

房山区 2018 年高考第一次模拟测试试卷

数学（理）

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 若集合 $M = \{-1, 0, 1, 2\}$, $N = \{y | y = 2x + 1, x \in M\}$, 则集合 $M \cap N$ 等于

- (A) $\{-1, 1\}$ (B) $\{1, 2\}$ (C) $\{-1, 1, 3, 5\}$ (D) $\{-1, 0, 1, 2\}$

(2) 已知复数 $z_1 = 2 + i$, 且复数 z_1, z_2 在复平面内对应的点关于实轴对称, 则 $\frac{z_1}{z_2} =$

- (A) $1 + i$ (B) $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$ (C) $\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ (D) $1 + \frac{4}{3}i$

(3) 已知实数 x, y 满足条件 $\begin{cases} x - y \leq 0 \\ x + y - 4 \leq 0 \\ x - 1 \geq 0 \end{cases}$, 则 $\frac{y}{x}$ 的最大值是

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

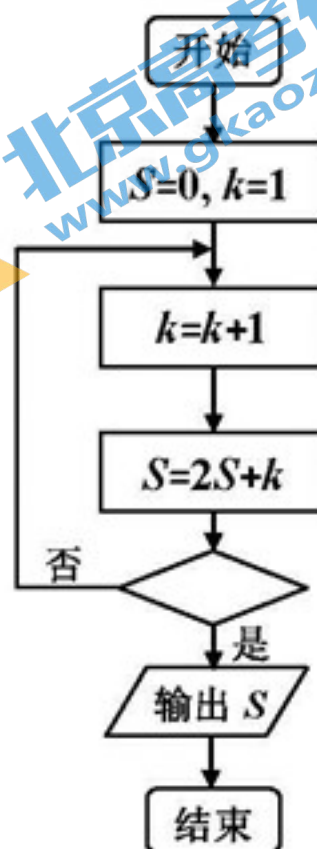
(4) 执行如图所示的程序框图, 若输出的 $S = 88$, 则判断

框内应填入的条件是

- (A) $k > 4$
(B) $k > 5$
(C) $k > 6$
(D) $k > 7$

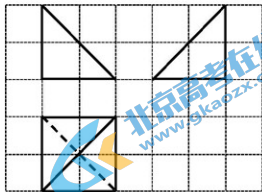
(5) 下列函数中, 与函数 $y = x^3$ 的单调性和奇偶性相同的函数是

- (A) $y = \sqrt{x}$ (B) $y = \ln x$
(C) $y = \tan x$ (D) $y = e^x - e^{-x}$



(6) 如图, 网格纸上小正方形的边长为1, 粗线画出的是某多面体的三视图, 则该多面体的表面积为

- (A) $8+4\sqrt{2}$
 (B) $2+2\sqrt{2}+4\sqrt{3}$
 (C) $2+6\sqrt{3}$
 (D) $2+4\sqrt{2}+2\sqrt{3}$

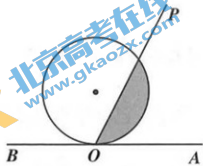


(7) “ $m^3 > \sqrt{m}$ ”是“关于 x 的方程 $\sin x = m$ 无解”的

- (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充要条件 (D) 既不充分也不必要条件

(8) 如图, 直线 AB 与单位圆相切于点 O , 射线 OP 从 OA 出发, 绕着点 O 逆时针旋转, 在旋转的过程中, 记 $\angle AOP = x$ ($0 < x < \pi$), OP 经过的单位圆内区域(阴影部分)的面积为 S , 记 $S = f(x)$, 则下列判断正确的是

- (A) 当 $x = \frac{3\pi}{4}$ 时, $S = \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2}$
 (B) $x \in (0, \pi)$ 时, $f(x)$ 为减函数
 (C) 对任意 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 都有 $f(\frac{\pi}{2} - x) + f(\frac{\pi}{2} + x) = \pi$
 (D) 对任意 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 都有 $f(x + \frac{\pi}{2}) = f(x) + \frac{\pi}{2}$



第二部分 (非选择题 共110分)

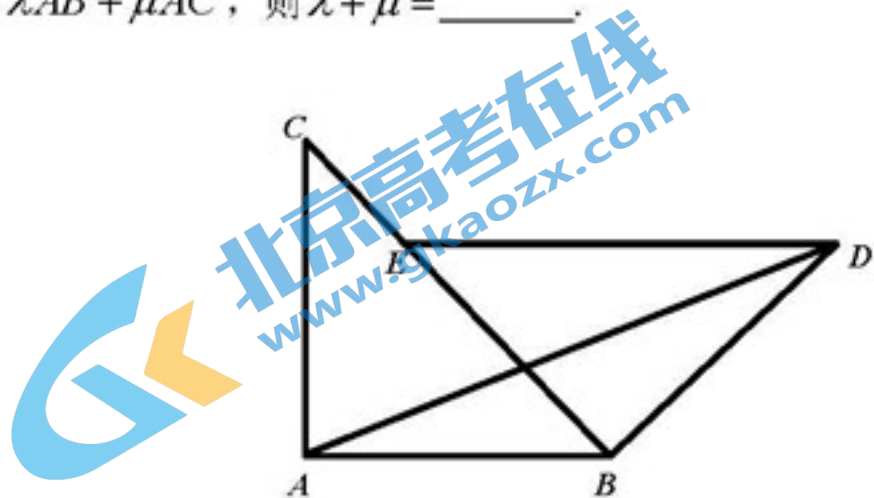
二、填空题共6小题, 每小题5分, 共30分。

- (9) 抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点坐标为_____。
 (10) 某班植树小组今年春天计划植树不少于100棵, 若第一天植树2棵, 以后每天植树的棵数是前一天的2倍, 则需要最少天数 n ($n \in \mathbb{N}^+$) 等于_____。
 (11) 在极坐标系中, 直线 l 的方程为 $\rho \sin \theta = 3$, 则点 $(2, \frac{\pi}{6})$ 到直线 l 的距离为_____。

(12) 已知函数 $f(x)$ 同时满足以下条件: ①周期为 π ; ②值域为 $[0,1]$; ③ $f(x)-f(-x)=0$. 试写出一个满足条件的函数解析式 $f(x)=$ _____.

(13) 四大名著是中国文学史上的经典作品, 是世界宝贵的文化遗产. 某学校举行的“文学名著阅读月”活动中, 甲、乙、丙、丁、戊五名同学相约去学校图书室借阅四大名著《红楼梦》、《三国演义》、《水浒传》、《西游记》(每种名著均有若干本), 要求每人只借阅一本名著, 每种名著均有人借阅, 且甲只借阅《三国演义》, 则不同的借阅方案种数为_____.

(14) 如图, 两块全等的等腰直角三角板拼在一起形成一个平面图形, 若直角边长为 2, 且 $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$, 则 $\lambda + \mu =$ _____.



三、解答题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

(15) (本小题 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $\cos 2B + \cos B = 0$.

(I) 求角 B 的值;

(II) 若 $b = \sqrt{7}$, $a + c = 5$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

(16) (本小题 13 分)

2017 年冬, 北京雾霾天数明显减少. 据环保局统计三个月的空气质量, 达到优良的天数超过 70 天, 重度污染的天数仅有 4 天. 主要原因是政府对治理雾霾采取了有效措施, 如: ①减少机动车尾气排放; ②

实施了煤改电或煤改气工程；③关停了大量的排污企业；④部分企业季节性的停产。为了解农村地区实施煤改气工程后天燃气使用情况，从某乡镇随机抽取100户，进行月均用气量调查，得到的用气量数据（单位：千立方米）均在区间(0,5]内，将数据按区间列表如下：

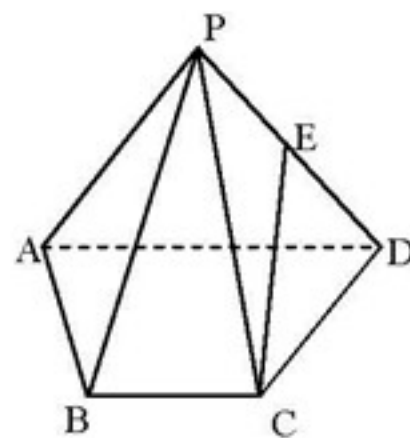
分组	频数	频率
(0,1]	14	0.14
(1,2]	x	m
(2,3]	55	0.55
(3,4]	4	0.04
(4,5]	2	0.02
合计	100	1

- (I) 求表中 x ， m 的值，若同组中的每个数据用该组区间的中点值代替，估计该乡镇每户月平均用气量；
- (II) 从用气量在区间(3,4]和区间(4,5]的用户中任选3户，进行燃气使用的满意度调查，求这3户用气量处于不同区间的概率；
- (III) 若将频率看成概率，从该乡镇中任意选出了3户，用 X 表示用气量在区间(1,3]内的户数，求 X 的分布列和期望。

(17) (本小题14分)

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中， $\triangle PAD$ 是以 AD 为斜边的等腰直角三角形， $PD = CD = \sqrt{2}$ ， $PC = 2$ ， $BC \parallel \frac{1}{2}AD$ ， $CD \perp AD$ 。

- (I) 求证： $CD \perp$ 平面 PAD ；
- (II) 若 E 为 PD 中点，求 CE 与面 PBC 所成角的正弦值；
- (III) 由顶点 C 沿棱锥侧面经过棱 PD 到顶点 A 的最短路线与 PD 的交点记为 F ，求该最短路线的长及 $\frac{PF}{FD}$ 的值。



(18) (本小题14分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, -1)$, 离心率 $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(I) 求椭圆 C 的方程;

(II) 过点 $F(1, 0)$ 作斜率为 $k (k \neq 0)$ 的直线 l , l 与椭圆 C 交于 M, N 两点, 若线段 MN 的垂直平分线交 x 轴于点 P , 求证: $\frac{|MN|}{|PF|}$ 为定值.

(19) (本小题13分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} - a \ln x (a \in \mathbb{R})$.

(I) 当 $a = -1$ 时,

(i) 求 $f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(ii) 设 $g(x) = xf(x) - 1$, 求函数 $g(x)$ 的极值;

(II) 若函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$ 有两个的零点, 求实数 a 的取值范围.

(20) (本小题13分)

已知有穷数列 $B: a_1, a_2, \dots, a_n, (n \geq 2, n \in \mathbb{N})$ 数列 B 中各项都是集合 $\{x | -1 < x < 1\}$ 的元素, 则称该

数列为 Γ 数列. 对于 Γ 数列 B , 定义如下操作过程 T : B 中任取两项 a_p, a_q , 将 $\frac{a_p + a_q}{1 + a_p a_q}$ 的值添在 B 的最

后, 然后删除 a_p, a_q 这样得到一个 $n-1$ 项的新数列 B_1 (约定: 一个数也视作数列). 若 B_1 还是 Γ 数列, 可继续实施操作过程 T , 得到的新数列记作 B_2, \dots , 如此经过 k 次操作后得到的新数列记作 B_k .

(I) 设 $B: 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$. 请写出 B_1 的所有可能的结果;

(II) 求证: 对于一个 n 项的 Γ 数列 B 操作 T 总可以进行 $n-1$ 次;

(III) 设 $B: -\frac{5}{7}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{5}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}$, 求 B_9 的可能结果, 并说明理由.

房山区 2018 年高考第一次模拟测试试卷

数学（理）

参考答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	A	B	C	B	D	D	A	C

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

(9) (0,1) (10) 6 (11) 2 (12) $y = |\sin x|$ 或 $y = |\cos x|$ 或其它满足条件的结果。

(13) 60 (14) $1 + \sqrt{2}$

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

(15) (本小题 13 分)

(I) 解：由已知得 $2\cos^2 B + \cos B - 1 = 0$,

$$\text{即 } (2\cos B - 1)(\cos B + 1) = 0.$$

$$\text{解得 } \cos B = \frac{1}{2}, \text{ 或 } \cos B = -1.$$

因为 $0 < B < \pi$, 故舍去 $\cos B = -1$.

$$\text{所以 } B = \frac{\pi}{3}.$$

.....6 分

(II) 解：由余弦定理得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$.

$$\text{将 } B = \frac{\pi}{3}, b = \sqrt{7} \text{ 代入上式, 整理得 } (a+c)^2 - 3ac = 7.$$

因为 $a+c=5$,

$$\text{所以 } ac = 6.$$

$$\text{所以 } \triangle ABC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

.....13 分

$$\text{解: (1) } x = 100 - 75 = 25, m = \frac{25}{100} = 0.25$$

估计该村每户平均用气量为

$$\frac{0.5 \times 14 + 1.5 \times 25 + 2.5 \times 55 + 3.5 \times 4 + 4.5 \times 2}{100} = 2.05$$

.....4分

(II) 设 $A =$ “这3户用气量处于不同区间”，则

$$P(A) = \frac{C_4^2 C_2^1 + C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

.....7分

(III) X 的可能取值为0, 1, 2, 3, 则

$$P(X=0) = C_3^0 \left(\frac{4}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$$

$$P(X=1) = C_3^1 \left(\frac{4}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{12}{125}$$

$$P(X=2) = C_3^2 \left(\frac{4}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^1 = \frac{48}{125}$$

$$P(X=3) = C_3^3 \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^0 = \frac{64}{125}$$

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{64}{125}$

$$EX = 0 \times \frac{1}{125} + 1 \times \frac{12}{125} + 2 \times \frac{48}{125} + 3 \times \frac{64}{125} = \frac{12}{5}$$

$$\text{或 } X \sim B\left(3, \frac{4}{5}\right), \text{ 所以 } EX = 3 \times \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$$

.....13分

(17) 证明: 证明: (I) 由题, $CD^2 + PD^2 = PC^2$

$\therefore CD \perp PD$

$\because CD \perp AD, PD \cap AD = D$

$\therefore CD \perp \text{面 } PAD$

.....5分

(II) 法1: 由(I)知 $PO \perp OD, PO \perp OB, OD \perp OB$

\therefore 以点 O 为坐标原点建立空间直角坐标系 $O-xyz$, 如图所示

$$C(\sqrt{2}, 1, 0) \quad P(0, 0, 1) \quad D(0, 1, 0) \quad B(\sqrt{2}, 0, 0) \quad E\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{CE} = (-\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \overrightarrow{PB} = (\sqrt{2}, 0, -1), \overrightarrow{BC} = (0, 1, 0)$$

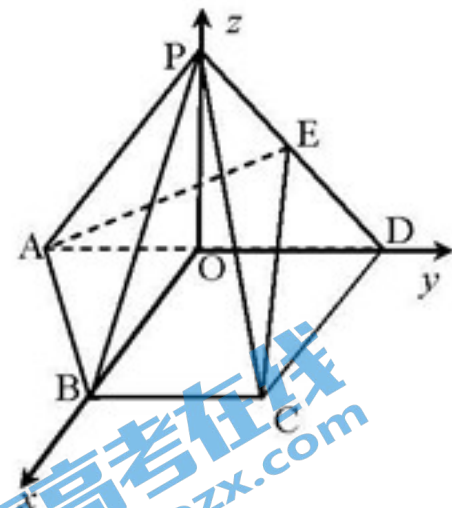
设面PBC的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PB} \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \sqrt{2}x \\ y = 0 \end{cases}, \text{令 } x = 1, \text{ 则 } z = \sqrt{2}, y = 0$$

$$\therefore \vec{n} = (1, 0, \sqrt{2})$$

设CE与面PBC所成角为 θ

$$\therefore \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{CE}, \vec{n} \rangle| = \frac{\sqrt{15}}{15}$$



北京高考在线
www.gkzxx.com

.....10分

(II) 法2: 以点D为坐标原点建立空间直角坐标系D-xyz, 如图所示

$$C(0, \sqrt{2}, 0), P(-1, 0, 1), D(0, 0, 0), B(-1, \sqrt{2}, 0), E(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$$

$$\overrightarrow{CE} = (-\frac{1}{2}, -\sqrt{2}, \frac{1}{2}), \overrightarrow{PB} = (0, \sqrt{2}, -1), \overrightarrow{BC} = (1, 0, 0)$$

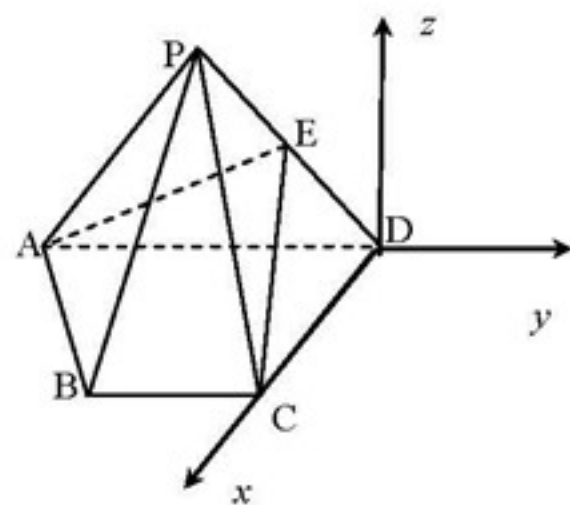
设面PBC的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PB} \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}y - z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \sqrt{2}y \\ y = 0 \end{cases}, \text{令 } y = 1, \text{ 则 } z = \sqrt{2}, y = 0$$

$$\therefore \vec{n} = (0, 1, \sqrt{2})$$

设CE与面PBC所成角为 θ

$$\therefore \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{CE}, \vec{n} \rangle| = \frac{\sqrt{15}}{15}$$



北京高考在线
www.gkzxx.com

.....10分

法3:

以点A为坐标原点建立空间直角坐标系A-xyz, 如图所示

$$C(\sqrt{2}, 2, 0), P(0, 1, 1), D(0, 2, 0), B(\sqrt{2}, 1, 0), E(0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$$

$$\overrightarrow{CE} = (-\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \overrightarrow{PB} = (\sqrt{2}, 0, -1), \overrightarrow{BC} = (0, 1, 0)$$

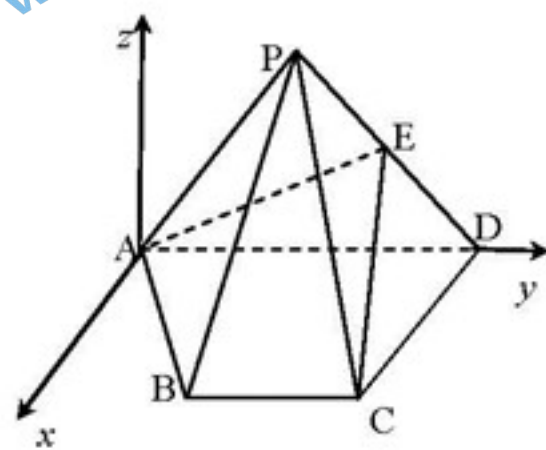
设面PBC的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{PB} \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2}x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \sqrt{2}x \\ y = 0 \end{cases}, \text{令 } x = 1, \text{ 则 } z = \sqrt{2}, y = 0$$

$$\therefore \vec{n} = (1, 0, \sqrt{2})$$

设CE与面PBC所成角为 θ

$$\therefore \sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{CE}, \vec{n} \rangle| = \frac{\sqrt{15}}{15}$$



.....10分

(III) $PD \subset \text{面PAD} \therefore CD \perp PD \therefore \triangle PDC$ 为等腰直角三角形

将侧面PCD绕着PD旋转，使其与侧面PAD共面，点C运动到C'，连接AC'交PD于E，则AC'为最短路线

$$\therefore \angle APD = \angle PDC' = 90^\circ$$

$\therefore AP \parallel DC' \therefore$ 四边形ADC'P为平行四边形

$\therefore E$ 为PD, AC'的中点

$$\therefore \frac{PE}{ED} = 1, AC' = 2AE = 2\sqrt{AP^2 + PE^2} = 2\frac{\sqrt{10}}{2} = \sqrt{10}$$

(18) (I) 根据题意

$$\begin{cases} b=1 \\ e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases} \text{解得: } \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

所以椭圆C的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

..... 5分

(II) 设直线l的方程为 $y = k(x-1)$

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \\ y = k(x-1) \end{cases} \text{ 得 } (2k^2+1)x^2 - 4k^2x + 2k^2 - 2 = 0$$

由 $\Delta > 0$ 得 $k \in R$ 且 $k \neq 0$

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 线段MN中点 $Q(x_0, y_0)$

$$\text{那么 } x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{2k^2+1}, x_1x_2 = \frac{2k^2-2}{2k^2+1}$$

$$x_0 = \frac{x_1+x_2}{2} = \frac{2k^2}{2k^2+1}, y_0 = k(x_0-1) = \frac{-k}{2k^2+1}$$

设 $P(p, 0)$, 根据题意 $PQ \perp MN$

$$\text{所以 } \frac{y_0}{x_0-p} = \frac{-k}{\frac{2k^2}{2k^2+1}-p} = -\frac{1}{k}, \text{ 得 } p = \frac{k^2}{2k^2+1}$$

$$\text{所以 } |PF| = 1 - \frac{k^2}{2k^2+1} = \frac{k^2+1}{2k^2+1}$$

$$|MN| = \sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]}$$

$$= \sqrt{(1+k^2) \left[\left(\frac{4k^2}{2k^2+1} \right)^2 - \frac{4(2k^2-2)}{2k^2+1} \right]} = \frac{2\sqrt{2}(1+k^2)}{2k^2+1}$$

所以 $\frac{|MN|}{|PF|} = 2\sqrt{2}$ 为定值

..... 14 分

(19) (I) 解: $a = -1$, $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$, $f(1) = 1$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$.

$\therefore k = f'(1) = 0$.

故所求切线方程为: $y = 1$

(II) 解: $g(x) = x \ln x$, 函数定义域为: $\{x | x > 0\}$

$g'(x) = \ln x + 1$, $x_0 = \frac{1}{e}$

x	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, +\infty)$
$g'(x)$	-		+
$g(x)$	□	极小值	□

故 $g(x)$ 的极小值为 $-\frac{1}{e}$, 无极大值.

(III) 解法 1: 令 $f(x) = \frac{1}{x} - a \ln x = 0$, 解得: $\frac{1}{a} = x \ln x$ (显然 $a \neq 0$)

问题等价于函数 $y = \frac{1}{a}$ 与函数 $y = x \ln x$ 的图像有两个不同交点.

由(II)可知: $g(\frac{1}{e^2}) = -\frac{2}{e^2}$, $g(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$, $\begin{cases} \frac{1}{a} > -\frac{1}{e} \\ \frac{1}{a} \leq -\frac{2}{e^2} \end{cases}$, 解得: $-\frac{e^2}{2} \leq a < -e$

故实数 a 的取值范围是 $[-\frac{e^2}{2}, -e)$.

(III) 解法 2: $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{a}{x} = \frac{ax+1}{x^2}$

(1) $a = 0$ 时, $f(x) = \frac{1}{x}$ 在 $[\frac{1}{e^2}, +\infty)$ 上是减函数, $f(x)$ 不能有两个零点;

(2) $a > 0$ 时, $ax+1 > 0$, 所以 $f'(x) = -\frac{ax+1}{x^2} < 0$ 在 $[\frac{1}{e^2}, +\infty)$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{e^2}, +\infty)$ 上是

减函数, $f(x)$ 不能有两个零点;

(3) $a < 0$ 时, 令 $f'(x) = -\frac{ax+1}{x^2} = 0, x = -\frac{1}{a}$

$f(x), f'(x)$ 变化情况如下表:

x	$(0, -\frac{1}{a})$	$-\frac{1}{a}$	$(-\frac{1}{a}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	□	极大值	□

(i) $-\frac{1}{a} \leq \frac{1}{e^2}$ 时, 即 $a \leq -e^2$, $f(x)$ 在 $[\frac{1}{e^2}, +\infty)$ 上是增函数, 所以 $f(x)$ 不能有两个零点;

(ii) $-\frac{1}{a} > \frac{1}{e^2}$ 时, $-e^2 < a < 0$ $f(x)$ 在 $[\frac{1}{e^2}, -\frac{1}{a})$ 上是减函数, $f(x)$ 在 $(-\frac{1}{a}, +\infty)$ 上是增函数.

$\because f(1) = 0$ 所以若 $f(x)$ 在 $[\frac{1}{e^2}, +\infty)$ 有两个零点只需:

$$\begin{cases} f(-\frac{1}{a}) < 0 \\ f(\frac{1}{e^2}) \geq 0 \end{cases} \quad \text{即:} \quad \begin{cases} -a - a \ln(-\frac{1}{a}) < 0 \\ e^2 - a \ln \frac{1}{e^2} \geq 0 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} a < -e \\ a \geq -\frac{e^2}{2} \end{cases} \quad \text{所以} \quad -\frac{e^2}{2} \leq a < -e$$

综上所述 a 的范围是 $[-\frac{e^2}{2}, -e)$

20. 解: (I) B_1 有如下的三种可能结果: $B_1: \frac{1}{3}, \frac{1}{2}; B_1: \frac{1}{2}, \frac{1}{3}; B_1: 0, \frac{5}{7}$ 3分

(II) $\forall a, b \in \{x | -1 < x < 1\}$, 有

$$\frac{a+b}{1+ab} - 1 = \frac{-(a-1)(b-1)}{1+ab} < 0 \quad \text{且} \quad \frac{a+b}{1+ab} - (-1) = \frac{(a+1)(b+1)}{1+ab} > 0.$$

所以 $\frac{a+b}{1+ab} \in \{x | -1 < x < 1\}$, 即每次操作后新数列仍是 Γ 数列.

又由于每次操作中都是增加一项, 删除两项, 所以对 Γ 数列 A 每操作一次, 项数就减少一项, 所以对 n 项的 Γ 数列 A 可进行 $n-1$ 次操作. (最后只剩下一项)6分

(III) 由 (II) 可知 B_n 中仅有一项.

对于满足 $a, b \in \{x | -1 < x < 1\}$ 的实数 a, b 定义运算: $a \square b = \frac{a+b}{1+ab}$, 下面证明这种运算满足交换律和结合律.

因为 $a \square b = \frac{a+b}{1+ab}$, 且 $b \square a = \frac{b+a}{1+ba}$, 所以 $a \square b = b \square a$, 即该运算满足交换律;

$$\text{因为 } a \square (b \square c) = a \square \frac{b+c}{1+bc} = \frac{a + \frac{b+c}{1+bc}}{1 + a \cdot \frac{b+c}{1+bc}} = \frac{a+b+c+abc}{1+ab+bc+ca}$$

$$\text{且 } (a \square b) \square c = \frac{a+b}{1+ab} \square c = \frac{\frac{a+b}{1+ab} + c}{1 + \frac{a+b}{1+ab} \cdot c} = \frac{a+b+c+abc}{1+ab+bc+ca}$$

所以 $a \square (b \square c) = (a \square b) \square c$ ，即该运算满足结合律。

所以 B_9 中的项与实施的具体操作过程无关

选择如下操作过程求 B_9 ：

$$\text{由 (I) 可知 } \frac{1}{2} \square \frac{1}{3} = \frac{5}{7};$$

$$\text{易知 } -\frac{5}{7} \square \frac{5}{7} = 0; \quad -\frac{1}{4} \square \frac{1}{4} = 0; \quad \frac{1}{5} \square \frac{1}{5} = 0; \quad -\frac{1}{6} \square \frac{1}{6} = 0;$$

$$\text{所以 } B_5: \frac{5}{6}, 0, 0, 0, 0;$$

易知 B_5 经过 4 次操作后剩下一项为 $\frac{5}{6}$ 。

综上所述： $B_9: \frac{5}{6}$ 。



.....11分



.....13分

