2022 北京石景山高三（上）期末

数　学

本试卷共 6 页，满分为 150 分，考试时间为 120 分钟．请务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效，考试结束后上交答题卡。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1．设集合 $A=\{x\mid -2<x<4\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则 $A\cap B=$

A．$\{2,3,4\}$　　B．$\{3,4\}$　　C．$\{2,3\}$　　D．$\{2\}$

2．已知 i 为虚数单位，若 $(2+i)z=i$，则复数 z 在复平面内对应的点位于

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．设函数 $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x^3}$，则 $f(x)$ 是

A．奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递增　　B．奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递减

C．偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递增　　D．偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递减

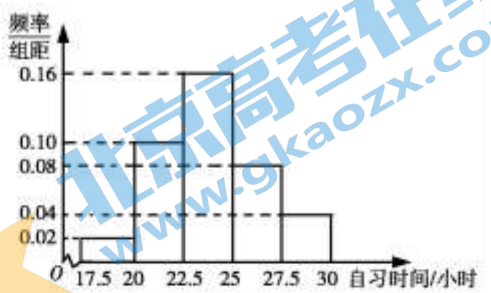
4．将 2 本不同的数学书和 1 本语文书在书架上随机排成一行，则 2 本数学书相邻的概率为

A．$\dfrac{1}{6}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{1}{2}$　　D．$\dfrac{2}{3}$

5．记 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_2=3$，$S_4=18$，则 $S_6=$

A．36　　B．45　　C．63　　D．75

6．某高校调查了 200 名学生每周的自习时间（单位：小时），其中自习时间的范围是 $[17.5，30]$，并制成了频率分布直方图，如右图所示，样本数据分组为 $[17.5，20)$，$[20，22.5)$，$[22.5，25)$，$[25，27.5)$，$[27.5，30]$．根据频率分布直方图，这 200 名学生中每周的自习时间不少于 22.5 小时的人数是



A．56　　B．60　　C．120　　D．140

7．若 $a>b>1$，$0<c<1$，则

A．$c^b<c^a$　　B．$\log_c a>\log_c b$　　C．$a^c<b^c$　　D．$\log_a c>\log_b c$

8．在△ABC 中，若 $2b\cos B=a\cos C+c\cos A$，则 $B=$

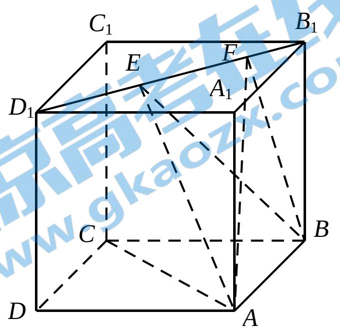
A．$\dfrac{\pi}{6}$　　B．$\dfrac{\pi}{4}$　　C．$\dfrac{\pi}{3}$　　D．$\dfrac{2\pi}{3}$

9．设 $\{a_n\}$ 是首项为 -1 的等比数列，公比为 q，则“$q<0$”是“对任意的正整数 n，$a_{2n-1}+a_{2n}>0$”的

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

10．如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为1，线段 B_1D_1 上有两个动点 E，F，且 $EF=\frac{1}{2}$，给出下列三个结论：



① $AC\perp BE$

②△ AEF 的面积与△ BEF 的面积相等

③三棱锥 $A-BEF$ 的体积为定值

其中，所有正确结论的个数是

A． 0　　　　B． 1　　　　C． 2　　　　D． 3

第二部分（非选择题共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

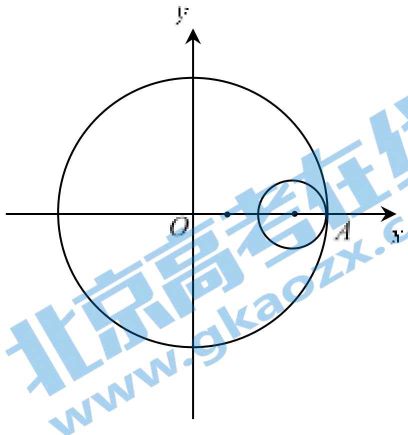
11．已知向量 $\boldsymbol{a}=(2,5)$，$\boldsymbol{b}=(\lambda,4)$，若 $\boldsymbol{a}//\boldsymbol{b}$，则 $\lambda=$__________.

12．双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 的焦点坐标为________，渐近线方程为________.

13．设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{x-1}, & x<1,\\ x^{\frac{1}{2}}, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则使得 $f(x)\leqslant 2$ 成立的 x 的取值范围是________.

14．若点 $P(\cos\theta,\sin\theta)$ 关于 x 轴的对称点为 $Q(\cos(\theta+\frac{\pi}{3}),\sin(\theta+\frac{\pi}{3}))$，则 θ 的一个取值为________.

15．数学中有许多形状优美的曲线，如星形线，让一个半径为 r 的小圆在一个半径为 $4r$ 的大圆内部，小圆沿着大圆的圆周滚动，小圆的圆周上任一点形成的轨迹即为星形线．如图，已知 $r=1$，起始位置时大圆与小圆的交点为 A（A 点为 x 轴正半轴上的点），滚动过程中 A 点形成的轨迹记为星形线 C．有如下结论：



① 曲线 C 上任意两点间距离的最大值为8；

② 曲线 $D:|x|+|y|=4$ 的周长大于曲线 C 的周长；

③ 曲线 C 与圆 $x^2+y^2=4$ 有且仅有 4 个公共点．

其中正确的序号为________________.

三、解答题共 6 小题，共 85 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

16．（本小题 13 分）

已知函数 $g(x)=\sin(x-\frac{\pi}{6})$，$h(x)=\cos x$，从条件① $f(x)=g(x)\cdot h(x)$、条件② $f(x)=g(x)+h(x)$ 这两个条件中选择一个作为已知，求：

（I） $f(x)$ 的最小正周期；

（II） $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最小值．

注：如果选择条件①和条件②分别解答，按第一个解答计分．

17. （本小题 14 分）

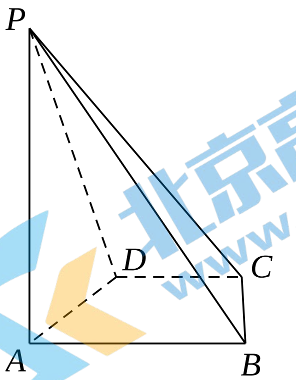
如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为直角梯形，$\angle DAB=\angle ADC=\frac{\pi}{2}$，侧面 PAD 为直角三角形，

$\angle PAD=\frac{\pi}{2}$，$CD\perp$ 平面PAD.

（I）求证：$CD//$ 平面PAB；

（II）求证：$PA\perp$ 平面$ABCD$；

（III）若 $AB=3$，$PD=4$，$CD=AD=2$，判断在线段 PD 上是否存在一点 M，使得直线 AM 与平面 PBC 所成角的大小为 $\frac{\pi}{4}$.



18. （本小题 13 分）

某校组织"创建文明城区"知识竞赛，有 A，B 两类问题，每位参加比赛的学生先在两类问题中选择一类，然后从所选类别的问题中随机抽取一个问题回答，若回答错误则比赛结束；若回答正确则从另一类问题中再随机抽取一个问题回答，无论回答正确与否，比赛结束．A 类问题回答正确得 10 分，否则得 0 分；B 类问题回答正确得 30 分，否则得 0 分．已知小明同学能正确回答 A 类中的每一个问题的概率均为 0.8，能正确回答 B 类中的每一个问题的概率均为 0.5，且能正确回答问题的概率与回答次序无关.

（I）若小明先回答 A 类问题，记 X 为小明的累计得分，求 X 的分布列；

（II）为使累计得分的期望最大，小明应选择先回答哪类问题？并说明理由.

19. （本小题 15 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，$O$ 为坐标原点，右焦点坐标为 $F(\sqrt{2},0)$，椭圆 C 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（I）求椭圆 C 的方程；

（II）椭圆 C 在 y 轴上的两个顶点为 A,B，点 P 满足 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$，直线 PF 交椭圆于 M，N 两点，且 $|MN|=\sqrt{3}$，求此时 $\angle OPF$ 的大小.

20. （本小题 15 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{-ax^2+x-1}{e^x}$.

（I）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程；

（II）当 $a>0$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

（III）求证：当 $a\le -1$ 时， $f(x)\ge -e$.

21. （本小题 15 分）

记实数 a ， b 中的较大者为 $\max\{a,b\}$ ，例如 $\max\{1,2\}=2$ ， $\max\{1,1\}=1$ ，对于无穷数列 $\{a_n\}$ ，记 $\varphi_k=\max\{a_{2k-1},a_{2k}\}(k\in\mathbf{N}^*)$ ，若对于任意的 $k\in\mathbf{N}^*$ ，均有 $\varphi_{k+1}<\varphi_k$ ，则称数列 $\{a_n\}$ 为“趋势递减数列”.

（I）已知数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n=-2n+1$ ， $b_n=(-\dfrac{1}{2})^n$ ，判断数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是否为“趋势递减数列”，并说明理由；

（II）已知首项为 1 公比为 q 的等比数列 $\{c_n\}$ 是“趋势递减数列”，求 q 的取值范围；

（III）若数列 $\{d_n\}$ 满足 d_1 ， d_2 为正实数，且 $d_{n+2}=|d_{n+1}-d_n|$ ，求证： $\{d_n\}$ 为“趋势递减数列”的充要条件为 $\{d_n\}$ 的项中没有 0 .

2022 北京石景山高三（上）期末数学

参考答案

一、选择题：本大题共 10 个小题，每小题 4 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	A	A	D	B	D	D	C	B	C

二、填空题：本大题共 6 个小题，每小题 5 分，共 30 分.

11．$\frac{8}{5}$；　　12．$(\pm 4,0)$，$y=\pm\sqrt{3}x$；　　13．$(-\infty,4]$；

14．$-\frac{\pi}{6}$（答案不唯一）；　15．①③.

三、解答题：本大题共 6 个小题，共 80 分．解答题应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

16．（本小题 13 分）

解：选条件①：$f(x)=g(x)\cdot h(x)$；

（I）$f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{6})\cos x=(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x)\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cos x-\frac{1}{2}\cos^2 x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\times\frac{1+\cos 2x}{2}$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{4}$

$=\frac{1}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{4}$，

所以 $f(x)$ 的最小正周期是 π．　　　　………………7 分

（II）因为 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，

所以 $-\frac{\pi}{6}\leq 2x-\frac{\pi}{6}\leq\frac{5\pi}{6}$，

所以 $-\frac{1}{2}\leq\sin(2x-\frac{\pi}{6})\leq 1$，

所以 $-\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{4}\leq\frac{1}{4}$，

当 $2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$，即 $x=0$ 时，$f(x)$ 有最小值 $-\frac{1}{2}$．………………13 分

选条件②：$f(x)=g(x)+h(x)$．

（I）$f(x)=\sin(x-\frac{\pi}{6})+\cos x=(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x)+\cos x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$

$=\sin(x+\frac{\pi}{6})$，

所以 $f(x)$ 最小正周期是 2π． ………………7 分

（II）因为 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $\dfrac{\pi}{6}\le x+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{2\pi}{3}$，

所以 $\dfrac{1}{2}\le\sin(x+\dfrac{\pi}{6})\le 1$，

当 $x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}$，即 $x=0$ 时，$f(x)$ 有最小值 $\dfrac{1}{2}$． ………………13 分

17．（本小题 14 分）

解：（I）因为四棱锥 $P-ABCD$ 中，$\angle DAB=\angle ADC=\dfrac{\pi}{2}$，

所以 $AB//CD$，

因为 $AB\subset$ 平面PAB，$CD\not\subset$ 平面PAB，

所以 $CD//$ 平面PAB． ………………4 分

（II）因为 $CD\perp$ 平面PAD，$PA\subset$ 平面PAD，所以 $CD\perp PA$，

又因为 $\angle PAD=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $AD\perp PA$，

因为 $CD,AD\subset$ 平面$ABCD$，$CD\bigcap AD=D$，

所以 $PA\perp$ 平面$ABCD$． ………………9 分

（III）存在，当 M 为线段 PD 中点时，理由如下：

由（II）可知，因为 $PA\perp$ 平面$ABCD$，$AB\subset$ 平面$ABCD$，

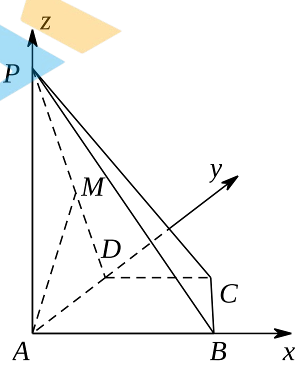
所以 $AB\perp PA$，

又 $AD\perp PA$，$AB\perp AD$，

如图以点 A 为坐标原点，分别以 AB,AD,AP 为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系 $A-xyz$，

则 $A(0,0,0)$，$B(3,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2\sqrt{3})$．

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，



由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}-x+2y=0,\\ 3x-2\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

令 $z=\sqrt{3}$，所以 $\vec{n}=(2,1,\sqrt{3})$．

设 $\overrightarrow{DM}=\lambda\overrightarrow{DP}$（$0\le\lambda\le 1$），

则 $M(0,2-2\lambda,2\sqrt{3}\lambda)$，

所以 $\overrightarrow{AM}=(0,2-2\lambda,2\sqrt{3}\lambda)$，

直线 AM 与平面 PBC 所成角为 θ，

所以 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{AM},\vec{n}>\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}}{\left|\overrightarrow{AM}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}\right|=\left|\dfrac{4\lambda+2}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{16\lambda^2-8\lambda+4}}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，符合题意，

所以当 M 为线段 PD 中点时，直线 AM 与平面 PBC 所成角的大小为 $\frac{\pi}{4}$． ………………14 分

18.（本小题 13 分）

解：（I）由题可知，X 的所有可能取值为 0，10，40．

$P(X=0)=1-0.8=0.2$；$P(X=10)=0.8\times(1-0.5)=0.4$；$P(X=40)=0.8\times0.5=0.4$．

所以 X 的分布列为

X	0	10	40
P	0.2	0.4	0.4

………………6 分

（II）由（I）知，$E(X)=0\times0.2+10\times0.4+40\times0.4=20$．

若小明先回答 B 问题，记 Y 为小明的累计得分，则 Y 的所有可能取值为 0，30，40．

$P(Y=0)=1-0.5=0.5$；$P(Y=30)=0.5\times(1-0.8)=0.1$；$P(X=40)=0.5\times0.8=0.4$，

所以 $E(Y)=0\times0.5+30\times0.1+40\times0.4=19$．

因为 $19<20$，所以小明应选择先回答 A 类问题． ………………13 分

19.（本小题 15 分）

解：（I）因为右焦点为 $F(\sqrt{2},0)$，所以 $c=\sqrt{2}$，

因为离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

所以 $a=\sqrt{3}$，$b^2=a^2-c^2=3-2=1$，

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$． ………………5 分

（II）当直线 PF 垂直于 x 轴时，$|MN|=\frac{2\sqrt{3}}{3}\neq\sqrt{3}$（舍）．

当直线 PF 不垂直于 x 轴时，设直线 PF 的方程为 $y=k(x-\sqrt{2})$，

由 $\begin{cases} y=k(x-\sqrt{2}), \\ \frac{x^2}{3}+y^2=1, \end{cases}$ 整理得 $(1+3k^2)x^2-6\sqrt{2}k^2x+6k^2-3=0$，

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，由题意 $\Delta>0$ 恒成立，

所以 $x_1+x_2=\frac{6\sqrt{2}k^2}{1+3k^2}$，$x_1x_2=\frac{6k^2-3}{1+3k^2}$，

$|MN|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{1+k^2}\sqrt{(\frac{6\sqrt{2}k^2}{1+3k^2})^2-4\times\frac{6k^2-3}{1+3k^2}}=\sqrt{1+k^2}\sqrt{\frac{12k^2+12}{(1+3k^2)^2}}=\sqrt{3}$，

解得 $k=\pm1$，

所以直线 PF 的方程为 $y=\pm(x-\sqrt{2})$．

因为 A，B 为椭圆 C 在 y 轴上的两个顶点，不妨设 $A(0,1)$，$B(0,-1)$，

因为 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$， 设 $P(m,n)$，

所以 $(m,n-1)\cdot(m,n+1)=0$， 即 $m^2+n^2=1$，

即点 P 在以原点为圆心，半径为1的圆上．

法一：因为原点到直线 PF 的距离 $d=\dfrac{|\sqrt{2}|}{\sqrt{1+k^2}}=\dfrac{|\sqrt{2}|}{\sqrt{1+(\pm1)^2}}=1$，

所以直线 PF 与圆 $m^2+n^2=1$ 相切，

所以 $\angle OPF=90^\circ$．

法二：联立 $\begin{cases}n=m-\sqrt{2},\\ m^2+n^2=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ n=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$ 即 $P(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，

或 $\begin{cases}n=-m+\sqrt{2},\\ m^2+n^2=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ n=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\end{cases}$ 即 $P(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2})$，

因为 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{PF}=0$，

所以 $\angle OPF=90^\circ$． ………………15 分

20.（本小题 15 分）

解：（I） $f'(x)=\dfrac{(-ax^2+x-1)'\cdot e^x-(-ax^2+x-1)\cdot(e^x)'}{(e^x)^2}=\dfrac{ax^2-(2a+1)x+2}{e^x}=\dfrac{(ax-1)(x-2)}{e^x}$

因为 $f'(0)=2$， $f(0)=-1$

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程为 $y=2x-1$………………4 分

（II）由（I）知： $f'(x)=\dfrac{(ax-1)(x-2)}{e^x}$， （$x\in\mathbf{R}$）

因为 $a>0$， 令 $f'(x)=0$， 所以 $x=\dfrac{1}{a}$ 或 $x=2$，

当 $0<a<\dfrac{1}{2}$ 时， $\dfrac{1}{a}>2$，

则 x，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,\dfrac{1}{a})$	$\dfrac{1}{a}$	$(\dfrac{1}{a},+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时， $\dfrac{1}{a}=2$， 则 $f'(x)\geq 0$ 恒成立， $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 内恒增；

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，$0<\frac{1}{a}<2$，则 x，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

综上，当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，单调递增区间是 $(-\infty,2)$ 和 $(\frac{1}{a},+\infty)$，单调递减区间是 $(2,\frac{1}{a})$；

当 $a=\frac{1}{2}$ 时，单调递增区间是 $(-\infty,+\infty)$，无单调递减区间；

当 $a>\frac{1}{2}$ 时，单调递增区间是 $(-\infty,\frac{1}{a})$ 和 $(2,+\infty)$，单调递减是 $(\frac{1}{a},2)$……………….10 分

（III）当 $a\leqslant-1$ 时，令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{a}$ 或 $x=2$，易知 $\frac{1}{a}\in[-1,0)$

则 x，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	$(-\infty,\frac{1}{a})$	$\frac{1}{a}$	$(\frac{1}{a},2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	极小值	↗	极大值	↘

所以当 $x=\frac{1}{a}$ 时，$f(x)$ 取得极小值 $f(\frac{1}{a})=-\frac{1}{e^{\frac{1}{a}}}=-e^{-\frac{1}{a}}$

由于 $a\leqslant-1$，则 $\frac{1}{a}\in[-1,0)$，$-\frac{1}{a}\in(0,1]$，$e^{-\frac{1}{a}}\in(1,e]$，$-e^{-\frac{1}{a}}\in[-e,1)$

所以由极小值定义及 $f(x)$ 的单调性可知：当 $x<2$ 时，$f(x)\geqslant-e$.

接下来，研究 $f(x)$ 在 $x\geqslant2$ 的变化情况.

因为 $e^x>0$ 恒成立，设 $g(x)=-ax^2+x-1,(x\geqslant2,a\leqslant-1)$

对称轴 $x=\frac{1}{2a}<0$，$\Delta=1-4a>0$，$g(2)=1-4a>0$

所以由二次函数的性质可知：当 $x\geqslant2$ 时，$g(x)>g(2)>0$ 恒成立

所以 $f(x)>0$ 在 $x\geqslant2$ 时恒成立.

综上所述：当 $a\leqslant-1$ 时，$f(x)\geqslant-e$……………….15 分

21.（本小题 15 分）

解：（I）数列 $\{a_n\}$ 是“趋势递减数列”.

因为 $\{a_n\}$ 是单调递减数列，$\varphi_k=\max\{a_{2k-1},a_{2k}\}=a_{2k-1}$，且 $\varphi_{k+1}<\varphi_k$.所以数列 $\{a_n\}$ 是“趋势递减数列”.

数列 $\{b_n\}$ 是“趋势递减数列”.

因为 $\varphi_k=\max\{b_{2k-1},b_{2k}\}=b_{2k}$，且 $\varphi_{k+1}<\varphi_k$.所以数列 $\{b_n\}$ 是“趋势递减数列”……………….4 分

（II）当 $q>1$ 时，数列 $\{c_n\}$ 为单调递增数列，此时 $\max\{c_{2k-1},c_{2k}\}=c_{2k}$，且 $c_{2k+2}>c_{2k}$ 不满足题意；

当 $q=1$ 时，数列 $\{c_n\}$ 为常数列，不满足题意；

当 $0<q<1$ 时，数列 $\{c_n\}$ 为单调递减数列，此时 $\max\{c_{2k-1},c_{2k}\}=c_{2k-1}$，且 $c_{2k+1}<c_{2k-1}$，满足题意；

当 $-1<q<0$ 时，此时 $\max\{c_{2k-1},c_{2k}\}=c_{2k}$，且 $c_{2k+2}<c_{2k}$，满足题意；

当 $q<-1$ 时，此时 $\max\{c_{2k-1},c_{2k}\}=c_{2k}$，且 $c_{2k+2}>c_{2k}$，不满足题意；

综上，q 的取值范围为 $(-1,0)\cup(0,1)$ ……………….9 分

（III）先证必要性：

假设存在正整数 $m(m\geq 3)$ 使得 $d_m=0$，$d_m=|d_{m-1}-d_{m-2}|=0$，令 $d_{m-1}=d_{m-2}=a$.

因为 d_1，d_2 为正实数，且 $d_{n+2}=|d_{n+1}-d_n|$ 所以 $d_n\geq 0$，故 $a\geq 0$，

则数列 $\{d_n\}$ 从 d_{n-2} 开始以后的各项为 $a,a,0,a,a,0\cdots$，

当 $2k-1\geq m-2$ 时 $\max\{d_{2k-1},d_{2k}\}=a$，$\max\{d_{2k+1},d_{2k+2}\}=a$ 与 $\{d_n\}$ 为“趋势递减数列”矛盾，故假设不成立，$\{d_n\}$ 的项中没有 0.

再证明充分性：

$d_{n+2}=|d_{n+1}-d_n|$ 得 $d_{n+2}<\max\{d_{n+1},d_n\}$，

因为 $\{d_n\}$ 的项中没有 0，所以对于任意正整数 n，$d_n\neq 0$，于是 $d_{2k+3}\neq 0$，

所以 $d_{2k+1}\neq d_{2k+2}$.

当 $d_{2k+1}>d_{2k+2}$ 时，$\max\{d_{2k+1},d_{2k+2}\}=d_{2k+1}<\max\{d_{2k-1},d_{2k}\}$，

当 $d_{2k+1}<d_{2k+2}$ 时，$\max\{d_{2k+1},d_{2k+2}\}=d_{2k+2}<\max\{d_{2k-1},d_{2k}\}$，

所以 $\{d_n\}$ 为“趋势递减数列”.

综上：$\{d_n\}$ 为“趋势递减数列”的充要条件为 $\{d_n\}$ 的项中没有 0 ……………15 分

【若有不同解法，请酌情给分】