

姓 名 _____

准考证号 _____

绝密★启用前

湘豫名校联考
2023年9月高三一轮复习诊断考试(一)
数 学

注意事项:

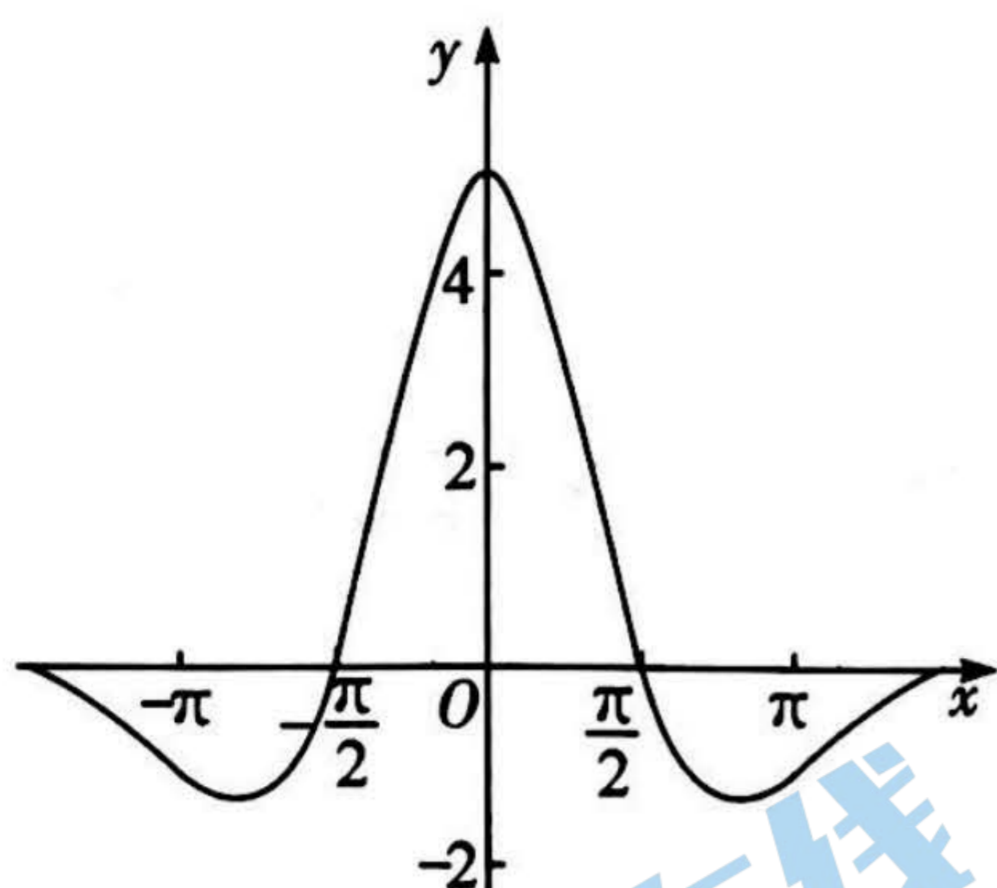
1. 本试卷共6页。时间120分钟,满分150分。答题前,考生先将自己的姓名、准考证号填写在试卷指定位置,并将姓名、考场号、座位号、准考证号填写在答题卡上,然后认真核对条形码上的信息,并将条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 作答选择题时,选出每小题答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。作答非选择题时,将答案写在答题卡上对应的答题区域内。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将试卷和答题卡一并收回。

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

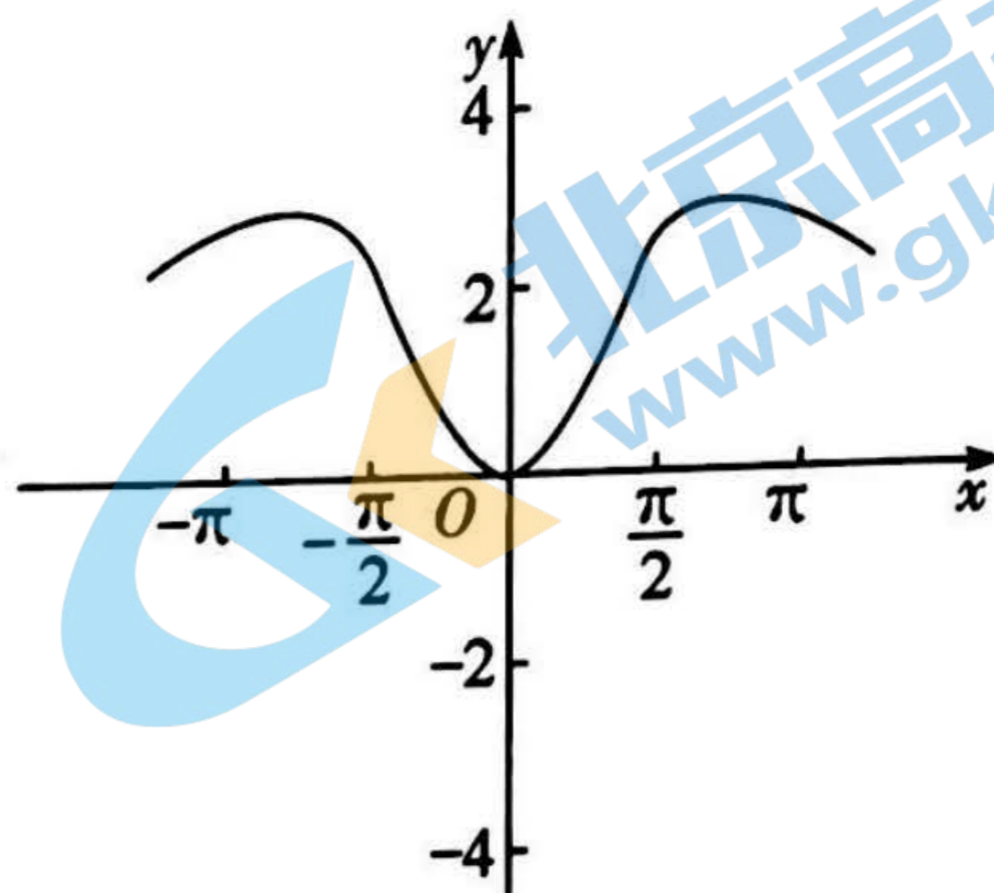
1. 已知命题 $p: \forall x \in \mathbf{R}, x < 2^x$, 则 $\neg p$ 为
A. $\forall x \in \mathbf{R}, x \geq 2^x$ B. $\exists x \in \mathbf{R}, x < 2^x$
C. $\exists x \in \mathbf{R}, x \geq 2^x$ D. $\exists x \in \mathbf{R}, x > 2^x$
2. 已知全集 $U = \{x \in \mathbf{Z} \mid |x| \leq 3\}$, 集合 $A = \{0, 1, 3\}$, $B = \{-3, -1, 0\}$, 则集合 $(\complement_U A) \cap B =$
A. $\{-3\}$ B. $\{-3, -1\}$ C. $\{0, -1\}$ D. $\{-3, -1, 0\}$
3. 若曲线 $y = ax + b \ln x$ 在点 $A(1, 2)$ 处的切线在 y 轴上的截距为1, 则 $b =$
A. -1 B. 0 C. 1 D. 2
4. 把函数 $f(x) = \cos(x + \varphi)$ 的图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变), 然后把所得曲线向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度, 得到函数 $g(x)$ 的图象, 若 $g(x)$ 的一个极值点为 $x = \frac{\pi}{3}$, 则 φ 的最小正数为
A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

数学试题 第1页(共6页)

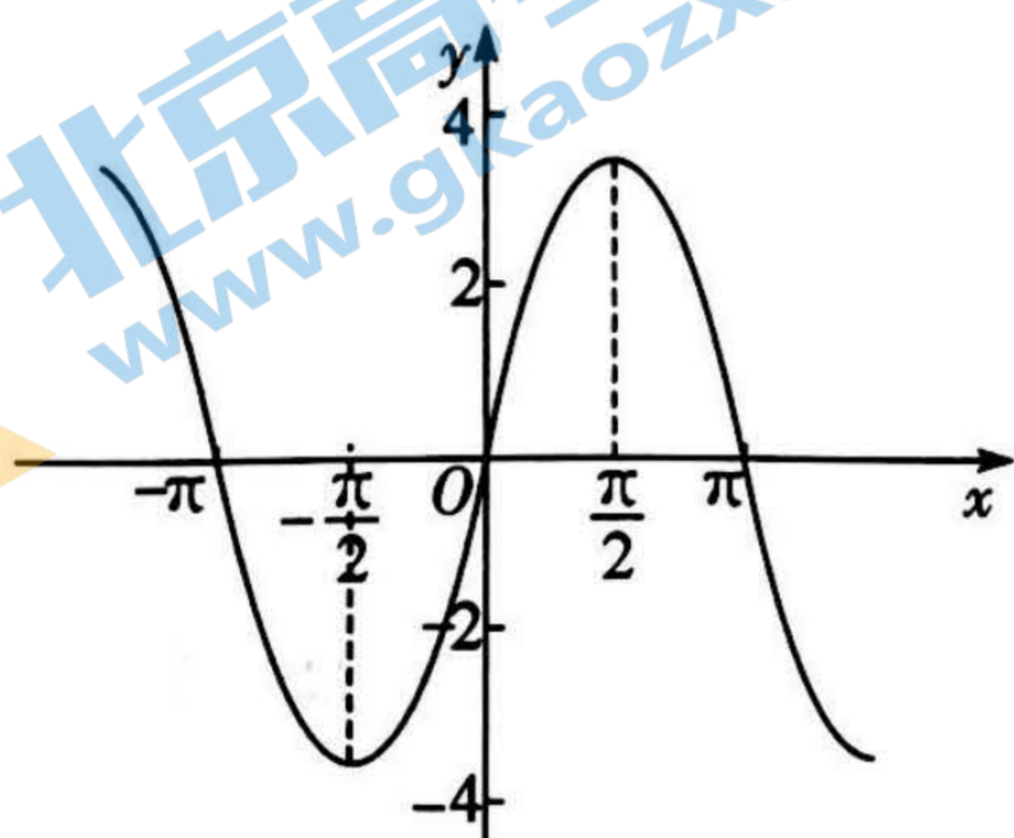
5. 函数 $f(x) = \frac{10\sin x}{2^x + 2^{-x}}$ 的大致图象为



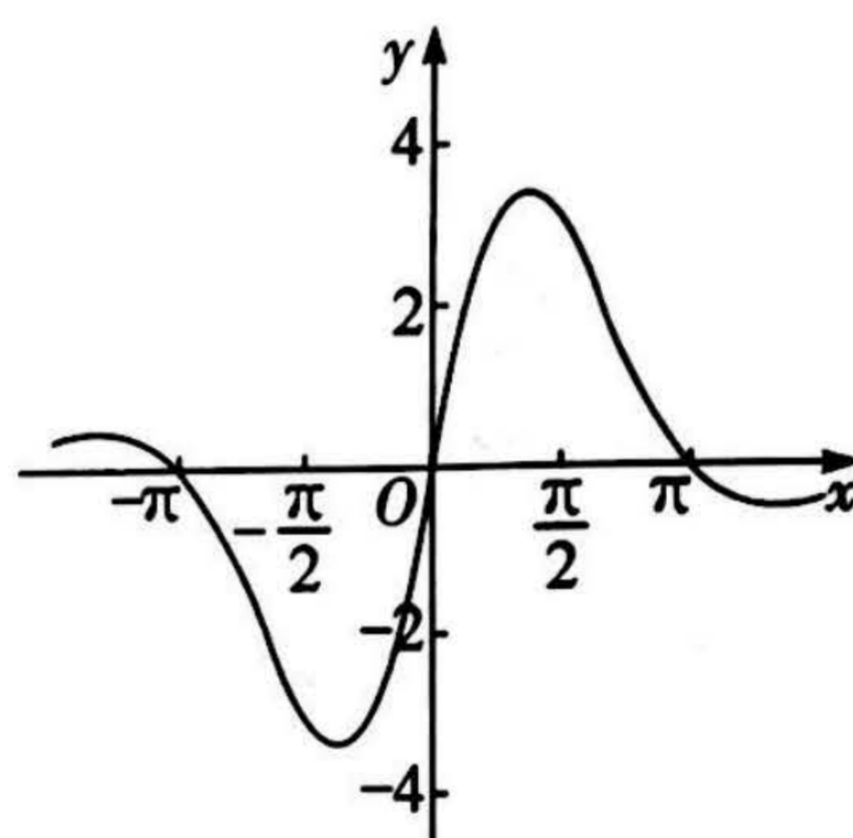
A



B



C



D

6. 若函数 $f(x) = 2^{\sin(2x + \frac{\pi}{3})}$ 在 $[-a, a]$ 上单调递增, 则实数 a 的最大值是

A. $\frac{\pi}{12}$

B. $\frac{\pi}{6}$

C. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{5\pi}{12}$

7. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , D 为 AB 边上一点, $\angle ACD = 30^\circ$, $\angle BCD = 90^\circ$, $CD = 2$, 则 $2a + b$ 的最小值为

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

B. 2

C. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{16\sqrt{3}}{3}$

8. 函数 $f(x) = ax^3 + 2x^2 + ax + 1$ 在 $(-1, +\infty)$ 上存在极大值 $f(x_1)$ 和极小值 $f(x_2)$, 且 $x_1 < x_2$, 则实数 a 的取值范围为

A. $(0, \frac{2\sqrt{3}}{3})$

B. $(\frac{2}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3})$

C. $(1, \frac{2\sqrt{3}}{3})$

D. (1, 2)

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知 $\log_2 a > \log_2 b$ ，则下列不等式恒成立的是

A. $2^a > 2^b$

B. $a^2 > b^2$

C. $\frac{1}{a} + a > \frac{1}{b} + b$

D. $a \ln b > b \ln a$

10. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$ ，曲线 $y=f(x)$ 上存在不同的两点 $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$ ，且 $f'(x_1) + f'(x_2) = 1, f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$ 成立，则下列满足上述条件的函数是

A. $y = xe^x$

B. $y = x^3 + 2x$

C. $y = x \ln x$

D. $y = \frac{1}{x}$

11. 已知角 α, β 都是锐角，且 $3\cos \alpha + \sqrt{10} \cos \beta = 3, 3\sin \alpha - \sqrt{10} \sin \beta = 2, \tan \alpha = \frac{3}{4}$ ，则下列结论正确的是

A. $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

B. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

C. $\tan(2\alpha + \beta) = \frac{9}{13}$

D. $\tan \beta = 3$

12. 已知定义在 $(0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 4)$ 上满足 $f(4-x) = f(x)$ ，当 $x \in (0, 2]$ 时， $f(x) = |\log_2 x|$ ；当 $x \in [4, +\infty)$ 时， $f(x) = -x^2 + 10x - 24$ 。

24. 若直线 $y=a$ 与函数 $f(x)$ 的图象有 6 个不同的交点，各交点的横坐标为 $x_i (i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$ ，且 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6$ ，则下列结论正确的是

A. $x_1 x_2 = 1$

B. $(x_3 - 4)(x_4 - 4) = 0$

C. $x_5 x_6 \in (24, 25)$

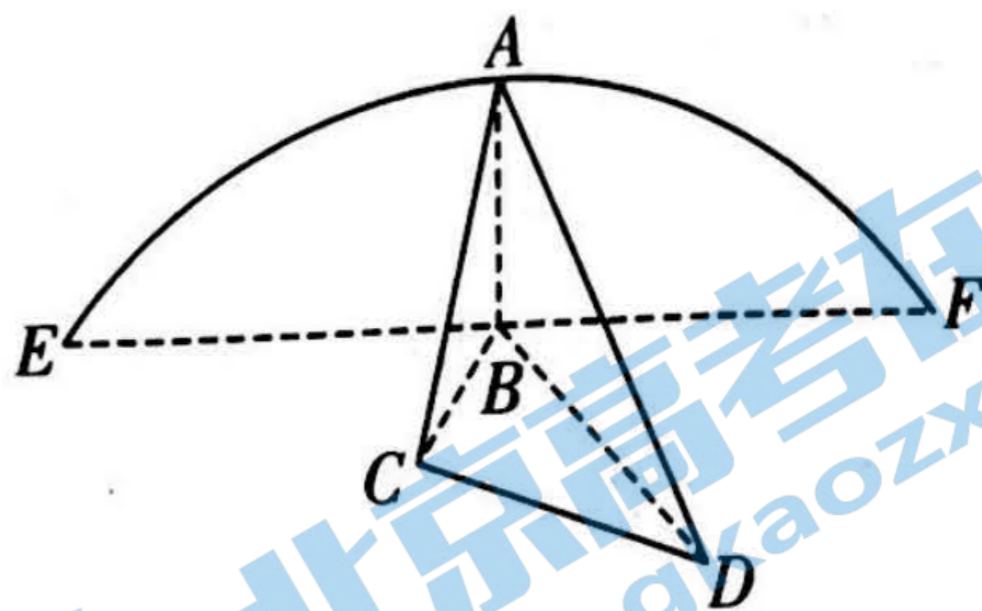
D. $\sum_{i=1}^6 x_i f(x_i) \in (0, 18)$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 用指数模型： $y = e^{0.44t}$ 描述累计一个池塘甲种微生物的数量 y 随时间 t (单位：天) 的变化规律，则该池塘甲种微生物的数量增加到原来的 3 倍需要的时间约为 _____ 天。 ($\ln 3 \approx 1.10$, 结果精确到 0.1)

14. 一场大雨过后，某市上空出现了圆形状的彩虹，某研究小组欲测量人们在地面可观察到的该彩虹(最外环)的弧长，已知彩虹所在圆面垂直于水平

面,示意图如图所示,彩虹最高点为 A , EF 为彩虹所在圆面与水平面 BCD 的交线,点 B 为 EF 的中点,若在点 C 处测得点 A 的仰角为 45° ,在点 D 处测得点 A 的仰角为 30° ,并测得 $\angle BCD = 120^\circ$, $CD = 600$ m, $EF =$



$1\ 200\sqrt{3}$ m,则彩虹(\widehat{EAF})所在圆的半径为 _____ m,彩虹(\widehat{EAF})的长度为 _____ m.(第一空 3 分,第二空 2 分)

15. 已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $f(1-3x) - f(1+3x) = -6x$, 则 $f(2\ 024) =$ _____.

16. 若不等式 $ae^{ax-1} \geq 1 + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 则实数 a 的取值范围是 _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = 2\sqrt{3}\sin \omega x \cos \omega x - 2\cos^2 \omega x + 2$ ($\omega > 0$), 且 $f(x)$ 相邻两个极值点的差的绝对值为 $\frac{\pi}{2}$.

(1) 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, 求函数 $f(x)$ 的值域;

(2) 若 $2f(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{12}) + 1 = 3f(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3})$, 求 $\frac{1 - \sin 2\theta}{\sin 2\theta - 2\cos^2 \theta}$ 的值.

18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = -1 + \frac{n}{e^x + 1}$, $x \in \mathbf{R}$, $n > 0$ 的图象经过点 $P(p, -\frac{1}{2})$, $Q(q, 0)$, 且 $e^{p+q} + (e^p + e^q) - 7 = 0$.

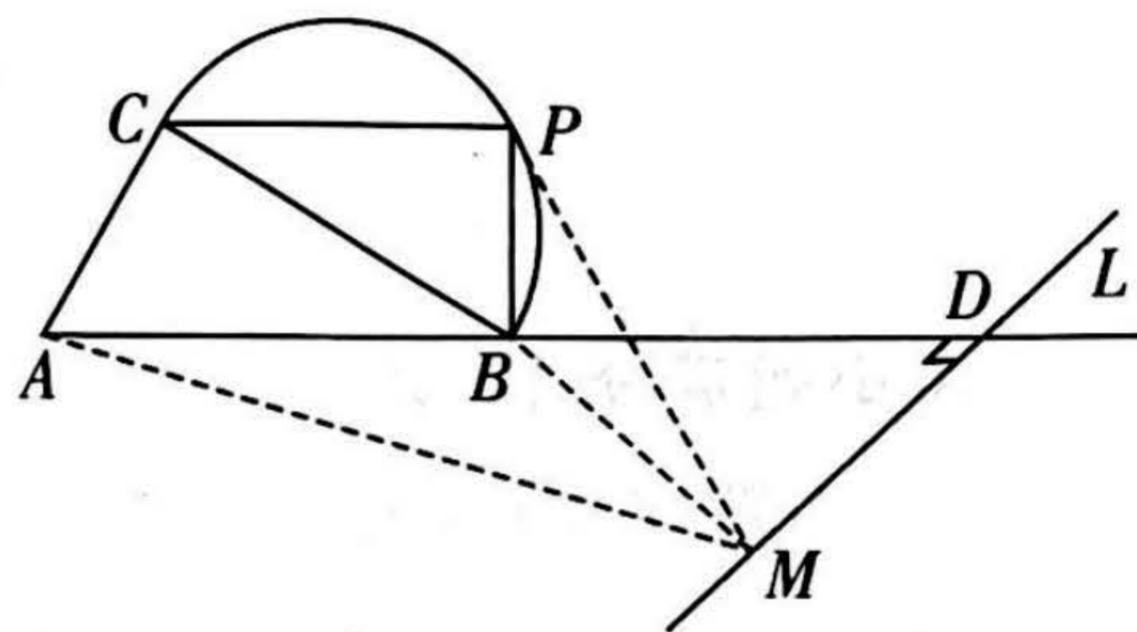
(1) 求不等式 $f(x) > 0$ 的解集;

(2) 若 $\forall m \in \mathbf{R}$, 不等式 $ax^2 - (a+1)x \leq f(m)$ ($a \geq 0$) 恒成立, 求此关于 x 的不等式的解集.

19. (本小题满分 12 分)

某公司为宣传其产品,设计一大型广告立牌置于公司楼下显目位置,广告立牌垂直于地面,其设计图如下所示,由直角 $\triangle ABC$ 和以 BC 为直径的半圆拼接而成, $AC \perp BC$, AB 固定于地面,且 $AB=10$ m,点 P 为半圆上一点(异于 B,C 两点),四边形 $ABPC$ 为梯形, $CP \parallel AB$,该广告立牌右侧有一条垂直于 AB 的直线小道 L (直线小道路面与地面平齐),与 AB 的延长线交于点 D ,且 $BD=10$ m.

- (1)若沿该造型外部边缘增加铁丝加以固定,求铁丝长度(即 $CA + \widehat{CPB}$)的最大值及此时 $\tan \angle CAB$ 的值;
- (2)若 $\angle CAB=60^\circ$,行人 M (视为质点,行人高度忽略不计)沿直线小道 L 向该广告立牌走近,当对底边 AB 观察的视线所张的角最大时,求从 M 处观察 P 点时仰角的正切值.



20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 与 $y = \ln x$ 互为反函数,函数 $g(x) = \sin x + \cos x (x \in \mathbf{R})$.

(1)求函数 $y = g(x) + \sin x \cos x$ 的值域;

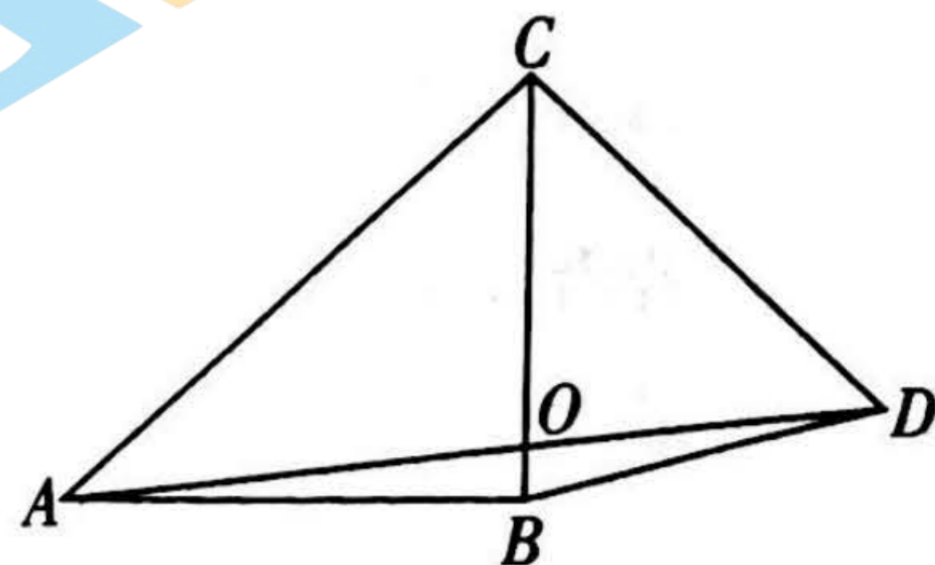
(2)证明: $\frac{g(x) - 2x - 2}{f(x)} \geq -1$.

21. (本小题满分 12 分)

已知平面四边形 $ABDC$ 中, 对角线 CB 为钝角 $\angle ACD$ 的平分线, CB 与 AD 相交于点 O , $AC=5$, $AD=7$, $\cos\angle ACD = -\frac{1}{5}$.

(1) 求 CO 的长;

(2) 若 $BC=BD$, 求 $\triangle ABD$ 的面积.



22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - e^x + (a-1)(x+1)$, $a \in \mathbf{R}$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 讨论函数 $g(x) = f(x) + e^x$ 的单调性;

(3) 若 $\forall x > 0$, 不等式 $f(x) < 0$ 恒成立, 求整数 a 的最大值.

湘豫名校联考

2023年9月高三一轮复习诊断考试(一)

数学参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	C	B	A	D	D	A	D	C	AB	AC	ABD	ACD

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. C 【命题意图】本题考查全称量词命题及其否定形式，考查了逻辑推理的核心素养。

【解析】全称量词命题的否定为存在量词命题，根据 $\neg p$ 的定义，可知C选项正确。故选C。

2. B 【命题意图】本题考查集合的交、并、补集的运算，考查了数学运算的核心素养。

【解析】由题可得 $U = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ，所以 $\complement_U A = \{-3, -2, -1, 2\}$ ，所以 $(\complement_U A) \cap B = \{-3, -1\}$ 。故选B。

3. A 【命题意图】本题考查导数的几何意义，考查了数学运算的核心素养。

【解析】因为点 $A(1, 2)$ 在曲线 $y = ax + b \ln x$ 上，所以 $a = 2$ 。因为 $y' = a + \frac{b}{x}$ ，所以该曲线在点A处的切线斜率 $k = 2 + b$ 。所以切线方程为 $y - 2 = (2 + b)(x - 1)$ 。令 $x = 0$ ，则 $y = -b = 1$ ，故 $b = -1$ 。故选A。

4. D 【命题意图】本题考查三角函数的图象变换，考查了直观想象、逻辑推理的核心素养。

【解析】根据题意， $f(x) = \cos(x + \varphi)$ 图象上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ （纵坐标不变），得到 $y = \cos(2x + \varphi)$ 的图象，再向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到 $g(x) = \cos\left[2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \varphi\right] = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2} + \varphi\right)$ 的图象。又函数 $g(x)$ 的一个极值点为 $x = \frac{\pi}{3}$ ，所以 $2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + \varphi = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ，即 $\varphi = k\pi - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$ 。故 $k = 1$ 时， φ 可取到最小正数 $\frac{5\pi}{6}$ 。故选D。

5. D 【命题意图】本题考查函数的图象，考查了直观想象的核心素养。

【解析】因为 $f(-x) = \frac{10\sin(-x)}{2^{-x} + 2^x} = -f(x)$ ，所以函数 $f(x)$ 为奇函数，排除A, B选项；因为 $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{10\sin \frac{3\pi}{2}}{2^{\frac{3\pi}{2}} + 2^{-\frac{3\pi}{2}}} = \frac{-10}{2^{\frac{3\pi}{2}} + 2^{-\frac{3\pi}{2}}} > -1$ ，排除C选项。故选D。

6. A 【命题意图】本题考查三角函数的单调性，考查了数学运算的核心素养。

【解析】由题意得 $a > 0$ 。令 $2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x + \frac{\pi}{3} \leq 2k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$ ，则 $k\pi - \frac{5\pi}{12} \leq x \leq k\pi + \frac{\pi}{12}, k \in \mathbf{Z}$ ，所以 $f(x)$ 在 $\left[k\pi - \frac{5\pi}{12}, k\pi + \frac{\pi}{12}\right] (k \in \mathbf{Z})$ 上单调递增。易知 $k = 0$ ，所以 $-\frac{5\pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{12}$ ，所以 $0 < a \leq \frac{\pi}{12}$ 。所以实数 a 的最大值为 $\frac{\pi}{12}$ 。故选A。

7. D 【命题意图】本题考查三角形的面积公式和基本不等式的应用，考查了数学运算的核心素养。

【解析】由题可得 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD}$ ，所以 $\frac{1}{2}ab \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \times 2b \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \times 2a \sin 90^\circ$ ，所以 $\frac{\sqrt{3}}{2}ab = b + a$ 。进入北京高考在线网站：<http://www.gaokzx.com/> 获取更多高考资讯及各类测试试题答案！

$2a$, 等式两边同除以 ab , 得 $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{a} + \frac{2}{b}$, 所以 $2a + b = \frac{2}{\sqrt{3}}(2a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(4 + \frac{b}{a} + \frac{4a}{b}\right) \geq$

$\frac{2}{\sqrt{3}} \left(4 + 2\sqrt{\frac{b}{a} \cdot \frac{4a}{b}}\right) = \frac{16\sqrt{3}}{3}$, 当且仅当 $b = 2a = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ 时, 等号成立. 故选 D.

8. C **【命题意图】** 本题考查函数的极值、导数的应用, 考查了数学运算的核心素养.

【解析】 $f'(x) = 3ax^2 + 4x + a$. 当 $a > 0$ 时, 方程 $f'(x) = 0$ 在 $(-1, +\infty)$ 上有两个不同的实根 x_1, x_2 , 且 $x_1 <$

$$x_2, \text{ 则 } \begin{cases} \Delta = 16 - 12a^2 > 0, \\ -\frac{2}{3a} > -1, \\ f'(-1) > 0, \end{cases} \quad \text{解得 } 1 < a < \frac{2\sqrt{3}}{3}; \text{ 当 } a = 0 \text{ 时, } f'(x) = 4x, \text{ 不满足题意; 当 } a < 0 \text{ 时, } f'(x) \text{ 的图象开口}$$

向下, 若方程 $f'(x) = 0$ 在 $(-1, +\infty)$ 上有两个不同的实根 x_1, x_2 , 则 $f(x)$ 的极大值点 x_1 大于极小值点 x_2 ,

与题意矛盾. 综上所述, $1 < a < \frac{2\sqrt{3}}{3}$. 故选 C.

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. AB **【命题意图】** 本题考查不等式的性质, 指数函数、对数函数的单调性, 考查了数学运算、逻辑推理的核心素养.

【解析】 根据题意, 得 $a > b > 0$. 因为 $y = 2^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 所以 $2^a > 2^b$, A 选项正确; 因为 $y = x^2$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数, 所以 $a^2 > b^2$, B 选项正确; 易知 $y = x + \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递

增, 所以 $\frac{1}{a} + a$ 与 $\frac{1}{b} + b$ 的大小不确定, C 选项错误; $a \ln b > b \ln a$, 即 $\frac{\ln b}{b} > \frac{\ln a}{a}$. 设 $h(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$, 则 $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 令 $h'(x) = 0$, 得 $x = e$. 因为当 $x \in (0, e)$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0,$

$e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减. 所以 $\frac{\ln b}{b}, \frac{\ln a}{a}$ 的大小不确定, D 选项错误. 故选 AB.

10. AC **【命题意图】** 本题考查函数的概念、导数的运算、导数的几何意义, 考查了数学抽象、数学运算的核心素养.

【解析】 记 $g(x) = f'(x)$, $k_1 = g(x_1) < 0, k_2 = g(x_2) > 0$. A 选项, 因为 $g(x) = (x+1)e^x$, 所以 $g'(x) = (x+2)e^x$.

当 $x > -2$ 时, $g'(x) > 0$; 当 $x < -2$ 时, $g'(x) < 0$. 所以 $g(x)_{\min} = g(-2) = -\frac{1}{e^2}$, 所以 $g(x)$ 的值域为

$\left[-\frac{1}{e^2}, +\infty\right)$, 所以存在 x_1, x_2 使得 $k_1 + k_2 = g(x_1) + g(x_2) = 1, k_1 \cdot k_2 < 0$, A 选项正确; B 选项, $g(x) =$

$3x^2 + 2$, 易知 $g(x)$ 的值域为 $[2, +\infty)$, 所以不存在 x_1, x_2 使得 $k_1 \cdot k_2 < 0$, B 选项错误; C 选项, 因为 $g(x) =$

$1 + \ln x$, 所以 $g(x)$ 的值域为 \mathbf{R} . 所以一定存在 x_1, x_2 使得 $k_1 + k_2 = g(x_1) + g(x_2) = 1, k_1 \cdot k_2 < 0$, C 选项正

确; D 选项, 因为 $g(x) = -\frac{1}{x^2}$, 所以 $g(x)$ 的值域为 $(-\infty, 0)$, 所以不存在 x_1, x_2 使得 $k_1 + k_2 = g(x_1) +$

$g(x_2) = 1$, D 选项错误. 故选 AC.

11. ~~ABD~~ **【命题意图】** 本题考查三角恒等变换, 考查了数学运算的核心素养.

【解析】 因为 $3\cos \alpha + \sqrt{10}\cos \beta = 3, 3\sin \alpha - \sqrt{10}\sin \beta = 2$, 两式平方后相加可得 $9 + 10 + 6\sqrt{10}(\cos \alpha \cos \beta -$

$\sin \alpha \sin \beta) = 13$, 所以 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{10}}{10}$. 因为角 α, β 为锐角, 所以 $\alpha + \beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 所以 $\sin(\alpha + \beta) =$

进入北京高考在线网站: <http://www.gaokzx.com/> 获取更多高考资讯及各类测试试题答案!

11题题干有误, 学生统一都得分.

$$\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)} = \sqrt{1-\frac{10}{100}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}. \text{ 所以 } \tan(\alpha+\beta) = -3, \text{ 所以 } \tan(2\alpha+\beta) = \frac{\tan \alpha + \tan(\alpha+\beta)}{1 - \tan \alpha \tan(\alpha+\beta)} = \frac{\frac{3}{4} - 3}{1 + \frac{9}{4}} = -\frac{9}{13}.$$

$$\text{所以 } \tan \beta = \tan[(\alpha+\beta) - \alpha] = \frac{\tan(\alpha+\beta) - \tan \alpha}{1 + \tan(\alpha+\beta) \tan \alpha} = \frac{-3 - \frac{3}{4}}{1 + (-3) \times \frac{3}{4}} = 3. \text{ 故选 ABD.}$$

12. ACD **【命题意图】**本题考查函数的图象与性质、函数与方程,考查了直观想象、数学运算的核心素养.

【解析】因为 $|\log_2 x_1| = |\log_2 x_2|$ ($0 < x_1 < 1, 1 < x_2 < 2$), 所以 $-\log_2 x_1 = \log_2 x_2$, 所以 $x_1 x_2 = 1$, A 选项正确; 当 $x \in (2, 4)$ 时, $4-x \in (0, 2)$, 所以 $f(x) = f(4-x) = |\log_2(4-x)|$. 又 $2 < x_3 < 3, 3 < x_4 < 4$, 所以 $\log_2(4-x_3) = -\log_2(4-x_4)$. 所以 $(x_3-4)(x_4-4) = 1$, B 选项错误; 因为当 $x \in [4, +\infty)$ 时, $f(x) = -x^2 + 10x - 24$, 所以当 $x \in [4, 6]$ 时, $f(x)$ 的图象关于直线 $x=5$ 对称, 所以 $x_5 x_6 = x_5(10-x_5) = -(x_5-5)^2 + 25$. 又 $x_5 \in (4, 5)$, 所以 $x_5 x_6 \in (24, 25)$, C 选项正确; 因为 x_1 与 x_4, x_2 与 x_3 关于直线 $x=2$ 对称, 所以 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$. 又 x_5 与 x_6 关于直线 $x=5$ 对称, 所以 $x_5 + x_6 = 10$. 所以 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 18$, 所以 $\sum_{i=1}^6 x_i f(x_i) = a \cdot \sum_{i=1}^6 x_i = 18a$. 由题意可画图判断(图略) $a \in (0, 1)$, 所以 $\sum_{i=1}^6 x_i f(x_i) \in (0, 18)$, D 选项正确, 故选 ACD.

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 2.5 **【命题意图】**本题考查指数的运算、函数的应用,考查了数学运算的核心素养.

【解析】由题意, 池塘甲种微生物的数量增加到原来的 3 倍, 则 $y(t_2) = 3y(t_1)$, 即 $e^{0.44t_2} = 3e^{0.44t_1}$. 所以 $e^{0.44(t_2-t_1)} = 3$, 即 $0.44(t_2-t_1) = \ln 3$. 所以 $t_2 - t_1 = \frac{\ln 3}{0.44} \approx 2.5$ (天).

14. 1 200(3 分) 800 π (2 分) **【命题意图】**本题考查余弦定理的应用和扇形知识,考查了数学运算、直观想象的核心素养.

【解析】设彩虹最高点 A 到水平面 BCD 的距离为 x m, 由题易得点 A 到平面 BCD 的距离即为 AB 的长度, 则 $BC = x$ m, $BD = \sqrt{3}x$ m. 在 $\triangle BCD$ 中, 由余弦定理得 $BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cos \angle BCD$, 即 $3x^2 = x^2 + 600^2 - 2 \times 600x \times \cos 120^\circ$, 整理得 $x^2 - 300x - 180\,000 = 0$, 解得 $x = -300$ (舍去) 或 $x = 600$. 易得 $BF = 600\sqrt{3}$ m. 设圆弧所在圆的半径为 R m, 圆心为 O, 则 $(R-600)^2 + BF^2 = R^2$, 所以 $R = 1\,200$. 所以 $\angle EOF = 120^\circ$. 故彩虹(\widehat{EAF}) 的长度为 $\frac{1}{3} \times 2\pi \times 1\,200 = 800\pi$ m.

15. 2 024 **【命题意图】**本题考查抽象函数的性质,考查了逻辑推理的核心素养.

【解析】因为 $f(x)$ 为奇函数, 所以 $f(0) = 0$. 由 $f(1-3x) - f(1+3x) = -6x$, 可得 $f(1-x) - f(1+x) = -2x$, 即 $f(1-x) - (1-x) = f(1+x) - (1+x)$. 设 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(-x) = f(-x) + x = -f(x) + x = -g(x)$, 所以 $g(x)$ 为奇函数, 所以 $g(0) = 0$, 且 $g(1-x) = g(1+x)$, 所以 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称. 由 $g(1-x) = g(1+x)$, 得 $g(-x) = g(2+x)$, 所以 $-g(x) = g(2+x)$, 所以 $g(4+x) = g[2+(2+x)] = -g(2+x) = -[-g(x)] = g(x)$. 所以 $g(x)$ 的周期为 4. 所以 $g(2\,024) = g(0) = 0$, 所以 $f(2\,024) = g(2\,024) + 2\,024 = 2\,024$.

16. $[1, +\infty)$ **【命题意图】**本题考查导数的应用与不等式恒成立问题,考查了数学运算的核心素养.

【解析】由 $ae^{ax-1} \geq 1 + \ln x$, 得 $a > 0$, 变形得 $axe^{ax} \geq ex \ln ex$, 所以 $axe^{ax} \geq e^{\ln ex} \ln ex$. 令 $g(t) = te^t$, 则 $g'(t) = e^t(t+1)$. 当 $t > 0$ 时, $g'(t) > 0$, 所以 $g(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数. 若 $\ln ex \leq 0$, 则不等式恒成立. 若 $\ln ex > 0$, 则 $x > \frac{1}{e}$, $axe^{ax} \geq e^{\ln ex} \ln ex \Leftrightarrow g(ax) \geq g(\ln ex)$, 所以 $ax \geq \ln ex = 1 + \ln x$ 恒成立, 即 $a \geq \frac{1 + \ln x}{x}$ 恒成立. 设

进入北京高考在线网站: <http://www.gaokzx.com/> 获取更多高考资讯及各类测试试题答案!

$h(x) = \frac{1 + \ln x}{x}, x > \frac{1}{e}$, 则 $h'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$. 当 $x \in (\frac{1}{e}, 1)$ 时, $h'(x) > 0$, 所以 $h(x)$ 单调递增; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 单调递减. 所以 $h(x)$ 的最大值为 $h(1) = 1$, 所以 $a \geq 1$. 故实数 a 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. **【命题意图】** 本题考查三角恒等变换和三角函数图象的性质, 考查了数学运算的核心素养.

【解析】(1) 因为 $f(x) = 2\sqrt{3} \sin \omega x \cos \omega x - 2\cos^2 \omega x + 2 = \sqrt{3} \sin 2\omega x - \cos 2\omega x + 1$
 $= 2\sin(2\omega x - \frac{\pi}{6}) + 1$ 3 分

由题意得 $f(x)$ 的最小正周期为 $\pi, \omega > 0$, 所以 $2\omega = \frac{2\pi}{\pi} = 2$, 即 $\omega = 1$ 4 分

所以 $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{6}) + 1$ 5 分

当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $2x - \frac{\pi}{6} \in [-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$, 所以 $\sin(2x - \frac{\pi}{6}) \in [-\frac{1}{2}, 1]$.

所以 $f(x) \in [0, 3]$, 故函数 $f(x)$ 的值域为 $[0, 3]$ 6 分

(2) 由 $2f(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{12}) + 1 = 3f(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{3})$, 得 $2\sin \theta = 3\cos \theta$, 所以 $\tan \theta = \frac{3}{2}$ 8 分

所以 $\frac{1 - \sin 2\theta}{\sin 2\theta - 2\cos^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta}{2\sin \theta \cos \theta - 2\cos^2 \theta} = \frac{\tan^2 \theta + 1 - 2\tan \theta}{2\tan \theta - 2} = \frac{1}{4}$ 10 分

18. **【命题意图】** 本题考查函数的单调性和含参一元二次不等式的解法, 考查了数学运算的核心素养.

【解析】(1) 由题意可得, $-1 + \frac{n}{e^p + 1} = -\frac{1}{2}, -1 + \frac{n}{e^q + 1} = 0$, 所以 $\frac{n}{e^p + 1} = \frac{1}{2}, \frac{n}{e^q + 1} = 1$,

两式相乘, 整理得 $\frac{n}{e^p + 1} \cdot \frac{n}{e^q + 1} = \frac{1}{2}$.

由 $e^{p+q} + (e^p + e^q) - 7 = 0$, 得 $(e^p + 1)(e^q + 1) = 8$, 所以 $n = 2$ 2 分

易知 $f(x) = -1 + \frac{2}{e^x + 1}$ 为减函数, 又 $f(0) = 0$,

所以当 $f(x) > 0$ 时, $x < 0$.

故不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $(-\infty, 0)$ 4 分

(2) 因为 $f(x)$ 为减函数, 又 $e^x > 0$, 所以 $f(x) \in (-1, 1)$.

所以 $f(x)$ 的值域为 $(-1, 1)$ 5 分

因为 $\forall m \in \mathbf{R}$, 不等式 $ax^2 - (a+1)x \leq f(m) (a \geq 0)$ 恒成立,

则 $ax^2 - (a+1)x \leq -1$.

所以 $ax^2 - (a+1)x + 1 \leq 0$ 6 分

所以原不等式变为 $(ax-1)(x-1) \leq 0$,

当 $a > 0$ 时, 不等式两边同除以 a , 得 $(x - \frac{1}{a})(x-1) \leq 0$.

所以当 $0 < a < 1$ 时, 解得 $1 \leq x \leq \frac{1}{a}$; 7 分

当 $a = 1$ 时, 解得 $x = 1$; 8 分

当 $a > 1$ 时, 解得 $\frac{1}{a} \leq x \leq 1$; 9 分

当 $a = 0$ 时, 原不等式等价于 $-x + 1 \leq 0$, 即 $x \geq 1$ 10 分

综上所述, 当 $0 < a < 1$ 时, 不等式的解集为 $\{x | 1 \leq x \leq \frac{1}{a}\}$;

进入北京高考在线网站: <http://www.gaokzx.com/> 获取更多高考资讯及各类测试试题答案!

当 $a=1$ 时, 不等式的解集为 $\{x|x=1\}$;

当 $a>1$ 时, 不等式的解集为 $\{x|\frac{1}{a}\leq x\leq 1\}$;

当 $a=0$ 时, 不等式的解集为 $\{x|x\geq 1\}$ 12 分

19. 【命题意图】本题考查三角函数的应用和基本不等式的应用, 考查了直观想象、数学运算的核心素养.

【解析】(1) 因为 $\triangle ABC$ 为直角三角形, 设 $\angle CAB=\theta, 0<\theta<\frac{\pi}{2}$,

又 $CP\parallel AB$,

所以 $\angle ABC=\angle PCB=\frac{\pi}{2}-\theta$.

因为在直角 $\triangle ABC$ 中, $AB=10$ m, 所以 $AC=10\cos\theta$ m, $BC=10\sin\theta$ m. 2 分

所以 $CA+\widehat{CPB}=10\cos\theta+5\pi\sin\theta=5\sqrt{4+\pi^2}\sin(\theta+\varphi)$ m (其中 $\tan\varphi=\frac{2}{\pi}$). 3 分

当 $\theta+\varphi=\frac{\pi}{2}$, 即 $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$ 时, $CA+\widehat{CPB}$ 取到最大值, 为 $5\sqrt{4+\pi^2}$ m, 5 分

所以 $\tan\theta=\tan(\frac{\pi}{2}-\varphi)=\frac{1}{\tan\varphi}=\frac{\pi}{2}$ 6 分

(2) 依题意, 设 $MD=x$ m, $\angle AMB=\gamma, \angle AMD=\alpha, \angle BMD=\beta$, 则 $\gamma=\alpha-\beta$,

所以 $\tan\alpha=\frac{20}{x}, \tan\beta=\frac{10}{x}$, 所以 $\tan\gamma=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ 7 分

$=\frac{\frac{20}{x}-\frac{10}{x}}{1+\frac{20}{x}\times\frac{10}{x}}=\frac{10}{x+\frac{200}{x}}\leq\frac{10}{2\sqrt{x\times\frac{200}{x}}}=\frac{10}{20\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$, 当且仅当 $x=10\sqrt{2}$ 时等号成立. 9 分

所以当 $MD=10\sqrt{2}$ m 时, 对底边 AB 观察的视线所张的角最大. 10 分

因为 $\angle CAB=60^\circ$, 易得 $BP\perp AB$, 所以 $BP=\frac{1}{2}BC=\frac{5\sqrt{3}}{2}$ m, $BP\perp$ 平面 AMD , 所以 $BP\perp BM$.

因为 $BD=10$ m, $MD=10\sqrt{2}$ m,

所以 $MB=10\sqrt{3}$ m, 所以 $\tan\angle PMB=\frac{1}{4}$.

所以从 M 处观察 P 点时仰角的正切值为 $\frac{1}{4}$ 12 分

20. 【命题意图】本题考查函数的性质及其应用, 考查了数学运算、直观想象的核心素养.

【解析】(1) 因为 $y=g(x)+\sin x\cos x=\sin x+\cos x+\sin x\cos x$, 1 分

令 $t=\sin x+\cos x$, 则 $t=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}), t\in[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, 所以 $y=t+\frac{t^2-1}{2}=\frac{1}{2}(t+1)^2-1$ 3 分

所以当 $t=-1$ 时, $y_{\min}=-1$; 当 $t=\sqrt{2}$ 时, $y_{\max}=\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ 4 分

故所求函数的值域为 $[-1, \frac{1+2\sqrt{2}}{2}]$ 5 分

(2) 根据题意, 易得 $f(x)=e^x, x\in\mathbf{R}$. 欲证 $\frac{g(x)-2x-2}{f(x)}\geq-1$, 即证 $\frac{2x+2-\sin x-\cos x}{e^x}\leq 1$ 6 分

令 $h(x)=\frac{2x+2-\sin x-\cos x}{e^x}, x\in\mathbf{R}$.

则 $h'(x)=\frac{(2-\cos x+\sin x)e^x-(2x+2-\sin x-\cos x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{2\sin x-2x}{e^x}$ 8 分

令 $\varphi(x)=2\sin x-2x, x\in\mathbf{R}$, 则 $\varphi'(x)=2\cos x-2$.

进入北京高考在线网站: <http://www.gaokzx.com/> 获取更多高考资讯及各类测试试题答案!

易知 $\varphi'(x) \leq 0$ 恒成立, 所以 $\varphi(x)$ 在 \mathbf{R} 上为减函数. 又 $\varphi(0) = 0$, 所以 $h'(0) = 0$ 9 分

又 $e^x > 0$ 恒成立, 所以当 $x < 0$ 时, $\varphi(x) > 0$, 即 $h'(x) > 0$, 故 $h(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增;

当 $x > 0$ 时, $\varphi(x) < 0$, 即 $h'(x) < 0$, 故 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 11 分

所以 $h(x)_{\max} = h(0) = 1$, 即 $h(x) \leq 1$ 恒成立.

故 $\frac{g(x) - 2x - 2}{f(x)} \geq -1$ 12 分

21. 【命题意图】本题考查正弦定理、余弦定理的应用, 考查了数学运算的核心素养.

【解析】(1) 在 $\triangle ACD$ 中, 由余弦定理得 $\cos \angle ACD = \frac{25 + CD^2 - 49}{2 \times 5 \times CD} = -\frac{1}{5}$,

解得 $CD = 4$ 或 $CD = -6$ (舍去). 1 分

因为 $\cos \angle ACD = -\frac{1}{5}$, 所以 $\sin \angle ACD = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

所以 $\cos \angle ACD = 1 - 2\sin^2 \angle ACO$, 解得 $\sin \angle ACO = \frac{\sqrt{15}}{5}$ (负值舍去), 所以 $\sin \angle DCO = \sin \angle ACO = \frac{\sqrt{15}}{5}$.

..... 3 分

因为 $S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ACO} + S_{\triangle DCO}$,

所以 $\frac{1}{2} CA \cdot CD \sin \angle ACD = \frac{1}{2} CA \cdot CO \sin \angle ACO + \frac{1}{2} CD \cdot CO \sin \angle DCO$ 4 分

所以 $\frac{1}{2} \times 5 \times 4 \times \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{1}{2} \times 5 \times CO \times \frac{\sqrt{15}}{5} + \frac{1}{2} \times 4 \times CO \times \frac{\sqrt{15}}{5}$.

所以 $CO = \frac{8\sqrt{10}}{9}$ 5 分

(2) 在 $\triangle ACD$ 中, 由正弦定理可得 $\frac{AC}{\sin \angle ADC} = \frac{AD}{\sin \angle ACD} \Rightarrow \frac{5}{\sin \angle ADC} = \frac{7}{\frac{2\sqrt{6}}{5}}$,

则 $\sin \angle ADC = \frac{2\sqrt{6}}{7}$, 所以 $\cos \angle ADC = \frac{5}{7}$ 6 分

因为 $BD = BC$, 所以 $\angle BDC = \angle BCD$,

所以 $\sin \angle BDC = \sin \angle BCD = \frac{\sqrt{15}}{5}$, 所以 $\cos \angle BDC = \frac{\sqrt{10}}{5}$ 7 分

由余弦定理可得 $\cos \angle BDC = \frac{\sqrt{10}}{5} = \frac{CD^2 + BD^2 - BC^2}{2CD \cdot BD} = \frac{16}{8BD} = \frac{2}{BD}$,

解得 $BD = BC = \sqrt{10}$ 9 分

因为 $\cos \angle ADC = \frac{5}{7}$,

所以 $\sin \angle ADB = \sin(\angle BDC - \angle ADC) = \sin \angle BDC \cos \angle ADC - \cos \angle BDC \sin \angle ADC$

$= \frac{\sqrt{15}}{5} \times \frac{5}{7} - \frac{\sqrt{10}}{5} \times \frac{2\sqrt{6}}{7} = \frac{\sqrt{15}}{35}$, 11 分

所以 $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} DA \cdot DB \sin \angle ADB = \frac{1}{2} \times 7 \times \sqrt{10} \times \frac{\sqrt{15}}{35} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 12 分

22. 【命题意图】本题考查导数及其应用, 考查了数学抽象、数学运算、逻辑推理等核心素养.

【解析】(1) 当 $a = 1$ 时, $f(x) = \ln x - e^x$, 所以 $f'(x) = \frac{1}{x} - e^x$.

因为 $f(1) = -e$, $f'(1) = 1 - e$,

所以曲线 $f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - (-e) = (1 - e)(x - 1)$,

即 $(e - 1)x + y + 1 = 0$ 2 分

进入北京高考在线网站: <http://www.gaokzx.com/> 获取更多高考资讯及各类测试试题答案!

(2) 因为 $g(x) = f(x) + e^x = \ln x + (a-1)(x+1)$, $x > 0$, 所以 $g'(x) = \frac{1}{x} + a - 1, x > 0$.

① 当 $a-1 \geq 0$, 即 $a \geq 1$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 4 分

② 当 $a-1 < 0$, 即 $a < 1$ 时, 由 $g'(x) = \frac{1}{x} + a - 1 > 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{1-a}$;

由 $g'(x) = \frac{1}{x} + a - 1 < 0$, 得 $x > \frac{1}{1-a}$.

所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{1-a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{1-a}, +\infty)$ 上单调递减. 5 分

综上所述, 当 $a \geq 1$ 时, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; 当 $a < 1$ 时, $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{1-a})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{1-a}, +\infty)$ 上单调递减. 6 分

(3) 因为 $\forall x > 0, f(x) = \ln x - e^x + (a-1)(x+1) < 0$ 恒成立,

即 $\ln x - e^x < (1-a)(x+1)$ 恒成立,

令 $\varphi(x) = \ln x - e^x$, 则 $\varphi'(x) = \frac{1}{x} - e^x$, 显然 $\varphi'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

又 $\varphi'(\frac{1}{2}) = 2 - \sqrt{e} > 0, \varphi'(1) < 0$,

所以存在唯一实数 $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$, 使得 $\varphi'(x_0) = 0$, 即 $e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$, 亦即 $x_0 = -\ln x_0$ 7 分

所以当 $x \in (0, x_0)$ 时, $\varphi'(x) > 0$; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $\varphi'(x) < 0$.

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递减.

所以 $\varphi(x) \leq \varphi(x_0) = \ln x_0 - e^{x_0} = -(\frac{1}{x_0} + x_0) < -2$, 所以 $\ln x - e^x < -2$ 8 分

令 $h(x) = (1-a)(x+1)$, 易得 $h(x)$ 的图象恒过点 $(-1, 0)$,

① 若 $a < 1$, 则 $h(x) = (1-a)(x+1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $h(x) > h(0) = 1-a > -2$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $a < 1$ 符合题意.

② 若 $a = 1$, 则 $h(x) = 0$, 所以 $h(x) > -2$ 成立, 故 $a = 1$ 符合题意;

③ 若 $a > 1$, 则 $h(x) = (1-a)(x+1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

当 $a = 2$ 时, $h(x) = -x-1$, 且 $h(1) = -2$,

又 $\varphi(x) < -2$, 所以当 $0 < x \leq 1$ 时, $h(x) \geq h(1) = -2 > \varphi(x)$.

下证当 $x > 1$ 时, $\varphi(x) < h(x)$, 即证 $F(x) = \ln x - e^x + x + 1 < 0$.

则 $F'(x) = \frac{1}{x} - e^x + 1$, 易知 $F'(x)$ 单调递减.

所以当 $x > 1$ 时, $F'(x) < F'(1) = 2 - e < 0$,

所以 $F(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $F(x) < F(1) = 2 - e < 0$.

故 $a = 2$ 时符合题意;

当 $a \geq 3$ 时, $1-a \leq -2$, 取 $a = 3$, 则 $h(x) = -2x-2$.

因为 $h(1) = -4 < \varphi(1) = -e$, 不满足 $\ln x - e^x < (1-a)(x+1)$,

所以当 $a \geq 3$ 时, 不符合题意; 11 分

综上所述, 满足条件的整数 a 的最大值为 2. 12 分