

# 2022 北京西城高二（上）期末

## 数 学

2022.1

本试卷共5页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

### 第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共10小题，每小题4分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知直线  $l$  的一个方向向量为  $\mathbf{a} = (1, -1)$ ，则直线  $l$  的倾斜角为

- (A)  $45^\circ$  (B)  $90^\circ$   
(C)  $120^\circ$  (D)  $135^\circ$

(2) 在空间直角坐标系  $Oxyz$  中，点  $(1, 5, 2)$  关于  $xOy$  坐标平面的对称点为

- (A)  $(-1, 5, 2)$  (B)  $(1, -5, 2)$   
(C)  $(1, 5, -2)$  (D)  $(-1, -5, -2)$

(3) 抛物线  $x^2 = 2py$  的焦点坐标为  $(0, 1)$ ，则其准线方程为

- (A)  $x = -1$  (B)  $x = 1$   
(C)  $y = -1$  (D)  $y = 1$

(4) 圆  $O_1: x^2 + y^2 = 1$  与圆  $O_2: (x-2)^2 + y^2 = 9$  的位置关系为

- (A) 外离 (B) 外切  
(C) 相交 (D) 内切

(5) 在  $(x-2)^5$  的展开式中， $x^4$  的系数为

- (A)  $-5$  (B)  $-10$   
(C)  $5$  (D)  $10$

(6) 在长方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中， $AB = BC = 1$ ， $AA_1 = \sqrt{2}$ ，则直线  $AC_1$  与平面  $BB_1C_1C$  所成角的大小为

- (A)  $30^\circ$  (B)  $45^\circ$   
(C)  $60^\circ$  (D)  $90^\circ$

(7) 已知椭圆  $C_1: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，双曲线  $C_2: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ，其中  $a > b > 0$ 。若  $C_1$  与  $C_2$  的焦距之比为  $1:3$ ，则  $C_2$

的渐近线方程为

- (A)  $2x \pm \sqrt{5}y = 0$  (B)  $\sqrt{5}x \pm 2y = 0$   
(C)  $x \pm \sqrt{2}y = 0$  (D)  $\sqrt{2}x \pm y = 0$

(8) 将4名北京冬奥会志愿者分配到花样滑冰、短道速滑和冰球3个项目进行培训，每名志愿者只分配到1个项目，每个项目至少分配1名志愿者，则不同的分配方案共有

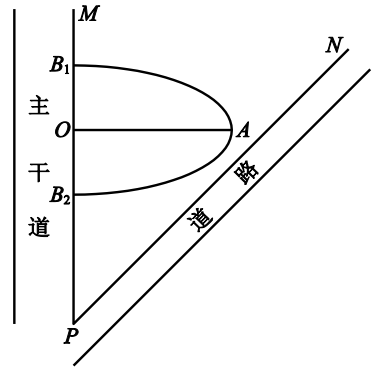
- (A) 48种 (B) 36种  
(C) 24种 (D) 12种

(9) 设抛物线的顶点为原点，焦点  $F$  在  $x$  轴上. 过  $F$  的直线交抛物线于点  $A$ ，则以  $AF$  为直径的圆

- (A) 必过原点 (B) 必与  $x$  轴相切  
(C) 必与  $y$  轴相切 (D) 必与抛物线的准线相切

(10) 如图，某市规划在两条道路边沿  $PM, PN$  之间建造一个半椭圆形状的主题公园，其中  $B_1B_2$  为椭圆的短轴， $OA$  为椭圆的半长轴. 已知  $OP=3\text{km}$ ， $B_1B_2=2\text{km}$ ， $\angle MPN=45^\circ$ . 为使  $OA$  尽可能大，其取值应为 (精确到  $0.1\text{km}$ )

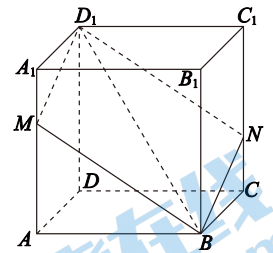
- (A) 2.9km  
(B) 2.8km  
(C) 2.7km  
(D) 2.6km



### 第二部分 (非选择题 共110分)

#### 二、填空题共5小题，每小题5分，共25分。

- (11) 圆心为  $(1,0)$  且过原点的圆的方程是\_\_\_\_\_.
- (12) 已知直线  $l_1: ax+y+1=0$ ， $l_2: x+ay+1=0$ . 若  $l_1 \perp l_2$ ，则实数  $a =$ \_\_\_\_\_.
- (13) 在正三棱柱  $ABC-A_1B_1C_1$  中， $AB=AA_1=2$ ，则直线  $AA_1$  与  $BC_1$  所成角的大小为\_\_\_\_\_；  
直线  $AA_1$  到平面  $BB_1C_1C$  的距离为\_\_\_\_\_.
- (14) 设双曲线  $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$  的两个焦点是  $F_1, F_2$ ，点  $P$  在双曲线上，则  $||PF_1| - |PF_2|| =$ \_\_\_\_\_；若  $\angle F_1PF_2$  为锐角，则点  $P$  的纵坐标的取值范围是\_\_\_\_\_.
- (15) 如图，在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中，过  $BD_1$  的平面分别交  $AA_1, CC_1$  于点  $M, N$ . 给出下列四个结论：
- ① 四边形  $D_1MBN$  一定是平行四边形；
  - ② 四边形  $D_1MBN$  可能是正方形；
  - ③ 四边形  $D_1MBN$  为菱形时，其面积最小；
  - ④ 四边形  $D_1MBN$  为矩形时，其面积最大.
- 其中所有正确结论的序号是\_\_\_\_\_.



三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 10 分)

从 2 位女生，4 位男生中选出 3 人参加垃圾分类宣传活动。

(I) 共有多少种不同的选择方法？

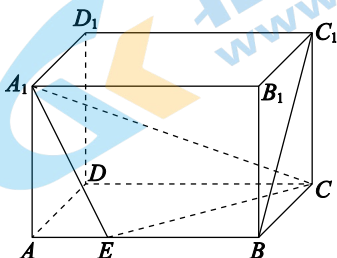
(II) 如果至少有 1 位女生入选，共有多少种不同的选择方法？

(17) (本小题 15 分)

如图，在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $AB=3$ ， $AD=AA_1=2$ ，点  $E$  在  $AB$  上，且  $AE=1$ 。

(I) 求直线  $A_1E$  与  $BC_1$  所成角的余弦值；

(II) 求二面角  $A_1-EC-D$  的余弦值。



(18) (本小题 15 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的一个顶点为  $P(0,1)$ ，且离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

(I) 求椭圆  $C$  的方程；

(II) 直线  $l: y = x + m$  与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点，且  $|PA| = |PB|$ ，求  $m$  的值。

(19) (本小题 15 分)

设  $A, B$  为两定点， $AB=2$ ，曲线  $C$  是到点  $A$  的距离与到点  $B$  的距离之比为定值  $\lambda$  ( $\lambda > 0$ ) 的点组成的集合。

(I) 判断  $AB$  的中点是否在曲线  $C$  上；

(II) 建立适当的平面直角坐标系，求曲线  $C$  的方程，并讨论曲线  $C$  的形状。

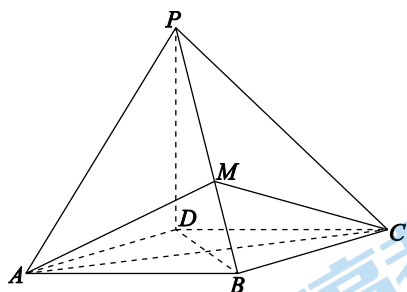
(20) (本小题 15 分)

如图, 在四棱锥  $P-ABCD$  中,  $PD \perp$  平面  $ABCD$ , 底面  $ABCD$  为平行四边形,  $\angle ADC = 120^\circ$ ,  $PD = AD = 2$ . 点  $M$  在  $PB$  上, 且  $PB \perp$  平面  $ACM$ .

(I) 证明:  $AC \perp BD$ ;

(II) 求  $\frac{PM}{PB}$  的值;

(III) 求点  $M$  到平面  $PAD$  的距离.



(21) (本小题 15 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ , 过点  $P(1,0)$  的直线  $l$  交椭圆  $C$  于  $M, N$  两点.

(I) 证明:  $|MN| \geq \sqrt{3}$ ;

(II) 已知两点  $A_1(-2,0), A_2(2,0)$ . 记直线  $A_1M$  的斜率为  $k_1$ , 直线  $A_2N$  的斜率为  $k_2$ , 求  $\frac{k_1}{k_2}$  的值.

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

- (1) D            (2) C            (3) C            (4) D            (5) B  
 (6) A            (7) A            (8) B            (9) C            (10) B

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

- (11)  $(x-1)^2 + y^2 = 1$             (12) 0  
 (13)  $45^\circ$      $\sqrt{3}$             (14)  $2\sqrt{3}$      $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$   
 (15) ①③④

注：(13)、(14) 题第一空 3 分，第二空 2 分；(15) 题少解给 3 分，有错解不给分。

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

(16)（共 10 分）

解：(I) 从 2 位女生，4 位男生中选出 3 人参加垃圾分类宣传活动，

选择方法数为  $C_6^3 = 20$ 。.....5 分

(II) 没有女生入选的选择方法数为  $C_4^3 = 4$ ，.....8 分

所以至少有 1 位女生入选的选择方法数为  $20 - 4 = 16$ 。.....10 分

(17)（共 15 分）

解：(I) 以  $D$  为原点， $\overrightarrow{DA}$ 、 $\overrightarrow{DC}$ 、 $\overrightarrow{DD_1}$  的方向分别为  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系。.....1 分

则  $A_1(2, 0, 2)$ ， $E(2, 1, 0)$ ， $B(2, 3, 0)$ ， $C(0, 3, 0)$ ， $C_1(0, 3, 2)$ 。

所以  $\overrightarrow{A_1E} = (0, 1, -2)$ ， $\overrightarrow{BC_1} = (-2, 0, 2)$ 。.....4 分

所以  $\cos\langle \overrightarrow{A_1E}, \overrightarrow{BC_1} \rangle = \frac{\overrightarrow{A_1E} \cdot \overrightarrow{BC_1}}{|\overrightarrow{A_1E}| |\overrightarrow{BC_1}|} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ 。.....7 分

所以直线  $A_1E$  与  $BC_1$  所成角的余弦值为  $\frac{\sqrt{10}}{5}$ 。

(II) 因为  $\overrightarrow{EC} = (-2, 2, 0)$ 。

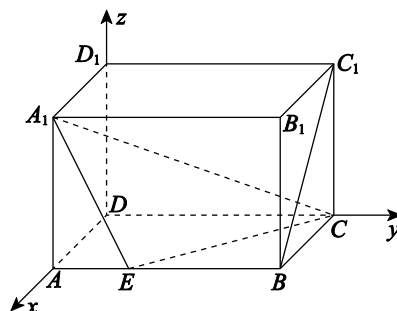
设平面  $A_1EC$  的法向量为  $\mathbf{m} = (x, y, z)$ ，则

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{A_1E} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overrightarrow{EC} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} y - 2z = 0, \\ -2x + 2y = 0. \end{cases} \quad \dots\dots 9 \text{分}$$

令  $y = 2$ ，则  $x = 2$ ， $z = 1$ 。

于是  $\mathbf{m} = (2, 2, 1)$ 。.....11 分

显然  $\overrightarrow{DD_1} = (0, 0, 2)$  是平面  $ABCD$  的一个法向量。.....12 分



因为  $\cos\langle \overrightarrow{DD_1}, \mathbf{m} \rangle = \frac{\overrightarrow{DD_1} \cdot \mathbf{m}}{|\overrightarrow{DD_1}| |\mathbf{m}|} = \frac{1}{3}$ , .....15分

所以二面角  $A_1-EC-D$  的余弦值为  $\frac{1}{3}$ .

(18) (共 15分)

解: (I) 设椭圆的半焦距为  $c$ .

$$\text{由题意得} \begin{cases} b=1, \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ a^2 = b^2 + c^2, \end{cases} \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

解得  $a=2$ . .....4分

所以椭圆  $C$  的方程为  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . .....5分

$$\text{(II) 由} \begin{cases} y = x + m, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \text{得 } 5x^2 + 8mx + 4(m^2 - 1) = 0. \dots\dots\dots 7 \text{分}$$

由  $\Delta = (8m)^2 - 4 \times 5 \times 4(m^2 - 1) > 0$ , 解得  $-\sqrt{5} < m < \sqrt{5}$ . .....8分

设  $A(x_1, y_1)$ ,  $B(x_2, y_2)$ , 则  $x_1 + x_2 = -\frac{8m}{5}$ . .....9分

设线段  $AB$  的中点为  $D$ ,

$$\text{则 } x_D = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{4m}{5}, \quad y_D = x_D + m = \frac{m}{5}. \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

“ $|PA| = |PB|$ ”等价于“ $PD \perp AB$ ”. .....12分

$$\text{所以 } \frac{1 - \frac{m}{5}}{\frac{4m}{5}} = -1. \dots\dots\dots 14 \text{分}$$

解得  $m = -\frac{5}{3}$ , 符合题意. .....15分

所以  $m = -\frac{5}{3}$ .

(19) (共 15分)

解: (I) 设  $AB$  的中点为  $O$ , 则  $\frac{OA}{OB} = 1$ . .....2分

所以当  $\lambda = 1$  时, 点  $O$  在曲线  $C$  上; .....3分

当  $\lambda \neq 1$  时, 点  $O$  不在曲线  $C$  上. .....4分

(II) 以点  $A, B$  所在的直线为  $x$  轴, 线段  $AB$  的垂直平分线为  $y$  轴, 建立直角坐标系.

所以  $A(-1, 0), B(1, 0)$ . .....6分

设曲线  $C$  上任意一点为  $P(x, y)$ , 由题意知  $\frac{|PA|}{|PB|} = \lambda$ . .....7分

所以  $\frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = \lambda$ . .....8分

整理得  $(1-\lambda^2)x^2 + (1-\lambda^2)y^2 + 2(1+\lambda^2)x + (1-\lambda^2) = 0$ . .....10分

经检验, 曲线C的方程为  $(1-\lambda^2)x^2 + (1-\lambda^2)y^2 + 2(1+\lambda^2)x + (1-\lambda^2) = 0$ .

当  $\lambda=1$ 时, 曲线C的方程化为  $x=0$ . .....11分

所以曲线C的形状是直线. ....12分

当  $\lambda \neq 1$ 时, 曲线C的方程化为  $(x + \frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2})^2 + y^2 = \frac{4\lambda^2}{(1-\lambda^2)^2}$ . .....14分

所以曲线C的形状是以  $(-\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}, 0)$  为圆心,  $|\frac{2\lambda}{1-\lambda^2}|$  为半径的圆. ....15分

(20) (共15分)

解: (I) 因为  $PB \perp$  平面  $ACM$ ,  
所以  $PB \perp AC$ . .....1分

因为  $PD \perp$  平面  $ABCD$ ,  
所以  $PD \perp AC$ . .....2分

所以  $AC \perp$  平面  $PBD$ . .....3分

所以  $AC \perp BD$ . .....4分

(II) 取  $AB$  中点  $N$ , 连接  $DN$ .

由 (I) 得四边形  $ABCD$  为菱形,  
所以  $AB = AD$ .

因为  $\angle ADC = 120^\circ$ ,

所以  $DN \perp DC$ . .....5分

因为  $DP, DN, DC$  两两互相垂直,

以  $D$  为原点,  $\overrightarrow{DN}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DP}$  的方向分别为  $x$  轴、 $y$  轴、 $z$  轴正方向, 建立如图所示的空间直角坐标系. ....6分

则  $D(0,0,0), A(\sqrt{3},-1,0), B(\sqrt{3},1,0), P(0,0,2)$ .

所以  $\overrightarrow{PB} = (\sqrt{3},1,-2)$ .

设  $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PB} = (\sqrt{3}\lambda, \lambda, -2\lambda)$ , 其中  $0 \leq \lambda \leq 1$ . .....7分

所以  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM} = (-\sqrt{3} + \sqrt{3}\lambda, 1 + \lambda, 2 - 2\lambda)$ . .....8分

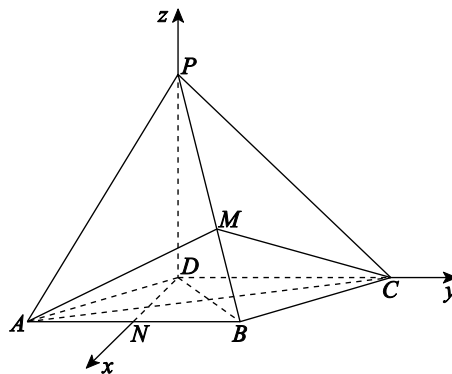
因为  $PB \perp$  平面  $ACM$ ,

所以  $PB \perp AM$ , 即  $\overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ . .....9分

所以  $-3 + 3\lambda + (1 + \lambda) + (4\lambda - 4) = 0$ .

解得  $\lambda = \frac{3}{4}$ , 即  $\frac{PM}{PB} = \frac{3}{4}$ . .....10分

(III) 由 (II) 得  $\overrightarrow{AM} = (-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{7}{4}, \frac{1}{2})$ . .....11分



因为  $\overline{DA} = (\sqrt{3}, -1, 0)$ ,  $\overline{DP} = (0, 0, 2)$ .

设平面  $ADP$  的法向量为  $\mathbf{m} = (x, y, z)$ , 则

$$\begin{cases} \mathbf{m} \cdot \overline{DA} = 0, \\ \mathbf{m} \cdot \overline{DP} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} \sqrt{3}x - y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

令  $x = 1$ , 则  $y = \sqrt{3}$ , 于是  $\mathbf{m} = (1, \sqrt{3}, 0)$ . .....13分

所以点  $M$  到平面  $PAD$  的距离为  $\frac{|\overline{AM} \cdot \mathbf{m}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$ . .....15分

(21) (共 15 分)

解: (I) ①当直线  $l$  的斜率不存在时,  $M(1, \frac{\sqrt{3}}{2}), N(1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ , 或  $M(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}), N(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ .

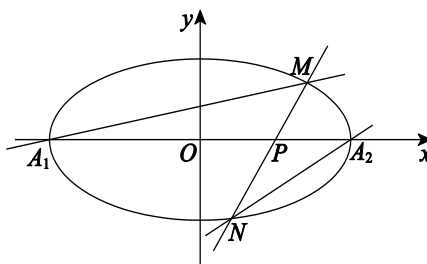
此时  $|MN| = \sqrt{3}$ . .....1分

②当直线  $l$  的斜率存在时, 设其方程为  $y = k(x-1)$ .

$$\text{由} \begin{cases} y = k(x-1), \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \end{cases} \quad \text{得} \quad (1+4k^2)x^2 - 8k^2x + 4k^2 - 4 = 0. \quad \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

设  $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ,

$$\text{则} \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{8k^2}{1+4k^2}, \\ x_1 x_2 = \frac{4k^2 - 4}{1+4k^2}. \end{cases} \quad \dots\dots\dots 5 \text{分}$$



$$\begin{aligned} \text{所以} |MN| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{1+k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} \\ &= \frac{4\sqrt{3k^4 + 4k^2 + 1}}{1+4k^2}. \quad \dots\dots\dots 7 \text{分} \end{aligned}$$

设  $m = 1 + 4k^2$ , 则  $m \geq 1$ .

$$\text{所以} |MN| = \frac{\sqrt{3(m-1)^2 + 16m}}{m} = \frac{\sqrt{3m^2 + 10m + 3}}{m} > \frac{\sqrt{3m^2}}{m} = \sqrt{3}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

综上  $|MN| \geq \sqrt{3}$ .

(II) 当直线  $l$  的斜率不存在时,  $M(1, \frac{\sqrt{3}}{2}), N(1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ , 或  $M(1, -\frac{\sqrt{3}}{2}), N(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ,

此时都有  $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{3}$ . .....9分

直线  $A_1M$  的斜率为  $k_1 = \frac{y_1}{x_1 + 2}$ , 直线  $A_2N$  的斜率为  $k_2 = \frac{y_2}{x_2 - 2}$ . .....11分

$$\begin{aligned} \text{法一:} \quad \frac{k_1}{k_2} &= \frac{y_1(x_2 - 2)}{y_2(x_1 + 2)} \\ &= \frac{(x_1 - 1)(x_2 - 2)}{(x_2 - 1)(x_1 + 2)} \quad \dots\dots\dots 12 \text{分} \end{aligned}$$



$$= \frac{x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + x_2 + 2}{x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 3x_2 - 2} \dots\dots\dots 13 \text{分}$$

$$= \frac{(4k^2 - 4) - 2 \times 8k^2 + (1 + 4k^2)x_2 + 2(1 + 4k^2)}{(4k^2 - 4) - 8k^2 + 3(1 + 4k^2)x_2 - 2(1 + 4k^2)}$$

$$= \frac{-2(1 + 2k^2) + (1 + 4k^2)x_2}{-6(1 + 2k^2) + 3(1 + 4k^2)x_2} = \frac{1}{3} \dots\dots\dots 15 \text{分}$$

法二:  $\frac{k_1^2}{k_2^2} = \frac{y_1^2(x_2 - 2)^2}{y_2^2(x_1 + 2)^2}$

$$= \frac{(4 - x_1^2)(x_2 - 2)^2}{(4 - x_2^2)(x_1 + 2)^2} \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

$$= \frac{(2 - x_1)(2 - x_2)}{(2 + x_1)(2 + x_2)}$$

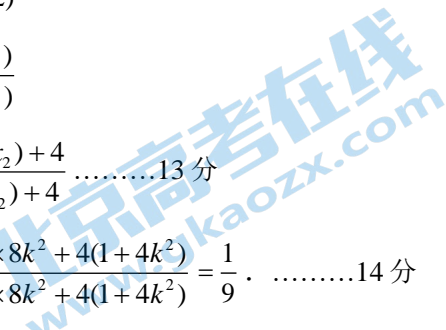
$$= \frac{x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4}{x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4} \dots\dots\dots 13 \text{分}$$

$$= \frac{(4k^2 - 4) - 2 \times 8k^2 + 4(1 + 4k^2)}{(4k^2 - 4) + 2 \times 8k^2 + 4(1 + 4k^2)} = \frac{1}{9} \dots\dots\dots 14 \text{分}$$

又  $\frac{k_1}{k_2} = \frac{y_1(x_2 - 2)}{y_2(x_1 + 2)} > 0$ ,

所以  $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{3} \dots\dots\dots 15 \text{分}$

综上,  $\frac{k_1}{k_2} = \frac{1}{3}$ .



## 北京高一高二高三期末试题下载

北京高考资讯整理了【2022年1月北京各区各年级期末试题&答案汇总】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【北京高考资讯】公众号，对话框回复【期末】或者底部栏目<试题下载→期末试题>，进入汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

