北京一零一中 2022-2023 学年度第一学期期中考试

高 二 数 学

(本试卷满分 120 分，考试时间 100 分钟)

命题：高二数学备课组　　审稿：贺丽珍

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 直线 $x+y=0$ 的倾斜角为（　　）

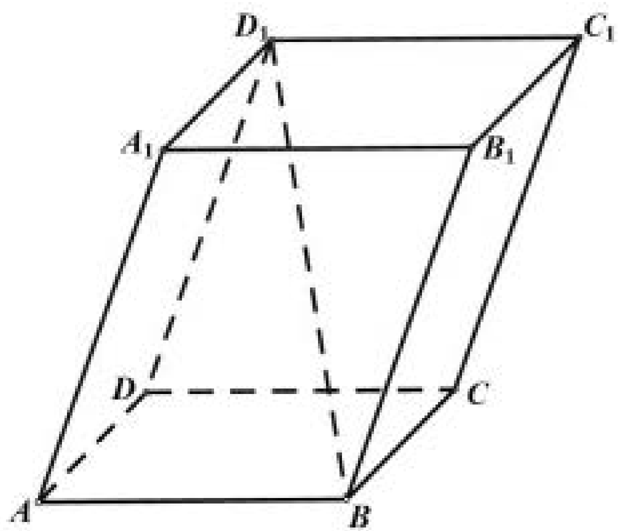
(A) 45°　　(B) 60°　　(C) 90°　　(D) 135°

2. 圆 $(x+2)^2+y^2=5$ 关于原点 $O(0,0)$ 对称的圆的方程为（　　）

(A) $(x+2)^2+y^2=5$　　(B) $x^2+(y-2)^2=5$

(C) $(x-2)^2+y^2=5$　　(D) $x^2+(y+2)^2=5$

3. 如图，在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{DC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DD_1}=\boldsymbol{c}$，则与向量 $\overrightarrow{D_1B}$ 相等的是（　　）



(A) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$　　(B) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　(C) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$　　(D) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$

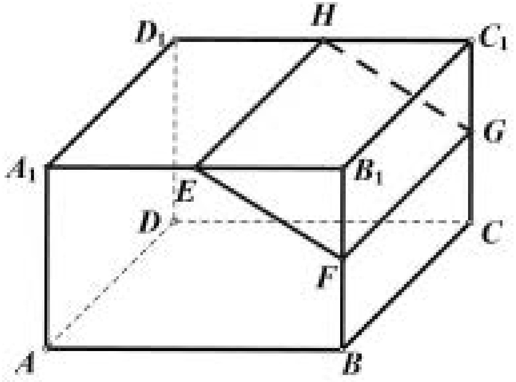
4. 已知直线 $l: x + ay + 2 = 0$, 点 $A(-1, -1)$ 和点 $B(2, 2)$. 若 $l \parallel AB$, 则实数 a 的值为 (　　)

(A) 1　　(B) -1　　(C) 2　　(D) -2

5. 若点 $M(1, 1)$ 为圆 $C: x^2 + y^2 - 4x = 0$ 的弦 AB 的中点, 则直线 AB 的方程是 (　　)

(A) $x - y - 2 = 0$　　(B) $x + y - 2 = 0$　　(C) $x - y = 0$　　(D) $x + y = 0$

6. 如图, 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, E, F, G, H 分别是棱 A_1B_1, BB_1 CC_1, C_1D_1 的中点, 那么 (　　)



(A) $BD_1 \parallel GH$　　(B) $BD \parallel EF$

(C) 平面 $EFGH \parallel$ 平面 A_1BCD_1　　(D) 平面 $EFGH \parallel$ 平面 $ABCD$

7. 已知直线 $m \perp$ 平面 α, 则 "直线 $n \perp m$" 是 "$n \parallel \alpha$" 的 (　　)

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

8. 已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 给出下列四个结论:

①直线 BC_1 与 DA_1 所成的角为 $90°$;

②直线 BC_1 与 CA_1 所成的角为 $90°$;

③直线 BC_1 与平面 BB_1D_1D 所成的角为 $45°$;

④直线 BC_1 与平面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$.

其中, 正确结论的个数为 (　　)

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

9. 设 $m, n \in \mathbf{R}$, 若直线 $(m+1)x+(n+1)y-2=0$ 与圆 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 相切, 则 $m+n$ 的取值范围是 (　　)

(A) $(-\infty, 2-2\sqrt{2}]$　　(B) $[2+2\sqrt{2}, +\infty)$

(C) $[2-2\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2}]$　　(D) $(-\infty, 2-2\sqrt{2}] \cup [2+2\sqrt{2}, +\infty)$

10. 在空间中, 过点 A 作平面 π 的垂线, 垂足为 B, 记 $B=f_{\pi}(A)$. 设 α, β 是两个不同的平面, 对空间任意一点 P, $Q_1=f_{\beta}[f_{\alpha}(P)]$, $Q_2=f_{\alpha}[f_{\beta}(P)]$, 恒有 $PQ_1=PQ_2$, 则 (　　)

(A) 平面 α 与平面 β 平行

(B) 平面 α 与平面 β 垂直

(C) 平面 α 与平面 β 所成的 (锐) 二面角为 $45°$

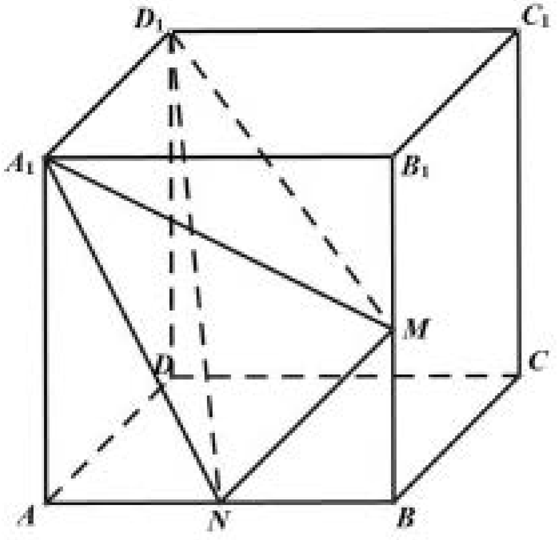
(D) 平面 α 与平面 β 所成的 (锐) 二面角为 $60°$

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

11. 直线 $y=2x$ 与直线 $y=2x+1$ 之间的距离等于________.

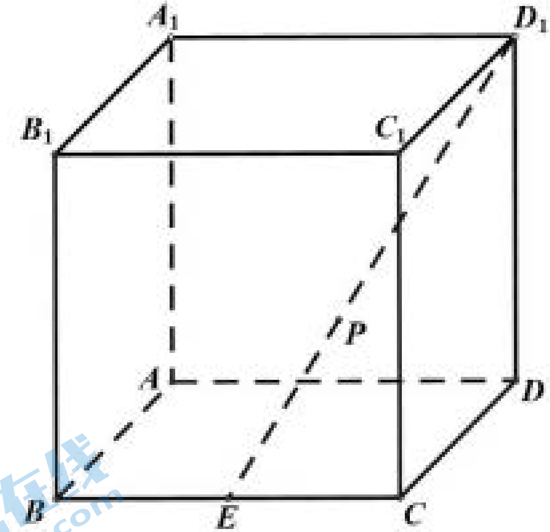
12. 若平面中三个点 $A(2,2)$, $B(a,0)$, $C(0,4)$ 共线，则 a 的值等于________.

13. 如图，已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，M，N 分别为棱 BB_1，AB 的中点，则三棱锥 A_1-D_1MN 的体积为________.



14. 已知直线 $l: kx-y+k=0$, 若直线 l 与圆 $x^2-2x+y^2-4y+3=0$ 在第一象限内的部分有公共点, 则 k 的取值范围是 __________.

15. 如图, 在棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, E 为棱 BC 的中点, 点 P 在线段 D_1E 上. 则点 P 到直线 CC_1 的距离的最小值为 __________.



16. 在平面直角坐标系中, 如果 x 与 y 都是整数, 则称点 (x, y) 是整点. 已知直线 $l: y=kx+b$, 下列命题中正确的是 __________ (写出所有正确命题的编号).

①存在这样的直线 l, 既不与坐标轴平行又不经过任何整点;

②若 k 和 b 都是无理数, 则直线 l 不经过任何整点;

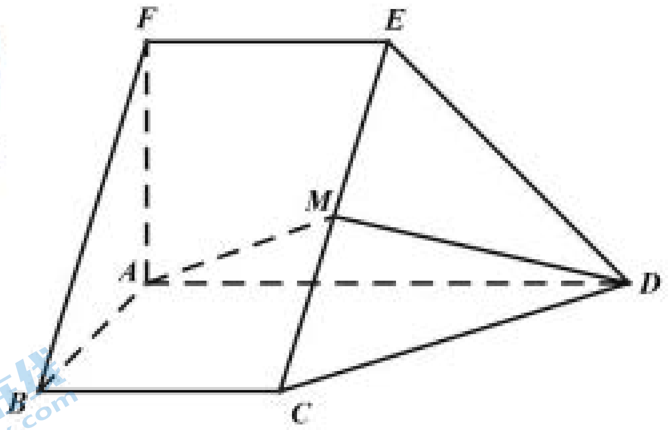
③存在只经过一个整点的直线 l;

④存在只经过两个不同整点的直线 l.

三、解答题共 4 小题，共 50 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

17. (本小题满分 12 分)

如图，在五面体 $ABCDEF$ 中，$FA\perp$ 平面 $ABCD$，$AD\parallel BC\parallel FE$，$AB\perp AD$，$M$ 为 EC 的中点，$AF=AB=BC=FE=\frac{1}{2}AD$.



(1) 求异面直线 BF 与 DE 所成角的大小；

(2) 求二面角 $A-CD-E$ 的余弦值.

18. (本小题满分 11 分)

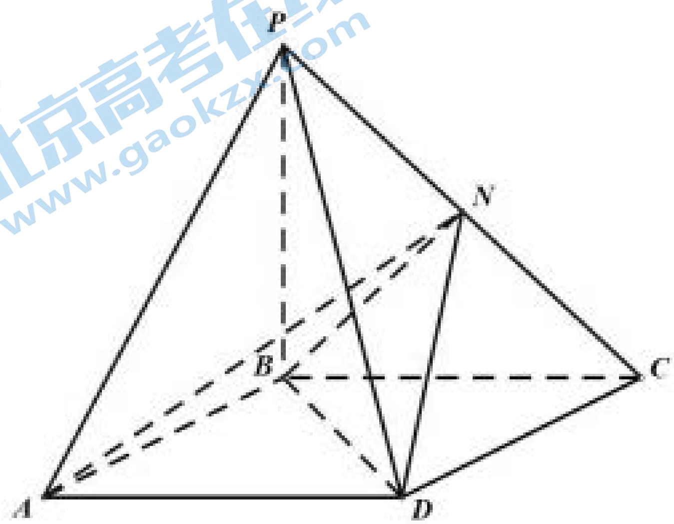
已知直线 l 经过两条直线 $l_1: 3x+4y-2=0$ 和 $l_2: 2x+y+2=0$ 的交点.

(1) 若直线 l 与直线 $3x+y-1=0$ 平行，求直线 l 的方程；

(2) 若直线 l 与圆 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=25$ 相交所得弦长为 8，求直线 l 的方程.

19. (本小题满分 14 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为平行四边形, $\angle ABC=120^\circ$, $AB=1$, $PA=\sqrt{5}$, $PD\perp CD$, $PB\perp BD$, 点 N 在棱 PC 上.



条件①: $BC=2$;

条件②: 平面 $PBD\perp$ 平面 $ABCD$.

从条件①和②中选择一个作为已知, 解决下列问题:

(1) 判断 AB 与 PB 是否垂直, 并证明;

(2) 若点 N 为棱 PC 的中点, 点 M 在直线 AN 上, 且点 M 到平面 BDN 的距离为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, 求线段 BM 的长.

(3) 求直线 AC 与平面 BDN 所成角的正弦值的取值范围.

注: 若选择①和②分别作答, 按选择①给分.

20. (本小题满分 13 分)

对于平面直角坐标系中的两点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, 现定义由点 A 到点 B 的“折线距离”$\rho(A,B)$ 为 $\rho(A,B)=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$.

(1) 已知 $A(1,0)$, $B(2,3)$, 求 $\rho(A,B)$;

(2) 已知点 $A(1,0)$, 点 B 是直线 $l: x-\sqrt{2}y+2=0$ 上的一个动点, 求 $\rho(A,B)$ 的最小值;

(3) 对平面上给定的两个不同的点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$, 是否存在点 $C(x,y)$, 同时满足

① $\rho(A,C)+\rho(C,B)=\rho(A,B)$; ② $\rho(A,C)=\rho(C,B)$.

若存在, 请求出所有符合条件的点; 若不存在, 请予以证明.

北京一零一中2022-2023学年度第一学期期中考试
高二数学参考答案

一、选择题，每小题4分，共40分.

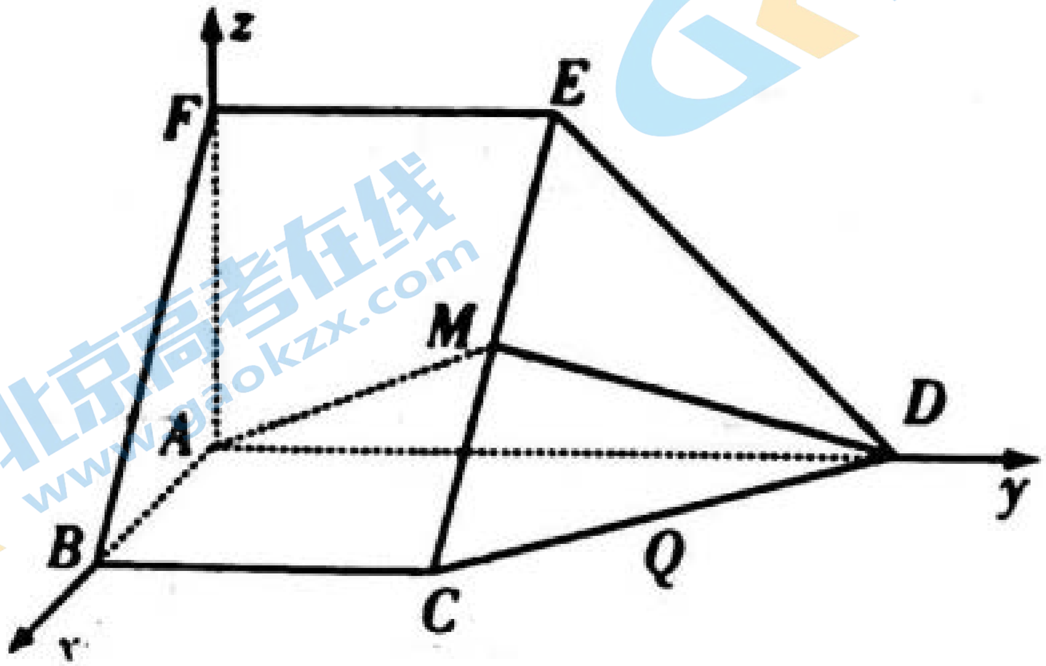
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	C	A	B	C	C	B	C	D	B

二、填空题，每小题5分，共30分

11	12	13	14	15	16
$\frac{\sqrt{5}}{5}$	4	1	$[2-\sqrt{3},3)$	$\frac{2}{5}\sqrt{5}$	①③

三、解答题，共4小题，共50分.

17.（本小题满分12分）如图所示，建立空间直角坐标系，点 A 为坐标原点．设 $AB=1$，依题意得 $B(1,0,0)$，$C(1,1,0)$，$D(0,2,0)$，$E(0,1,1)$，$F(0,0,1)$，$M\left(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right)$.



(1) $\overrightarrow{BF}=(-1,0,1)$，$\overrightarrow{DE}=(0,-1,1)$，于是 $\cos<\overrightarrow{BF},\overrightarrow{DE}>=\dfrac{\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{DE}}{|\overrightarrow{BF}||\overrightarrow{DE}|}=\dfrac{1}{2}$．所以异面直线 BF 与 DE 所成角的大小为 60°．

(2) 设平面 CDE 的法向量为 $\overrightarrow{n_1}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{CE}=0,\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$ 于是 $\begin{cases}-x+z=0,\\ -y+z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，

可得 $\overrightarrow{n_1}=(1,1,1)$．

又由题设，平面 ACD 的一个法向量为 $\overrightarrow{n_2}=(0,0,1)$，

所以，$\cos<\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}>=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|n_1||n_2|}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

因为二面角 $A-CD-E$ 为锐角，所以其余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$．

18.(本小题满分11分) (1) 联立方程$\begin{cases}3x+4y-2=0,\\ 2x+y+2=0\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=-2,\\ y=2.\end{cases}$

所以交点坐标为$(-2,2)$，

设直线l的方程为$3x+y+c=0$，把点$(-2,2)$代入方程得$c=4$，

所以直线l的方程为$3x+y+4=0$.

(2) 若直线l过点$(-2,2)$且斜率不存在，则$l:x=-2$满足条件；

若直线l过点$(-2,2)$且斜率存在，设$l:y-2=k(x+2)$，即$kx-y+2k+2=0$，

由题意$d=\dfrac{|k-2+2k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=3$，

$(3k+1)^2=9(k^2+1)$，$k=\dfrac{4}{3}$，

所以$l:y-2=\dfrac{4}{3}(x+2)$，即$4x-3y+14=0$.

综上所述，直线l的方程为$x=-2$或$4x-3y+14=0$.

19.(本小题满分14分)选①

(1) $AB\perp PB$.

证明：平行四边形$ABCD$中，$\angle BCD=180^\circ-120^\circ=60^\circ$.

因为$BC=2$，$DC=AB=1$，

所以ΔBCD中，$BD=\sqrt{2^2+1^2-2\times2\times1\times\cos60^\circ}=\sqrt{3}$.

所以$BD^2+CD^2=BC^2$，则$BD\perp CD$.

又因为$PD\perp CD$，$PD\cap BD=D$，$PD,BD\subset$平面PBD，

所以$CD\perp$ 平面PBD，所以$CD\perp PB$.

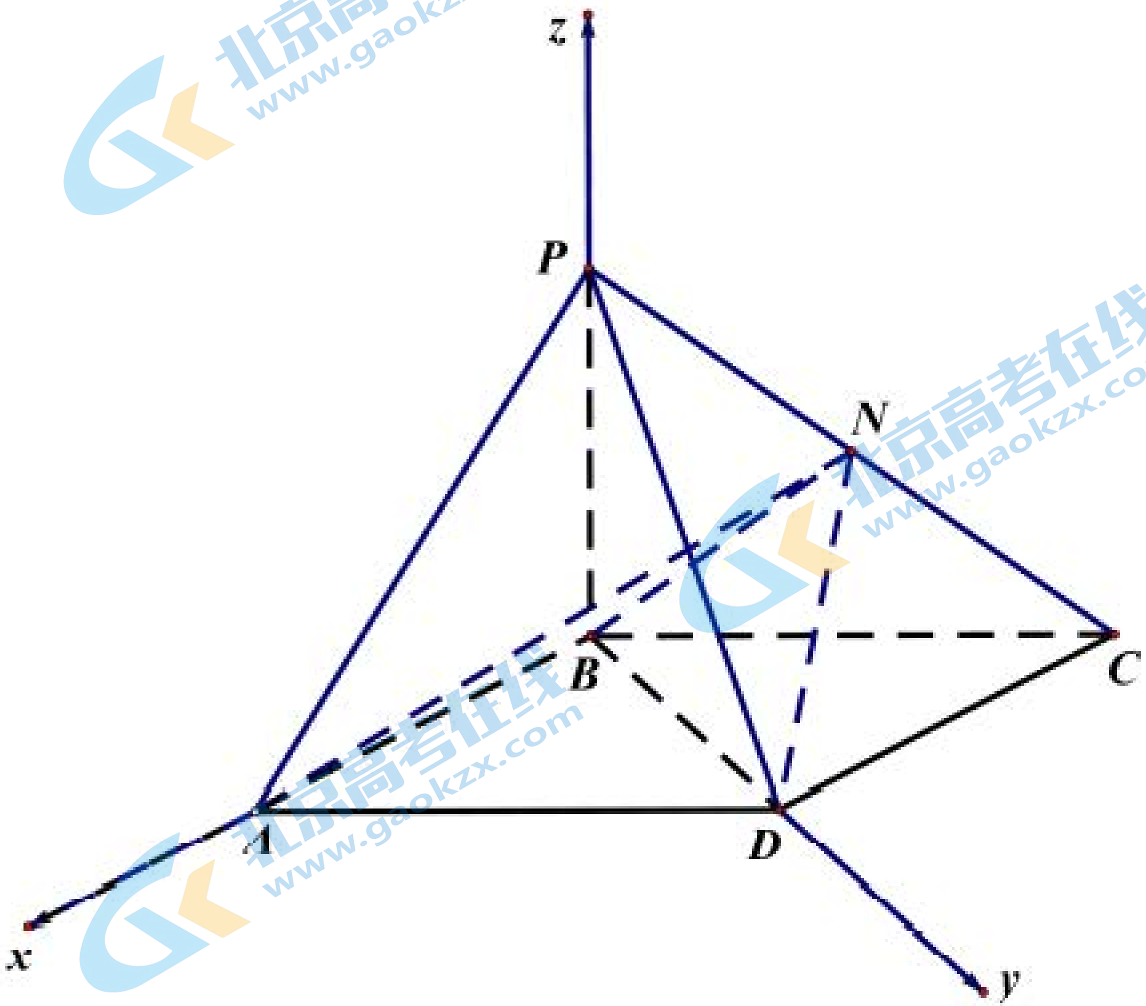
又因为$AB\parallel CD$，所以$AB\perp PB$.

(1) $AB \perp PB$.

因为平面 $PBD \perp$ 平面 $ABCD$ 且平面 $PBD \cap$ 平面 $ABCD = BD$，$PB \perp BD$，$PB \subset$ 平面 PBD.

所以 $PB \perp$ 平面 $ABCD$，所以 $PB \perp AB$.

(2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\dfrac{\sqrt{22}}{2}$.



如图，以 B 为原点，以 $\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BP}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向建立平面直角坐标系，则 $B(0,0,0)$，$D\left(0,\sqrt{3},0\right)$，$P(0,0,2)$，$C\left(-1,\sqrt{3},0\right)$，$A(1,0,0)$，

$N\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$，

所以 $\overrightarrow{BD}=\left(0,\sqrt{3},0\right)$，$\overrightarrow{BN}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$，$\overrightarrow{AN}=\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$，设平面 BDN 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD}=\sqrt{3}y=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BN}=-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+z=0,\end{cases}$$

令 $x=2$，则 $y=0,z=1$．此时 $\vec{n}=(2,0,1)$．

因为 M 在直线 AN 上，所以设 $\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{AN},\lambda\in\mathbf{R}$，

所以 M 到平面 BDN 的距离为

$$d=\frac{\left|\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}=\frac{2}{\sqrt{5}}|\lambda|=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

所以 $|\lambda|=\frac{1}{2}$，所以 $\overrightarrow{MN}=\left(-\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{2}\right)$ 或 $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{3}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{1}{2}\right)$，

所以 $M\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{2}\right)$ 或 $M\left(-\frac{5}{4},\frac{3\sqrt{3}}{4},\frac{3}{2}\right)$，所以 $|BM|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{22}}{2}$．

(3) $[0,\frac{2}{7}\sqrt{7}]$.

因为 N 在棱 PC 上，所以设 $\overrightarrow{PN}=\lambda\overrightarrow{PC},\lambda\in[0,1]$，

所以 $\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{PN}=\left(-\lambda,\sqrt{3}\lambda,2-2\lambda\right)$，

设平面 BDN 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，则

$$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{BD}=\sqrt{3}y=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{BN}=\lambda x+\sqrt{3}\lambda y+(2-2\lambda)z=0,\end{cases}$$

所以 $y=0$，取 $\vec{n}=(2-2\lambda,0,\lambda)$，由于 $\overrightarrow{AC}=\left(-2,\sqrt{3},0\right)$，

设直线 AC 与平面 BDN 所成角为 α，则

$$\sin\alpha=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{AC},\vec{n}\right\rangle\right|=\left|\frac{-2(2-2\lambda)}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{(2-2\lambda)^2+\lambda^2}}\right|=\frac{4}{\sqrt{7}}\left|\frac{\lambda-1}{\sqrt{5\lambda^2-8\lambda+4}}\right|$$

所以 $\sin^2\alpha=\frac{16}{7}\cdot\frac{(\lambda-1)^2}{5\lambda^2-8\lambda+4}=\frac{16}{7}\cdot\frac{(\lambda-1)^2}{5(\lambda-1)^2+2(\lambda-1)+1}$，令 $t=\lambda-1\in[-1,0]$，

当 $t=0$ 时，$\sin^2\alpha=0$；

当 $t\in[-1,0)$ 时，$\sin^2\alpha=\frac{16}{7}\cdot\frac{1}{\frac{1}{t^2}+\frac{2}{t}+5}$；

因为 $\frac{1}{t}\in(-\infty,-1]$，所以 $\left(\frac{1}{t}+1\right)^2+4\in[4,+\infty)$，

所以 $\sin^2\alpha\in\left(0,\frac{4}{7}\right]$.综上，$\sin\alpha\in\left[0,\frac{2\sqrt{7}}{7}\right]$.

20. (本小题满分13分)(1) $\rho(A,B)=|1-2|+|0-3|=4$.

(2)因为点 B 为直线 $l:x-\sqrt{2}y+2=0$ 上的动点，

故可设点 B 的坐标为 $B(\sqrt{2}t-2,t)$，

则 $\rho(A,B)=|\sqrt{2}t-3|+|t|=\sqrt{2}\left|t-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right|+|t|\geq\left|t-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right|+|t|\geq\left|\left(t-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)-t\right|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

当且仅当 $t=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 时等号成立，故 $\rho(A,B)$ 的最小值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

此时点 B 坐标为 $B\left(1,\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$.

(3)注意到点 $A(x_1,y_1)$ 与点 $B(x_2,y_2)$ 不同，下面分三种情况讨论.

(A) 若 $x_1=x_2$，则 $y_1\neq y_2$，由条件②得 $|x-x_1|+|y-y_1|=|x_2-x|+|y_2-y|$，

即 $|y-y_1|=|y-y_2|$，所以 $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

由条件①得 $|x-x_1|+|y-y_1|+|x_2-x|+|y_2-y|=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|$.

所以 $2|x-x_1|+\dfrac{1}{2}|y_2-y_1|+\dfrac{1}{2}|y_2-y_1|=|y_2-y_1|$，

所以 $|x-x_1|=0$，所以 $x=x_1$.

因此，所求的点 C 为 $(x_1,\dfrac{y_1+y_2}{2})$.

(B) 若 $y_1=y_2$，则 $x_1\neq x_2$，类似于(A)，可得符合条件的点 C 为 $(\dfrac{x_1+x_2}{2},y_1)$.

(C) 当 $x_1\neq x_2$，且 $y_1\neq y_2$ 时，不妨设 $x_1<x_2$.

$$\begin{aligned}\rho(A,C)+\rho(C,B)&=|x-x_1|+|y-y_1|+|x_2-x|+|y_2-y|\\&=|x-x_1|+|x_2-x|+|y-y_1|+|y_2-y|\\&\geq|x-x_1+x_2-x|+|y-y_1+y_2-y|\\&=|x_2-x_1|+|y_2-y_1|=\rho(A,B)\end{aligned}$$

当且仅当 $(x-x_1)(x_2-x)\geq0$ 与 $(y-y_1)(y_2-y)\geq0$ 同时成立时取等号，

即当且仅当 $(x-x_1)(x_2-x)\geq0$ 与 $(y-y_1)(y_2-y)\geq0$ 同时成立时条件①成立.

(i)若 $y_1<y_2$,则由上面证明知,要使条件①成立,则有 $x_1\leq x\leq x_2$ 且 $y_1\leq y\leq y_2$.

从而由条件②得 $x+y=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2+y_1+y_2)$. 因此所求点 C 的集合为

$$M=\{(x,y)\mid x+y=\frac{1}{2}(x_1+x_2+y_1+y_2),x_1\le x\le x_2\text{且}y_1\le y\le y_2\}.$$

(ii)若 $y_1>y_2$，类似地由条件①可得 $x_1\le x\le x_2$ 且 $y_2\le y\le y_1$，从而由条件②得 $x-y=\frac{1}{2}(x_1+x_2-y_1-y_2)$. 因此所求点 C 的集合为

$$N=\{(x,y)\mid x-y=\frac{1}{2}(x_1+x_2-y_1-y_2),x_1\le x\le x_2\text{且}y_2\le y\le y_1\}.$$

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。