北京市朝阳区高三年级第一次综合练习

数学学科测试(理工类)

2018.3

(考试时间 120 分钟　满分 150 分)

本试卷分为选择题(共 40 分)和非选择题(共 110 分)两部分

第一部分(选择题　共 40 分)

一、选择题:本大题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,选出符合题目要求的一项.

1. 已知全集为实数集 $\mathbf{R}$,集合 $A=\{x|x^2-3x<0\}$,$B=\{x|2^x>1\}$,则 $(\complement_{\mathbf{R}}A)\cap B=$

A. $(-\infty,0]\cup[3,+\infty)$　　B. $(0,1]$

C. $[3,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

2. 复数 z 满足 $(1+\mathrm{i})z=\mathrm{i}$,则在复平面内复数 z 所对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=-\sqrt{3}t,\\ y=1+3t\end{cases}$ (t 为参数),则 l 的倾斜角大小为

A. $\dfrac{\pi}{6}$　　B. $\dfrac{\pi}{3}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{5\pi}{6}$

4. 已知 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量,则“$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0$”是“$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 夹角为锐角”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

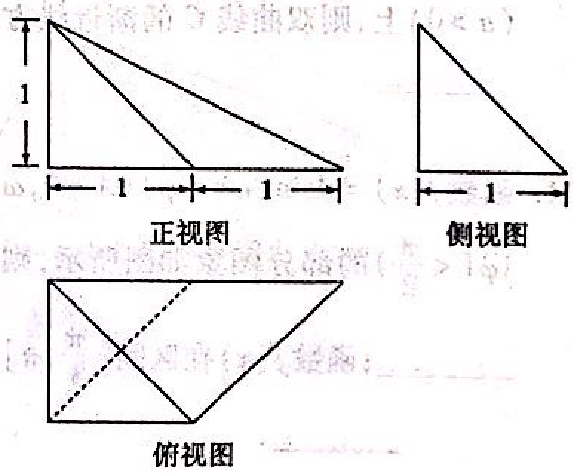
5. 某单位安排甲、乙、丙、丁 4 名工作人员从周一到周五值班,每天有且只有 1 人值班,每人至少安排一天且甲连续两天值班,则不同的安排方法种数为

A. 18　　B. 24　　C. 48　　D. 96

6. 某四棱锥的三视图如图所示,则该四棱锥的体积等于

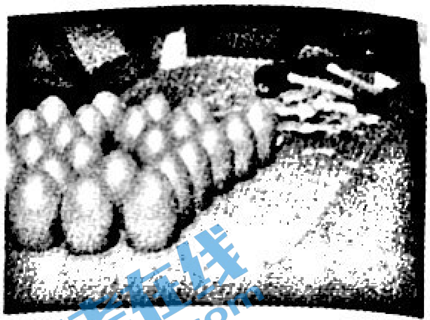
A. $\dfrac{3}{4}$　　B. $\dfrac{2}{3}$

C. $\dfrac{1}{2}$　　D. $\dfrac{1}{3}$



(第 6 题图)

7. 庙会是我国古老的传统民俗文化活动，又称“庙市”或“节场”．庙会大多在春节、元宵节等节日举行．庙会上有丰富多彩的文化娱乐活动，如“砸金蛋”（游玩者每次砸碎一颗金蛋，如果有奖品，则“中奖”）．今年春节期间，某校甲、乙、丙、丁四位同学相约来到某庙会，每人均获得砸一颗金蛋的机会．游戏开始前，甲、乙、丙、丁四位同学对游戏中奖结果进行了预测，预测结果如下：



甲说：“我或乙能中奖”；

乙说：“丁能中奖”；

丙说：“我或乙能中奖”；

丁说：“甲不能中奖”．

游戏结束后，这四位同学中只有一位同学中奖，且只有一位同学的预测结果是正确的，则中奖的同学是

A. 甲　　B. 乙　　C. 丙　　D. 丁

8. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(\sqrt{3},0)$，$B(1,2)$，动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，其中 $\lambda,\mu\in[0,1]$，$\lambda+\mu\in[1,2]$，则所有点 P 构成的图形面积为

A. 1　　B. 2　　C. $\sqrt{3}$　　D. $2\sqrt{3}$

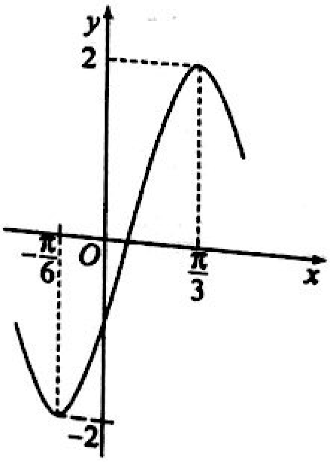
第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在答题卡上．

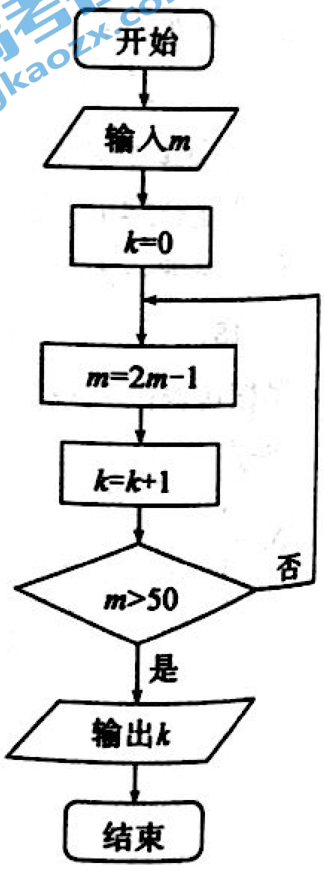
9. 执行如图所示的程序框图，若输入 $m=5$，则输出 k 的值为________．

10. 若三个点 $(-2,1)$，$(-2,3)$，$(2,-1)$ 中恰有两个点在双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1$ $(a>0)$ 上，则双曲线 C 的渐近线方程为________．

11. 函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\omega>0,|\varphi|<\dfrac{\pi}{2})$ 的部分图象如图所示，则 $\omega=$________；函数 $f(x)$ 在区间 $[\dfrac{\pi}{3},\pi]$ 上的零点为________．



（第 11 题图）



（第 9 题图）

12. 已知点 $A(-2,0)$，$B(0,2)$，若点 M 是圆 $x^2+y^2-2x+2y=0$ 上的动点，则 $\triangle ABM$ 面积的最小值为________.

13. 等比数列 $\{a_n\}$ 满足如下条件：① $a_1>0$；②数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n<1$.
试写出满足上述所有条件的一个数列的通项公式________.

14. 已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}(x+1)^2+a, & x<0,\\ \dfrac{\sin\frac{\pi x}{2}}{2^{x-1}+2^{-x+1}}, & x>0.\end{cases}$ 当 $x>0$ 时，函数 $f(x)$ 的最大值是________；
若函数 $f(x)$ 的图象上有且只有两对点关于 y 轴对称，则 a 的取值范围是________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15. （本小题满分 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\sin A=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，$b=2a\cos A$.

（Ⅰ）若 $ac=5$，求 $\triangle ABC$ 的面积；

（Ⅱ）若 B 为锐角，求 $\sin C$ 的值.

16. （本小题满分 14 分）

如图 1，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=4$，E 为 AD 的中点，O 为 BE 的中点. 将 $\triangle ABE$ 沿 BE 折起到 $A'BE$，使得平面 $A'BE\perp$ 平面 $BCDE$（如图 2）.

（Ⅰ）求证：$A'O\perp CD$；

（Ⅱ）求直线 $A'C$ 与平面 $A'DE$ 所成角的正弦值；

（Ⅲ）在线段 $A'C$ 上是否存在点 P，使得 $OP\,/\!/$ 平面 $A'DE$？若存在，求出 $\dfrac{A'P}{A'C}$ 的值；若不存在，请说明理由.

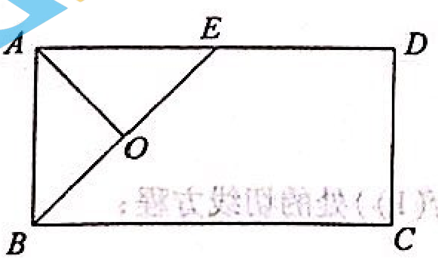


图 1

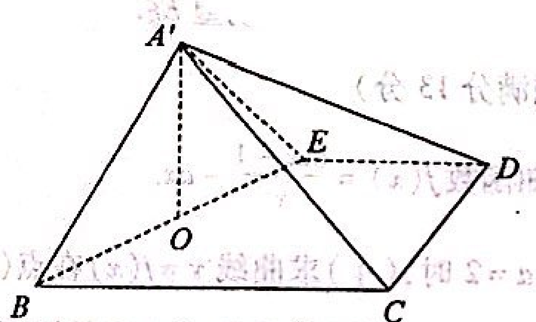


图 2

17.（本小题满分 13 分）

某地区高考实行新方案，规定：语文、数学和英语是考生的必考科目，考生还须从物理、化学、生物、历史、地理和政治六个科目中选取三个科目作为选考科目．若一名学生从六个科目中选出了三个科目作为选考科目，则称该学生的选考方案确定；否则，称该学生选考方案待确定．例如，学生甲选择"物理、化学和生物"三个选考科目，则学生甲的选考方案确定，"物理、化学和生物"为其选考方案．

某学校为了了解高一年级 420 名学生选考科目的意向，随机选取 30 名学生进行了一次调查，统计选考科目人数如下表：

性别	选考方案确定情况	物理	化学	生物	历史	地理	政治
男生	选考方案确定的有 8 人	8	8	4	2	1	1
	选考方案待确定的有 6 人	4	3	0	1	0	0
女生	选考方案确定的有 10 人	8	9	6	3	3	1
	选考方案待确定的有 6 人	5	4	1	0	0	1

（Ⅰ）估计该学校高一年级选考方案确定的学生中选考生物的学生有多少人？

（Ⅱ）假设男生、女生选择选考科目是相互独立的．从选考方案确定的 8 位男生随机选出 1 人，从选考方案确定的 10 位女生中随机选出 1 人，试求该男生和该女生的选考方案中都含有历史科目的概率；

（Ⅲ）从选考方案确定的 8 名男生随机选出 2 名，

设随机变量 $\xi=\begin{cases}1, & 2\text{ 名男生选考方案相同},\\ 2, & 2\text{ 名男生选考方案不同},\end{cases}$

求 ξ 的分布列及数学期望 $E\xi$.

18.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x-1}{x}-ax$.

（Ⅰ）当 $a=2$ 时，（ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若 $1<a<2$，求证：$f(x)<-1$.

19. (本小题满分 14 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，且过点 $(1,\frac{\sqrt{2}}{2})$.

(Ⅰ)求椭圆 C 的方程；

(Ⅱ)过椭圆 C 的左焦点的直线 l_1 与椭圆 C 交于 A,B 两点，直线 l_2 过坐标原点且与直线 l_1 的斜率互为相反数．若直线 l_2 与椭圆交于 E,F 两点且均不与点 A,B 重合，设直线 AE 与 x 轴所成的锐角为 θ_1，直线 BF 与 x 轴所成的锐角为 θ_2，判断 θ_1 与 θ_2 的大小关系并加以证明．

20. (本小题满分 13 分)

已知集合 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_8\}$ 是集合 $S=\{2001,2002,2003,\cdots,2016,2017\}$ 的一个含有 8 个元素的子集．

(Ⅰ)当 $X=\{2001,2002,2005,2007,2011,2013,2016,2017\}$ 时，

设 $x_i,x_j\in X(1\leqslant i,j\leqslant 8)$，

(ⅰ)写出方程 $x_i-x_j=2$ 的解 (x_i,x_j)；

(ⅱ)若方程 $x_i-x_j=k(k>0)$ 至少有三组不同的解，写出 k 的所有可能取值；

(Ⅱ)证明：对任意一个 X，存在正整数 k，使得方程 $x_i-x_j=k(1\leqslant i,j\leqslant 8)$ 至少有三组不同的解．

北京市朝阳区高三年级第一次综合练习

数学学科测试答案(理工类)

2018.3

一、选择题:(本题满分 40 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	C	B	B	D	A	C

二、填空题:(本题满分 30 分)

题号	9	10	11		12	13	14	
答案	4	$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$	2	$\frac{7\pi}{12}$	2	$a_n=\frac{1}{2^n}$(答案不唯一)	$\frac{1}{2}$	$(-1,\frac{1}{2})$

三、解答题:(本题满分 80 分)

15.(本小题满分 13 分)

解:(Ⅰ)由 $b=2a\cos A$,得 $\cos A>0$,

因为 $\sin A=\frac{\sqrt{5}}{5}$,所以 $\cos A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

因为 $b=2a\cos A$,所以 $\sin B=2\sin A\cos A=2\times\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{4}{5}$.

故 $\triangle ABC$ 的面积 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=2$. ………………………… 7 分

(Ⅱ)因为 $\sin B=\frac{4}{5}$,且 B 为锐角,所以 $\cos B=\frac{3}{5}$.

所以 $\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\frac{11\sqrt{5}}{25}$. ………………… 13 分

16.(本小题满分 14 分)

证明:(Ⅰ)由已知 $AB=AE=2$,

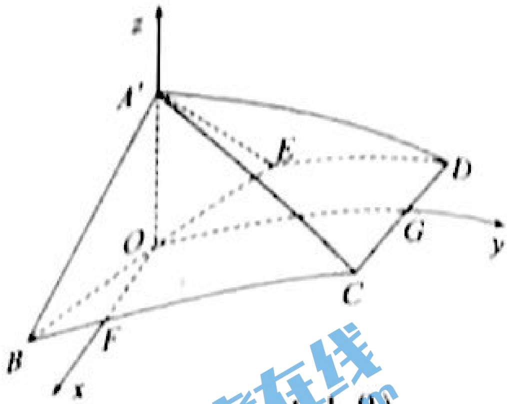
因为 O 为 BE 中点,所以 $A'O\perp BE$.

因为平面 $A'BE\perp$ 平面 $BCDE$,且平面 $A'BE\cap$ 平面 $BCDE=BE$,$A'O\subset$ 平面 $A'BE$,

所以 $A'O\perp$ 平面 $BCDE$.

又因为 $CD\subset$ 平面 $BCDE$,所以 $A'O\perp CD$. ………………………… 5 分

(Ⅱ)设 F 为线段 BC 上靠近 B 点的四等分点,G 为 CD 中点.



由已知易得 $OF\perp OG$.

由(Ⅰ)可知,$A'O\perp$ 平面 $BCDE$,

所以 $A'O\perp OF$,$A'O\perp OG$.

以 O 为原点,OF,OG,OA' 所在直线分别为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系(如图).

因为 $A'B=2$,$BC=4$,

所以 $A'(0,0,\sqrt{2})$,$B(1,-1,0)$,$C(1,3,0)$,$D(-1,3,0)$,$E(-1,1,0)$.

设平面 $A'DE$ 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

因为 $\overrightarrow{A'D}=(-1,3,-\sqrt{2})$,$\overrightarrow{DE}=(0,-2,0)$,

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-x_1+3y_1-\sqrt{2}z_1=0,\\ -2y_1=0.\end{cases}$

取 $z_1=-1$,得 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},0,-1)$.

而 $\overrightarrow{A'C}=(1,3,-\sqrt{2})$.

所以直线 $A'C$ 与平面 $A'DE$ 所成角的正弦值 $\sin\theta=\left|\dfrac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. …… 10 分

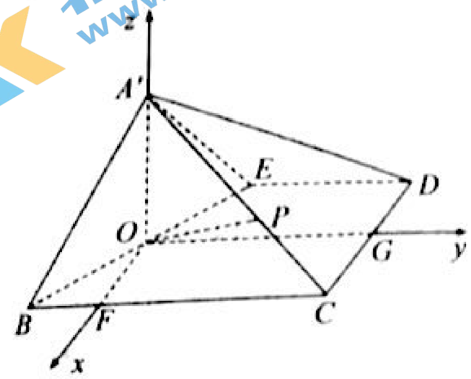
(Ⅲ)在线段 $A'C$ 上存在点 P,使得 $OP/\!/$ 平面 $A'DE$.

设 $P(x_0,y_0,z_0)$,且 $\dfrac{A'P}{A'C}=\lambda(0\leqslant\lambda\leqslant1)$,则 $\overrightarrow{A'P}=\lambda\overrightarrow{A'C}$,$\lambda\in[0,1]$.

因为 $A'(0,0,\sqrt{2})$,$C(1,3,0)$,所以 $(x_0,y_0,z_0-\sqrt{2})=(\lambda,3\lambda,-\sqrt{2}\lambda)$,

所以 $x_0=\lambda$,$y_0=3\lambda$,$z_0=\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda$,

所以 $P(\lambda,3\lambda,\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda)$,$\overrightarrow{OP}=(\lambda,3\lambda,\sqrt{2}-\sqrt{2}\lambda)$.



若 $OP/\!/$ 平面 $A'DE$,则 $\overrightarrow{OP}\perp\boldsymbol{m}$.即 $\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{m}=0$.

由(Ⅱ)可知,平面 $A'DE$ 的一个法向量 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{2},0,-1)$,

即 $\sqrt{2}\lambda-\sqrt{2}+\sqrt{2}\lambda=0$,解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}\in[0,1]$,

所以当 $\dfrac{A'P}{A'C}=\dfrac{1}{2}$ 时,$OP/\!/$ 平面 $A'DE$. …………………………………… 14 分

17.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由题可知，选考方案确定的男生中确定选考生物的学生有 4 人，选考方案确定的女生中确定选考生物的学生有 6 人，

该学校高　年级选考方案确定的学生中选考生物的学生有$\frac{10}{18}\times\frac{18}{30}\times420=140$ 人.

…………………………………………………………………………………… 3 分

（Ⅱ）由数据可知，选考方案确定的 8 位男生中选出 1 人选考方案中含有历史学科的概率为$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$；

选考方案确定的 10 位女生中选出 1 人选考方案中含有历史学科的概率为$\frac{3}{10}$.

所以该男生和该女生的选考方案中都含有历史学科的概率为$\frac{1}{4}\times\frac{3}{10}=\frac{3}{40}$.

…………………………………………………………………………………… 8 分

（Ⅲ）由数据可知，选考方案确定的男生中有 4 人选择物理、化学和生物；有 2 人选择物理、化学和历史；有 1 人选择物理、化学和地理；有 1 人选择物理、化学和政治.

由已知得 ξ 的取值为 1，2.

$$P(\xi=1)=\frac{C_4^2+C_2^2}{C_8^2}=\frac{1}{4},$$

$$P(\xi=2)=\frac{C_4^1(C_2^1+C_2^1)+C_2^1\times2+1}{C_8^2}=\frac{3}{4},$$

或 $P(\xi=2)=1-P(\xi=1)$.

所以 ξ 的分布列为

ξ	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

所以 $E\xi=1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$. …………………………………… 13 分

18.（本小题满分 13 分）

（Ⅰ）当 $a=2$ 时，$f(x)=\frac{\ln x-1}{x}-2x$.

$$f'(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}-2=\frac{2-2x^2-\ln x}{x^2}.$$

（ⅰ）可得 $f'(1)=0$，又 $f(1)=-3$，所以 $f(x)$ 在点 $(1,-3)$ 处的切线方程为 $y=-3$.

…………………………………………………………………………………… 3 分

(ⅱ) 在区间$(0,1)$上$2-2x^2>0$，且$-\ln x>0$，则$f'(x)>0$.

在区间$(1,+\infty)$上$2-2x^2<0$，且$-\ln x<0$，则$f'(x)<0$.

所以$f(x)$的单调递增区间为$(0,1)$，单调递减区间$(1,+\infty)$. …………………… 8 分

(Ⅱ) 由$x>0$，$f(x)<-1$，等价于$\dfrac{\ln x-1}{x}-ax<-1$，等价于$ax^2-x+1-\ln x>0$，

设$h(x)=ax^2-x+1-\ln x$，只须证$h(x)>0$成立.

因为$h'(x)=2ax-1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2ax^2-x-1}{x}$，$1<a<2$，

由$h'(x)=0$，得$2ax^2-x-1=0$有异号两根.

令其正根为x_0，则$2ax_0^2-x_0-1=0$.

在$(0,x_0)$上$h'(x)<0$，在$(x_0,+\infty)$上$h'(x)>0$.

则$h(x)$的最小值为$h(x_0)=ax_0^2-x_0+1-\ln x_0$

$$=\frac{1+x_0}{2}-x_0+1-\ln x_0$$

$$=\frac{3-x_0}{2}-\ln x_0.$$

又$h'(1)=2a-2>0$，$h'\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\left(\dfrac{a}{2}-\dfrac{3}{2}\right)=a-3<0$，

所以$\dfrac{1}{2}<x_0<1$.

则$\dfrac{3-x_0}{2}>0$，$-\ln x_0>0$.

因此$\dfrac{3-x_0}{2}-\ln x_0>0$，即$h(x_0)>0$. 所以$h(x)>0$.

所以$f(x)<-1$. ………………………………………………………………………… 13 分

19.（本小题满分 14 分）

解：(Ⅰ) 由题意得$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ a^2=b^2+c^2,\\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{2b^2}=1.\end{cases}$ 解得$a=\sqrt{2}$，$b=1$，$c=1$.

故椭圆C的方程为$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. ………………………………………… 5 分

(Ⅱ) $\theta_1=\theta_2$.

证明如下：

由题意可设直线l_1的方程为$y=k(x+1)$，直线l_2的方程为$y=-kx$，设点

$A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $E(x_3,y_3)$, $F(-x_3,-y_3)$.

要证 $\theta_1=\theta_2$，即证直线 AE 与直线 BF 的斜率之和为零，即 $k_{AE}+k_{BF}=0$.

因为 $k_{AE}+k_{BF}=\dfrac{y_1-y_3}{x_1-x_3}+\dfrac{y_2+y_3}{x_2+x_3}$

$$=\frac{k(x_1+1)+kx_3}{x_1-x_3}+\frac{k(x_2+1)-kx_3}{x_2+x_3}$$

$$=\frac{k[2x_1x_2+(x_1+x_2)+2x_3^2]}{(x_1-x_3)(x_2+x_3)}.$$

由 $\begin{cases}y=k(x+1),\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$，

所以 $x_1+x_2=\dfrac{-4k^2}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}$.

由 $\begin{cases}y=-kx,\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2=2$，所以 $x_3^2=\dfrac{2}{1+2k^2}$.

所以 $2x_1x_2+(x_1+x_2)+2x_3^2=\dfrac{4k^2-4}{1+2k^2}+\dfrac{-4k^2}{1+2k^2}+\dfrac{4}{1+2k^2}=0$.

$$k_{AE}+k_{BF}=\frac{k[2x_1x_2+(x_1+x_2)+2x_3^2]}{(x_1-x_3)(x_2+x_3)}=0.$$

所以 $\theta_1=\theta_2$. …………………………………………………………………… 14 分

20.（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）（ⅰ）方程 $x_i-x_j=2$ 的解有：$(x_i,x_j)=(2007,2005)$，$(2013,2011)$. ………… 2 分

（ⅱ）以下规定两数的差均为正，则：

列出集合 X 的从小到大 8 个数中相邻两数的差：1，3，2，4，2，3，1；

中间隔一数的两数差（即上一列差数中相邻两数和）：4，5，6，6，5，4；

中间相隔二数的两数差：6，9，8，9，6；

中间相隔三数的两数差：10，11，11，10；

中间相隔四数的两数差：12，14，12；

中间相隔五数的两数差：15，15；

中间相隔六数的两数差：16

这 28 个差数中，只有 4 出现 3 次、6 出现 4 次，其余都不超过 2 次，

所以 k 的可能取值有 4，6. ……………………………………………………… 6 分

(Ⅱ)证明：不妨设 $2001\leq x_1<x_2<\cdots<x_8\leq 2017$，记 $a_i=x_{i+1}-x_i(i=1,2,\cdots,7)$，$b_i=x_{i+2}-x_i(i=1,2,\cdots,6)$，共 13 个差数. 假设不存在满足条件的 k，则这 13 个数中至多两个 1、两个 2、两个 3、两个 4、两个 5、两个 6，从而

$(a_1+a_2+\cdots+a_7)+(b_1+b_2+\cdots+b_6)\geq 2(1+2+\cdots+6)+7=49$. ……………… ①

又 $(a_1+a_2+\cdots+a_7)+(b_1+b_2+\cdots+b_6)=(x_8-x_1)+(x_8+x_7-x_2-x_1)$

$=2(x_8-x_1)+(x_7-x_2)\leq 2\times 16+14=46$，这与①矛盾！

所以结论成立. …………………………………………………………………………………… 13 分