mx^2 - mx - 1 \geq 0$ ”为假命题，得到“ $\forall x \in \mathbf{R}, mx^2 - mx - 1 < 0$ ”为真命题，利用判别式法求解。

【详解】因为“ $\exists x \in \mathbf{R}, mx^2 - mx - 1 \geq 0$ ”为假命题，

所以“ $\forall x \in \mathbf{R}, mx^2 - mx - 1 < 0$ ”为真命题，

当 $m = 0$ 时， $-1 < 0$ 成立；

当 $m \neq 0$ 时， $\begin{cases} m < 0 \\ \Delta = (-m)^2 + 4m < 0 \end{cases}$ ，解得 $-4 < m < 0$ ，

综上： $-4 < m \leq 0$ ，

所以实数 m 的取值范围是 $(-4, 0]$ 。

故选：A.

9. 【答案】D

【分析】根据分段函数的单调性的判定方法，列出不等式组，即可求解.

【详解】由函数 $f(x) = \begin{cases} -x^2 - ax - 7, & x \leq 1 \\ a, & x > 1 \end{cases}$ 在 \mathbf{R} 上单调递增函数，

则满足 $\begin{cases} -\frac{a}{2} \geq 1 \\ a < 0 \\ -1^2 - a - 7 \leq a \end{cases}$ ，解得 $-4 \leq a \leq -2$ ，即实数 a 的取值范围为 $[-4, -2]$.

故选：D.

10. 【答案】C

【分析】当 $-2 \leq x \leq 1$ 和 $1 < x \leq 2$ 时，分别求出函数 $f(x)$ 的表达式，然后利用函数单调性或导数求出函数 $f(x)$ 的最大值.

【详解】解：由题意知

当 $-2 \leq x \leq 1$ 时， $f(x) = x - 2$ ，当 $1 < x \leq 2$ 时， $f(x) = x^3 - 2$ ，

又 $\because f(x) = x - 2$ ， $f(x) = x^3 - 2$ 在定义域上都为增函数， $\therefore f(x)$ 的最大值为 $f(2) = 2^3 - 2 = 6$.

故选 C.

【点睛】该题考查的是有关新定义运算以及函数最值的求解问题，在解题的过程中，需要对题中所给的条件正确转化，再者就是对函数最值的求解方法要灵活掌握.

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11. 【答案】 $[-2, 1) \cup (1, +\infty)$

【分析】根据函数的解析式，列出函数解析式满足的不等式组，即可求得答案.

【详解】要使 $f(x) = \frac{2}{x-1} + \sqrt{2+x}$ 有意义，

则 $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ 2+x \geq 0 \end{cases}$ ，解得 $x \geq -2$ 且 $x \neq 1$ ，

则其定义域为： $[-2, 1) \cup (1, +\infty)$.

故答案为： $[-2, 1) \cup (1, +\infty)$

12. 【答案】-4

【分析】根据指数幂的运算性质求解即可.

【详解】 $\sqrt{(-3)^2} + (\pi - 3)^0 - 8^{\frac{2}{3}} + (\sqrt[3]{-4})^3$

$= \sqrt{9} + 1 - (2^3)^{\frac{2}{3}} - 4$

$= 3 + 1 - 2^{3 \times \frac{2}{3}} - 4 = -2^2 = -4$.

故答案为：-4.

13. 【答案】 -2

【分析】利用奇函数的定义即可求解.

【详解】当 $x > 0$ 时, $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$, 故 $f(1) = 1 + 1 = 2$.

$\because f(x)$ 为奇函数, $\therefore f(-1) = -f(1) = -2$.

故答案为：-2.

14. 【答案】 [2,4]

【分析】先对 $f(x-3) \geq 0$ 化简为 $f(x-3) \geq f(1)$, 然后利用函数 $f(x)$ 为偶函数并结合其单调性质从而求解.

【详解】由题意知函数 $f(x)$ 为偶函数, 且 $f(1) = 0$, $f(x-3) \geq 0$,

所以得: $f(x-3) \geq f(1)$,

又因为函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 所以得: $|x-3| \leq 1$,

解之得: $2 \leq x \leq 4$, 即解集为: $[2, 4]$.

故答案为: $[2, 4]$.

15. 【答案】 ②④

【分析】结合函数的奇偶性, 单调性, 最值和基本不等式应用对选项一一判断即可.

【详解】对①, 偶函数是对定义域内任意 x , 都有 $f(-x) = f(x)$, 仅取 $x = 2$ 时成立, 不能确定是偶函数, 故①错误;

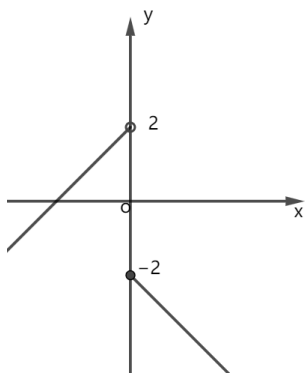
对②, 定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 在区间上 $(-\infty, 0]$ 单调递增, 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 其中 $x = 0$ 时两段函数图像相接,

故函数在 \mathbf{R} 上是增函数, 所以②正确;

对③, 函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$, $a < c < b$, 若 $f(x)$ 在 $[a, c]$ 上是增函数, 在 $[c, b]$ 上是减函数,

不一定有 $f(x)_{\max} = f(c)$, 如当 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x < 0 \\ -x-2, & x \geq 0 \end{cases}$,

如图所示时,



故③错误;

对④, 由基本不等式可得 $a^2 + b^2 \geq 2ab$, 即 $2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$, 进一步可得 $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$, 当且仅当 $a = b$ 时等号成立,

对任意 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 则 $\sqrt{\frac{x_1 + x_2}{2}} \geq \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}{2}$, 当且仅当 $x_1 = x_2$ 时等号成立,

由 $f(x) = \sqrt{x}$, 则 $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, 故④正确

故答案为: ②④.

三、解答题 (共 6 小题, 共 85 分, 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程)

16. 【答案】(1) $A \cup B = \{x | 1 < x \leq 8\}$, $(\complement_U A) \cap B = \{x | 1 < x < 2\}$

(2) $\{a | a < 8\}$

【分析】(1) 根据集合的交并补的定义, 即可求解;

(2) 利用运算结果, 结合数轴, 即可求解.

【小问 1 详解】

$$A \cup B = \{x | 2 \leq x \leq 8\} \cup \{x | 1 < x < 6\} = \{x | 1 < x \leq 8\}.$$

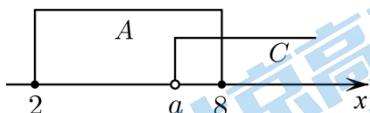
$$\because \complement_U A = \{x | x < 2 \text{ 或 } x > 8\},$$

$$\therefore (\complement_U A) \cap B = \{x | 1 < x < 2\}.$$

【小问 2 详解】

$\because A \cap C \neq \emptyset$, 作图易知, 只要 a 在 8 的左边即可,

$$\therefore a < 8.$$



$\therefore a$ 的取值范围为 $\{a | a < 8\}$.

17. 【答案】(1) 奇函数 (2) 4

(3) $(-\infty, -2)$ 和 $(2, +\infty)$

【分析】(1) 根据函数奇偶性定义可判断;

(2) 利用基本不等式可得解;

(3) 根据对勾型函数的图像可得解.

【小问 1 详解】

因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,

$$\text{又 } f(-x) = -x - \frac{4}{x} = -f(x),$$

所以函数 $f(x)$ 是奇函数.

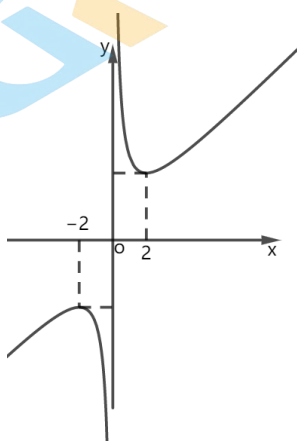
【小问 2 详解】

$\because x > 0$,

$$\therefore f(x) = x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4, \text{ 当且仅当 } x = \frac{4}{x}, \text{ 即 } x = 2 \text{ 时等号成立,}$$

所以 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x)$ 的最小值为 4.

【小问 3 详解】



函数 $f(x)$ 的增区间为 $(-\infty, -2)$ 和 $(2, +\infty)$.

18. 【答案】(1) $a = 0$

(2) $[4, +\infty)$

$$(3) f(x)_{\min} = \begin{cases} 2-2a, & a \leq 1 \\ 1-a^2, & 1 < a < 2 \\ 5-4a, & a \geq 2 \end{cases}$$

【分析】(1) 由偶函数定义可直接构造方程求得 a 的值;

(2) 由二次函数的单调性可确定对称轴位置, 由此可得 a 的取值范围;

(3) 分别在 $a \leq 1$, $1 < a < 2$ 和 $a \geq 2$ 的情况下, 根据二次函数的单调性确定最小值点, 进而得到最小值.

【小问 1 详解】

$\because f(x)$ 为偶函数, $\therefore f(-x) = f(x)$, 即 $x^2 + 2ax + 1 = x^2 - 2ax + 1$,

$\therefore 2a = -2a$, 解得: $a = 0$.

【小问 2 详解】

$\therefore f(x)$ 的对称轴为 $x = a$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 4]$ 上是减函数, $\therefore a \geq 4$,

即实数 a 的取值范围为 $[4, +\infty)$.

【小问 3 详解】

由题意知: $f(x)$ 开口方向向上, 对称轴为 $x = a$,

当 $a \leq 1$ 时, $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, $\therefore f(x)_{\min} = f(1) = 2 - 2a$;

当 $1 < a < 2$ 时, $f(x)$ 在 $[1, a]$ 上单调递减, 在 $(a, 2]$ 上单调递增, $\therefore f(x)_{\min} = f(a) = 1 - a^2$;

当 $a \geq 2$ 时, $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上单调递减, $\therefore f(x)_{\min} = f(2) = 5 - 4a$;

综上所述: $f(x)_{\min} = \begin{cases} 2 - 2a, & a \leq 1 \\ 1 - a^2, & 1 < a < 2 \\ 5 - 4a, & a \geq 2 \end{cases}$.

19. 【答案】(1) $a = 0$

(2) 单调递增, 证明见解析

(3) $(0, \frac{1}{3})$

【分析】(1) 由题意 $f(0) = a = 0$, 由此即可得解.

(2) 由定义法证之即可.

(3) 结合奇函数的单调性即可求.

【小问 1 详解】

因为定义在区间 $(-1, 1)$ 上的函数 $f(x) = \frac{x+a}{x^2+1}$ 为奇函数,

则 $f(0) = a = 0$, 经验证满足题意, 则 $a = 0$;

【小问 2 详解】

由 (1) 知 $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增,

证明如下: 设 $-1 < x_1 < x_2 < 1$, 则 $f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1^2+1} - \frac{x_2}{x_2^2+1} = \frac{(x_1x_2-1)(x_2-x_1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$,

其中 $x_1x_2 - 1 < 0$, $x_2 - x_1 > 0$,

所以 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$,

故函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上单调递增.

【小问 3 详解】

由 $f(2t-1)+f(t)<0$ ，又 $f(x)$ 为奇函数，

即 $f(2t-1)<-f(t)=f(-t)$ ，

又 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 上单调递增，

$$\text{则} \begin{cases} 2t-1 < -t \\ 2t-1 > -1 \\ -t < 1 \end{cases}, \text{解得 } 0 < t < \frac{1}{3}.$$

则解集为 $(0, \frac{1}{3})$.

20. 【答案】(1) $k=2$, $W(x)=\begin{cases} -2x^2+80x-50, 0 < x \leq 20 \\ 2050-20x-\frac{18000}{x}, x > 20 \end{cases}$

(2) 当年产量为 30 万只时，公司在该款运动手环的生产中所获得的利润最大，最大利润为 850 万元.

【分析】(1) 由题意可得 $W(x)=xR(x)-20x-50$ ，由 $W(5)=300$ 可求出 k ，然后可得 $W(x)$ 的解析式；

(2) 利用二次函数的知识求出当 $0 < x \leq 20$ 时 $W(x)$ 的最大值，利用基本不等式求出当 $x > 20$ 时 $W(x)$ 的最大值，然后作比较可得答案.

【小问 1 详解】

由题意可得 $W(x)=xR(x)-20x-50$

当 $x=5$ 时 $R(5)=100-5k$ ，所以 $W(5)=5R(5)-20 \cdot 5-50=500-25k-150=300$

解得 $k=2$

$$\text{所以 } W(x)=xR(x)-20x-50=\begin{cases} -2x^2+80x-50, 0 < x \leq 20 \\ 2050-20x-\frac{18000}{x}, x > 20 \end{cases}$$

【小问 2 详解】

当 $0 < x \leq 20$ 时， $W(x)=-2x^2+80x-50$ ，其对称轴为 $x=20$

所以当 $x=20$ 时 $W(x)$ 取得最大值 750 万元

当 $x > 20$ 时， $W(x)=2050-20x-\frac{18000}{x}=2050-20\left(x+\frac{900}{x}\right) \leq 2050-20 \cdot 2\sqrt{x \cdot \frac{900}{x}}=850$ 万元

当且仅当 $x=\frac{900}{x}$ 即 $x=30$ 时等号成立

因为 $850 > 750$

所以当年产量为 30 万只时，公司在该款运动手环的生产中所获得的利润最大，最大利润为 850 万元.

21. 【答案】(1) 答案见解析

(2) 证明见解析 (3) 7

【分析】(1) 根据题中定义判断可得出结论；

(2) 不妨设 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ ，利用反证法，通过讨论集合 A 中去掉的元素，结合“任意双拆”的定义得出等式，推出矛盾，即可证得原结论成立；

(3) 分析可知集合 A 中每个元素均为奇数，且集合 A 中所有元素都为奇数，分析可知 $n \geq 7$ ，当 $n = 7$ 时， $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ ，根据“任意分拆”的定义可判断集合 A 可“任意分拆”，即可得出结论。

【小问 1 详解】

解：对于集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ ， $\{1, 2, 3, 4\} - \{4\} = \{1, 2, 3\}$ ，且 $1 + 2 = 3$ ，

所以，集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 可双拆，

若在集合中去掉元素 1，因为 $2 + 3 \neq 4$ ， $2 + 4 \neq 3$ ， $3 + 4 \neq 2$ ，故集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ 不可“任意分拆”；

若集合 $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ 可以“双拆”，则在集合 $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ 去除任意一个元素形成新集合 B，

若存在集合 B_1 、 B_2 使得 $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ ， $B_1 \cup B_2 = B$ ， $S(B_1) = S(B_2)$ ，则

$$S(B) = S(B_1) + S(B_2) = 2S(B_1),$$

即集合 B 中所有元素之和为偶数，

事实上，集合 B 中的元素为 5 个奇数，这 5 个奇数的和为奇数，不合乎题意，

故集合 $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ 不可“双拆”。

【小问 2 详解】

证明：不妨设 $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ 。

反证法：如果集合 A 可以“任意双拆”，

若去掉的元素为 a_1 ，将集合 $\{a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 分成两个交集为空集的子集，且两个子集元素之和相等，

则有 $a_2 + a_5 = a_3 + a_4$ ，①，或 $a_5 = a_2 + a_3 + a_4$ ，②，

若去掉的元素为 a_2 ，将集合 $\{a_1, a_3, a_4, a_5\}$ 分成两个交集为空集的子集，且两个子集元素之和相等，

则有 $a_1 + a_5 = a_3 + a_4$ ，③，或 $a_5 = a_1 + a_3 + a_4$ ，④，

由①-③可得 $a_1 = a_2$ ，矛盾；

由②-③可得 $a_1 = -a_2$ ，矛盾；

由①-④可得 $a_1 = -a_2$ ，矛盾；

由②-④可得 $a_1 = a_2$ ，矛盾。

因此，当 $n = 5$ 时，集合 A 一定不能“任意双拆”。

【小问 3 详解】

解：设集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 。

由题意可知 $S(A) - a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 均为偶数，因此 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 均为奇数或偶数。

如果 $S(A)$ 为奇数，则 $a_i (i=1,2,\dots,n)$ 也均为奇数，由于 $S(A) = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ，则 n 为奇数；

如果 $S(A)$ 为偶数，则 $a_i (i=1,2,\dots,n)$ 也均为偶数。

此时设 $a_i = 2b_i$ ，则 $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ 也是可“任意分拆”的，

重复上述操作有限次，便可得各项均为奇数的“任意分拆”集，此时各项之和也为奇数，

则集合 A 中元素个数 n 为奇数，

综上所述，集合 A 中的元素个数为奇数，

当 $n=3$ 时，显然集合 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ 不可“任意分拆”；

当 $n=5$ 时，由 (2) 可知， $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ 不可“任意分拆”，故 $n \geq 7$ 。

当 $n=7$ 时，取集合 $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$ ，

因为 $3+5+7+9=11+13$ ， $1+9+13=5+7+11$ ， $1+3+5+11=7+13$ ， $1+3+7+11=9+13$ ，

$1+9+11=3+5+13$ ， $3+7+9=1+5+13$ ， $1+3+5+9=7+11$ ，

则集合 A 可“任意分拆”，

所以，集合 A 中元素个数 n 的最小值为 7。

【点睛】方法点睛：处理集合有关的新定义问题时，关键在于审清题意，合理将所给定义转化为元素与集合、集合与集合之间的关系来处理，本题在证明 (2) 中的结论时，要充分利用题中定义，结合反证法推出矛盾，进而得出结论成立。

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023年10-11月北京各区各年级期中试题 & 答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

