

人大附中 2023 届高三 10 月检测练习

数 学

命题人：王鼎 审题人：侯立伟 郑华林 彭晓

说明：本试卷 21 道题，共 150 分；考试时间 120 分钟；请在答题卡上填写个人信息，并将条形码贴在答题卡的相应位置上。

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的，请将正确答案填涂在答题纸上的相应位置。）

- 已知集合 $A = \{x | 0 < x < 3\}$, $B = \{x | y = \ln(x-2)\}$, $A \cup B =$ ()
A. $(0, +\infty)$ B. $(2, +\infty)$ C. $(2, 3)$ D. $(0, 3)$
- 命题 “ $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)g(x) \neq 0$ ” 的否定是 ()
A. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ 且 $g(x) = 0$ B. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ 或 $g(x) = 0$
C. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ 且 $g(x) = 0$ D. $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ 或 $g(x) = 0$
- 若 $ab > 0$, 且 $a > b$, 则下列不等式一定成立的是 ()
A. $a^2 > b^2$ B. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ C. $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} > 2$ D. $\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$
- 已知集合 $A = \{x | x^2 - x - 6 > 0\}$, $B = \{x | 0 < x + a < 4\}$, 若 “ $x \in A$ ” 是 “ $x \in B$ ” 的必要不充分条件, 则实数 a 的取值范围是 ()
A. $(-3, 6)$ B. $[-3, 6]$
C. $(-\infty, -3) \cup (6, +\infty)$ D. $(-\infty, -3] \cup [6, +\infty)$
- 若 $\tan\left(\alpha - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}$, 则 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值为 ()
A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. -3 D. $-\frac{1}{3}$
- 设 $f(x) = x^\alpha$, 其中 $\alpha \in \left\{-1, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$, 则 “函数 $y = f(x)$ 的图像经过点 $(-1, 1)$ ” 是 “函数 $y = f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减” 的 ()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
- 某科技公司为解决芯片短板问题, 计划逐年加大研发资金投入. 若该公司计划 2021 年全年投入研发资金 120 亿元, 在此基础上, 每年投入的研发资金比上一年增长 12%, 则该公司全年投入的研发资金开始超过 200 亿元的年份是 ().
参考数据: $\lg 1.12 \approx 0.05$, $\lg 2 \approx 0.30$, $\lg 3 \approx 0.48$
A. 2023 年 B. 2024 年 C. 2025 年 D. 2026 年

8. 当 $a > 0$, 且 $a \neq 1$ 时, 函数 $y = \log_a(x-1) + 2$ 的图像经过定点 T . 若直线 $2mx + ny - 4 = 0$

也经过点 T , 则当 $m > 0, n > 0$ 时, $\frac{1}{m} + \frac{4}{n}$ 的最小值为 ()

- A. 4
B. 6
C. $3 + 2\sqrt{2}$
D. $3 + 2\sqrt{6}$

9. 已知 $f(x) = \begin{cases} (a-2)x + 4a + 1, & x \leq 2 \\ 2a^{x-1}, & x > 2 \end{cases}$ ($a > 0, a \neq 1$). 若 $f(x)$ 存在最小值, 则实数 a 的取

值范围为 ()

- A. $(0, \frac{1}{2}]$
B. $(0, \frac{3}{4}]$
C. $(0, \frac{1}{2}] \cup (1, 2)$
D. $(0, \frac{3}{4}] \cup (1, 2)$

10. 已知 $f(x) = \sin|x| + |\sin x| + \cos|x| + |\cos x|$, 给出下述四个结论:

- ① $y = f(x)$ 是偶函数; ② $y = f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$ 上为减函数;
③ $y = f(x)$ 在 $(\pi, 2\pi)$ 上为增函数; ④ $y = f(x)$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$.

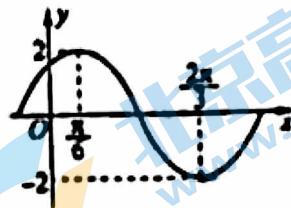
其中所有正确结论的编号是 ()

- A. ① B. ② C. ①③ D. ①④

二、填空题 (本大题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分. 请把结果填在答题纸上的相应位置.)

11. 若 i 为虚数单位, 复数满足 $z(1-i) = |3-4i|$, 则 z 的虚部为 _____.

12. 函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图像如



图所示, 则函数 $f(x)$ 的解析式为 _____.

13. 若直线 $y = kx + 1$ 与曲线 $f(x) = \ln x$ 相切, 则 $k =$ _____.

14. 关于函数 $f(x) = \cos(2x - \frac{\pi}{3}) + \cos(2x + \frac{\pi}{6})$ 有下列命题:

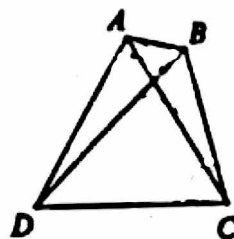
- ① 其最大值为 2; ② 其最小正周期为 π ; ③ 在 $(\frac{\pi}{24}, \frac{13\pi}{24})$ 上单调递减;

④ 将函数 $y = \sqrt{2} \cos 2x$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位后将与已知函数图像重合.

其中正确的命题的序号是 _____.

5. 如图, 四边形 $ABCD$ 中, $AC = AD = CD = 7, \sin \angle BAC = \frac{5\sqrt{3}}{14}$,

$\angle ABC = \frac{2\pi}{3}$, 则 $\triangle ABC$ 的面积为 _____, $BD =$ _____.



三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。请在答题纸上的相应位置作答。）

16.（本小题 13 分）

已知函数 $f(x) = x \ln x$ 。

（I）求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(c, f(c))$ 处的切线方程；

（II）求函数 $f(x)$ 的最小值。

17.（本小题 14 分）

在 $\triangle ABC$ 中， $a \cos B + \frac{\sqrt{3}}{2} b = c$ 。

（I）求 A 的大小；

（II）再从条件①、条件②、条件③这三个条件选择一个作为已知，使得 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定，求 BC 边上高线的长。

条件①： $\cos B = \frac{3\sqrt{21}}{14}$ ， $b = 1$ ；

条件②： $a = 2$ ， $c = 2\sqrt{3}$ ；

条件③： $b = 3$ ， $c = \sqrt{3}$ 。

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答给分。

18.（本小题 14 分）

已知函数 $f(x) = a \sin \omega x \cos \omega x$ ($a > 0$, $\omega > 0$)。从下列四个条件中选择两个作为已知，使函数 $f(x)$ 存在且唯一确定。

（I）求 $f(x)$ 的解析式；

（II）设 $g(x) = f(x) - 2 \cos^2 \omega x + 1$ ，求函数 $g(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上的单调递增区间。

条件①： $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ ；

条件②： $f(x)$ 为偶函数；

条件③： $f(x)$ 的最大值为 1；

条件④： $f(x)$ 图像的相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$ 。

注：如果选择多组条件分别解答，按第一个解答给分。

19. (本小题 14 分)

已知函数 $f(x) = 2x^3 - ax^2 + b$.

(I) 若函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值 -4 , 求实数 a, b 的值;

(II) 讨论 $f(x)$ 的单调性.

20. (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = e^x$, $g(x) = \sin x + \cos x$.

(I) 若 $f(x) \geq ax + 1$ 恒成立, 直接写出 a 的值, 并证明该不等式;

(II) 证明: 当 $x > -\frac{\pi}{4}$ 时, $f(x) \geq g(x)$;

(III) 当 $x > -\frac{\pi}{4}$ 时, 不等式 $f(x) + g(x) - 2 - ax \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值集合.

21. (本小题 15 分)

对各项均为正整数的有限数列 $A_0: a_1, a_2, a_3, \dots, a_n (n \in \mathbb{N}^+)$, 每次进行以下变换之一:

变换 T_1 : 将其中一项删除;

变换 T_2 : 将其中一项的数值由 x 变为 y , 其中 $y \in \mathbb{N}^+$, $y < x$;

变换 T_3 : 将其中一项变为两项, 由 x 变为 y, z , 其中 $y, z \in \mathbb{N}^+$, $y + z < x$.

(I) 若 $A_0: 2, 3$, 经过 k 次变换后其所有项均被删除, 且上述三种变换都至少进行了一次, 求 k ;

(II) 甲对 A_0 进行一次变换得到 A_1 , 乙对 A_1 进行一次变换得到 A_2 , \dots , 甲、乙轮流进行变换, 直到所有项均被删除.

① 若 $A_0: 1, 2, 2$, 甲能否确保自己最后将所有项删除? 说明理由.

② 若 $A_0: 1, 2, 3$, 乙能否确保自己最后将所有项删除? 说明理由.

③ 若 $A_0: 1, 2, 3, 4, 5$, 是否有人能确保自己最后将所有项删除? 说明理由.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “精益求精、专业严谨” 的建设理念，不断探索 “K12 教育+互联网+大数据” 的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供 “衔接和桥梁纽带” 作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。



微信搜一搜

北京高考资讯