

## 理科数学

命题单位:河北衡水中学 天舟教科院  
成绩查询网址:youngdale.onlyets.com

成绩查询微信公众号:ruiya2006

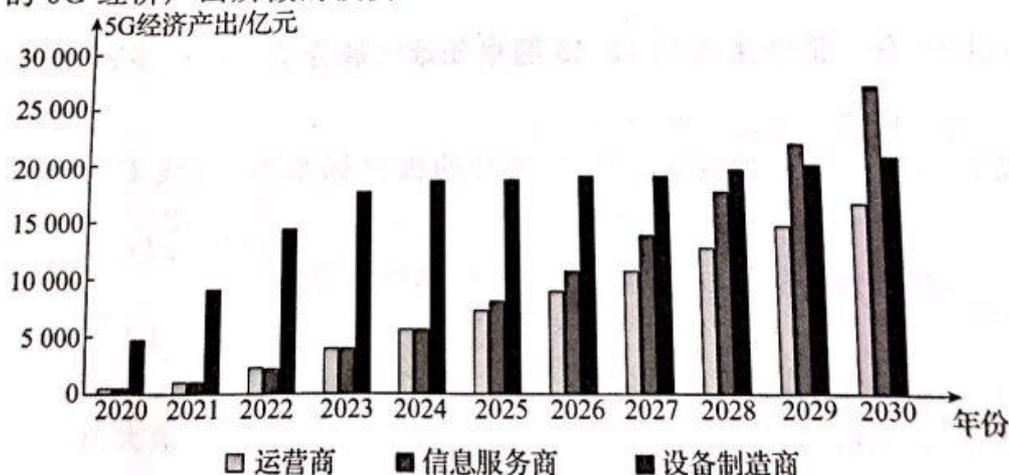
本试卷 4 页。满分 150 分。考试时间 120 分钟。

注意事项:

- 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上相应的位置。
- 全部答案在答题卡上完成,答在本试卷上无效。
- 回答选择题时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案用 0.5 mm 黑色笔迹签字笔写在答题卡上。
- 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 已知集合  $A = \{x | y = \sqrt{-x^2 + x + 6}\}$ , 集合  $B = \{x | x \geq 1\}$ , 则  $A \cap B =$   
A.  $\{x | -2 \leq x \leq 3\}$  B.  $\{x | x \geq 1\}$  C.  $\{x | 1 \leq x \leq 3\}$  D.  $\{x | x \geq -2\}$
- 已知  $i$  为虚数单位,  $z = \frac{2+i}{6-8i}$ , 设  $\bar{z}$  是  $z$  的共轭复数, 则在复平面内  $\bar{z}$  对应的点位于  
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
- 由我国引领的 5G 时代已经到来, 5G 的发展将直接带动包括运营、制造、服务在内的通信行业整体的快速发展, 进而对 GDP 增长产生直接贡献, 并通过产业间的关联效应和波及效应, 间接带动国民经济各行业的发展, 创造出更多的经济增加值. 如图是某单位结合近年数据, 对今后几年的 5G 经济产出所做的预测。



结合上图, 下列说法错误的是

- 5G 的发展带动今后几年的总经济产出逐年增加
  - 设备制造商的经济产出前期增长较快, 后期放缓
  - 信息服务商与运营商的经济产出的差距有逐步拉大的趋势
  - 设备制造商在各年的总经济产出中一直处于领先地位
4. 已知等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_3 = a_3 - a_1$ ,  $a_4 = 1$ , 则  $a_7 =$
- A. -8 B.  $-\frac{1}{8}$  C.  $\frac{1}{8}$  D. 8

5. 已知  $e$  是自然对数的底数, 则  $(\frac{1}{e})^{10}$ ,  $10^{\frac{1}{e}}$ ,  $\lg \frac{1}{e}$  的大小关系为

A.  $\lg \frac{1}{e} < (\frac{1}{e})^{10} < 10^{\frac{1}{e}}$

B.  $(\frac{1}{e})^{10} < \lg \frac{1}{e} < 10^{\frac{1}{e}}$

C.  $\lg \frac{1}{e} < 10^{\frac{1}{e}} < (\frac{1}{e})^{10}$

D.  $(\frac{1}{e})^{10} < 10^{\frac{1}{e}} < \lg \frac{1}{e}$

6. “角谷定理”的内容为对于每一个正整数, 如果它是奇数, 则对它乘 3 再加 1, 如果它是偶数, 则对它除以 2, 如此循环, 最终都能够得到 1. 右图为研究角谷定理的一个程序框图. 若输入  $n$  的值为 10, 则输出  $i$  的值为

A. 5

C. 7

B. 6

D. 8

7. 已知单位向量  $e_1, e_2$  分别与平面直角坐标系  $x, y$  轴的正方向同向, 且向量  $\overrightarrow{AC} = 3e_1 - e_2$ ,  $\overrightarrow{BD} = 2e_1 + 6e_2$ , 则平面四边形  $ABCD$  的面积为

A.  $\sqrt{10}$

C. 10

B.  $2\sqrt{10}$

D. 20

8. 已知向量  $a = (2\sin x, -1)$ ,  $b = (\sin x + \sqrt{3}\cos x, 1)$ , 且函数  $f(x) = a \cdot b$ , 则下列说法正确的是

A. 若  $x_1, x_2$  是方程  $f(x) = 1$  的两根, 则  $x_1 - x_2$  是  $\pi$  的整数倍

B. 当  $x = \frac{\pi}{6}$  时,  $f(x)$  取得最大值

C.  $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$  是函数  $f(x)$  的一个单调递增区间

D. 将函数  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{3}$  个单位长度得到一个奇函数图象

9. “学习强国”学习平台是由中宣部主管, 以深入学习宣传习近平新时代中国特色社会主义思想为主要内容, 立足全体党员、面向全社会的优质平台, 现日益成为老百姓了解国家动态、紧跟时代脉搏的热门 APP. 该款软件主要设有“阅读文章”“视听学习”两个学习板块和“每日答题”“每周答题”“专项答题”“挑战答题”四个答题板块. 某人在学习过程中, “阅读文章”与“视听学习”两大学习板块之间最多间隔一个答题板块的学习方法有

A. 192 种

B. 240 种

C. 432 种

D. 528 种

10. 已知函数  $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leq 0, \\ -x^2 + 3x, & x > 0, \end{cases}$   $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq a, \\ -2x + 4, & x > a. \end{cases}$  若函数  $g(x)$  恰有两个零点, 则  $a$  的取值范围是

A.  $[0, 2)$

B.  $[4, +\infty)$

C.  $[0, 2) \cup [4, +\infty)$

D.  $[0, 2) \cup [3, +\infty)$

11. 在菱形  $ABCD$  中,  $\angle DAB = 60^\circ$ , 将这个菱形沿对角线  $BD$  折起, 使得平面  $DAB \perp$  平面  $BDC$ , 若此时三棱锥  $A-BCD$  的外接球的表面积为  $5\pi$ , 则  $AB$  的长为

A.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

B.  $\sqrt{3}$

C.  $\sqrt{5}$

D. 3

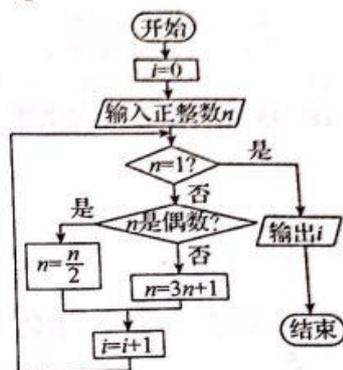
12. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1, F_2$ , 过  $F_1$  的直线  $l$  交  $C$  于  $A, B$  两点. 若  $\overrightarrow{AF_1} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB}$ ,  $|AF_2| = |F_1F_2|$ , 则椭圆  $C$  的离心率为

A.  $\frac{2}{7}$

B.  $\frac{3}{7}$

C.  $\frac{4}{7}$

D.  $\frac{5}{7}$



二、填空题:本题共4小题,每小题5分,共20分。

13. 曲线  $y=e^x-x\ln x$  在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为\_\_\_\_\_。

14. 万众瞩目的北京冬奥会将于2022年2月4日正式开幕,继2008年北京奥运会之后,国家体育场(又名鸟巢)将再次承办奥运会开幕式。在手工课上,王老师带领同学们一起制作了一个近似鸟巢的金属模型,其俯视图可近似看成是两个大小不同、扁平程度相同的椭圆,已知大椭圆的长轴长为40 cm,短轴长为20 cm,小椭圆的短轴长为10 cm,则小椭圆的长轴长为\_\_\_\_\_ cm。



15.  $(2-x^3)(1-2x)^5$  的展开式中  $x^5$  的系数为\_\_\_\_\_。

16. 将数列  $\{a_n\}$  中的项排成下表:

$a_1$

$a_2, a_3$

$a_4, a_5, a_6, a_7$

$a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, a_{15}$

...

已知各行的第一个数  $a_1, a_2, a_4, a_8, \dots$  构成数列  $\{b_n\}$ ,  $b_2=3$ , 且  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$  满足  $S_{n+1}+S_{n-1}=2S_n+2(n \in \mathbb{N}^*, \text{ 且 } n \geq 2)$ . 从第三行起, 每一行中的数按从左到右的顺序均构成等差数列, 且公差为同一个常数. 若  $a_{130}=19$ , 则第5行的所有项的和为\_\_\_\_\_。

三、解答题:共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第17~21题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第22、23题为选考题, 考生根据要求作答。

(一)必考题:共60分。

17. (12分)

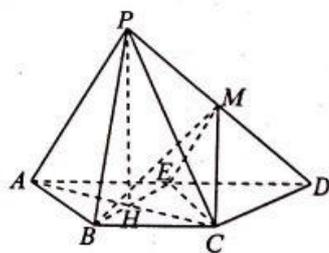
在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  所对的边分别是  $a, b, c$ , 且  $c \sin 2B - b \sin(A+B) = 0$ .

(1)求角  $B$  的大小;

(2)设  $a=4, c=6$ , 求  $\sin C$  的值。

18. (12分)

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中, 底面  $ABCD$  为等腰梯形,  $\angle BAD = 60^\circ, AB=2, BC=2$ , 点  $E$  为  $AD$  的中点, 连接  $AC, BE$  交于点  $H$ ,  $PH \perp$  平面  $ABCD$ .



(1)若点  $M$  是线段  $PD$  上任意一点, 求证: 平面  $BEM \perp$  平面  $PAC$ .

(2)若点  $M$  为  $PD$  的中点, 且  $PA=2\sqrt{3}$ , 求二面角  $C-EM-D$  的余弦值。

19. (12分)

已知  $F$  是抛物线  $E: y^2=2px (p>0)$  的焦点, 恰好又是双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$

的右焦点, 双曲线  $C$  过点  $(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$ , 且其离心率为  $\sqrt{2}$ .

(1)求抛物线  $E$  和双曲线  $C$  的标准方程;

(2)已知直线  $l$  过点  $F$ , 且与抛物线  $E$  交于  $A, B$  两点, 以  $AB$  为直径作圆  $M$ , 设圆  $M$  与  $y$  轴交于点  $P, Q$ , 求  $\angle PMQ$  的最大值。

20. (12分)

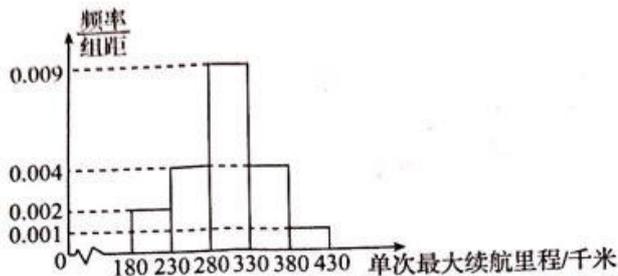
已知函数  $f(x)=e^x(ax^2+x+a^2)$  在  $x=-1$  处取得极小值。

(1)求实数  $a$  的值;

(2)若函数  $f(x)$  存在极大值与极小值, 且函数  $g(x)=f(x)-2x-m$  有两个零点, 求实数  $m$  的取值范围。(参考数据:  $e \approx 2.718, \sqrt{5} \approx 2.236$ )

21. (12分)

2019年7月1日至3日,世界新能源汽车大会在海南博鳌召开,大会着眼于全球汽车产业的转型升级和生态环境的持续改善.某汽车公司顺应时代潮流,最新研发了一款新能源汽车,并在出厂前对100辆汽车进行了单次最大续航里程(理论上是指新能源汽车所装载的燃料或电池能够提供给车行驶的最远里程)的测试.现对测试数据进行分析,得到如下的频率分布直方图:



- (1) 估计这100辆汽车的单次最大续航里程的平均值  $\bar{x}$  (同一组中的数据用该组区间的中点值代表).
- (2) 根据大量的汽车测试数据,可以认为这款汽车的单次最大续航里程  $X$  近似地服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 经计算第(1)问中样本标准差  $s$  的近似值为50. 用样本平均数  $\bar{x}$  作为  $\mu$  的近似值, 用样本标准差  $s$  作为  $\sigma$  的估计值, 现任取一辆汽车, 求它的单次最大续航里程恰在250千米到400千米之间的概率.  
参考数据: 若随机变量  $\xi$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 则  $P(\mu - \sigma < \xi \leq \mu + \sigma) \approx 0.6827$ ,  $P(\mu - 2\sigma < \xi \leq \mu + 2\sigma) \approx 0.9545$ ,  $P(\mu - 3\sigma < \xi \leq \mu + 3\sigma) \approx 0.9973$ .
- (3) 某汽车销售公司为推广此款新能源汽车, 现面向意向客户推出“玩游戏, 送大奖”活动, 客户可根据抛掷硬币的结果, 操控微型遥控车在方格图上行进, 若遥控车最终停在“胜利大本营”, 则可获得购车优惠券. 已知硬币出现正、反面的概率都是  $\frac{1}{2}$ , 方格图上标有第0格、第1格、第2格、……、第50格. 遥控车开始在第0格, 客户每掷一次硬币, 遥控车向前移动一次, 若掷出正面, 遥控车向前移动一格(从  $k$  到  $k+1$ ), 若掷出反面, 遥控车向前移动两格(从  $k$  到  $k+2$ ), 直到遥控车移到第49格(胜利大本营)或第50格(失败大本营)时, 游戏结束. 设遥控车移到第  $n$  格的概率为  $P_n$ , 试说明  $\{P_n - P_{n-1}\}$  是等比数列, 并解释此方案能否成功吸引顾客购买该款新能源汽车.

(二) 选考题: 共10分. 请考生在第22、23题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. [选修4-4: 坐标系与参数方程](10分)

已知在以  $O$  为极点,  $x$  轴的正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线  $C$  的极坐标方程为  $\rho =$

$$\frac{3}{\sqrt{1+2\sin^2\theta}}, \text{ 在直角坐标系 } xOy \text{ 中, 直线 } l \text{ 的参数方程为 } \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \text{ (} t \text{ 为参数).}$$

- (1) 设曲线  $C$  与直线  $l$  的交点为  $A, B$ , 求弦  $AB$  的长度;  
(2) 若动点  $Q$  在曲线  $C$  上, 在(1)的条件下, 试求  $\triangle QAB$  面积的最大值.

23. [选修4-5: 不等式选讲](10分)

已知函数  $f(x) = |2x+1| - 2, g(x) = |x|$ .

- (1) 解不等式  $f(x) \geq g(x)$ ;  
(2) 若对于任意的实数  $x \in [3, +\infty)$ , 都有  $|2x+1| - a \geq |x|$  恒成立, 求实数  $a$  的取值范围.