绵阳市高中2021级第二次诊断性考试

文科数学参考答案及评分意见

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分.

BACDC　BACAD　AB

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分.

13. $\frac{7\sqrt{2}}{10}$　　14. $-\frac{1}{2}$　　15. $\frac{1}{2}$　　16. $\sqrt{2}x\pm y=0$

三、解答题：本大题共6小题，共70分.

17. 解：（1）设数列$\{a_n\}$的公差是d，

则$\begin{cases}5a_1+\frac{5\times4}{2}d=45\\6a_1+\frac{6\times5}{2}d=60\end{cases}$，……………………3分

解得$\begin{cases}d=2\\a_1=5\end{cases}$，……………………4分

$\therefore a_n=2n+3$；……………………6分

（2）$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5})$，……………………8分

$\therefore T_n=\frac{1}{2}(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+...+\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5})$……………………10分

$=\frac{1}{10}-\frac{1}{4n+10}=\frac{n}{10n+25}$. ……………………12分

18. 解：（1）$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，……………………2分

$=\frac{100(20\times20-30\times30)^2}{60\times40\times50\times50}$=4>3.841……………………4分

故有95%的把握认为喜欢旅游与性别有关；……………………5分

（2）按分层抽样喜欢旅游的男性为2人，记为A_1，A_2，女性为3人，记为B_1，B_2，B_3，……………………6分

随机抽取2人的事件有：(A_1,A_2)，(A_1,B_1)，(A_1,B_2)，(A_1,B_3)，(A_2,B_1)，(A_2,B_2)，(A_2,B_3)，(B_1,B_2)，(B_1,B_3)，(B_2,B_3)，……………………8分

不同性别的事件为：

(A_1, B_1)，(A_1, B_2)，(A_1, B_3)，(A_2, B_1)，(A_2, B_2)，(A_2, B_3)，…10 分

故两人是不同性别的概率 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$． ……………………………………12 分

19．解：（1）$\because 4\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=3bc\cdot\sin A$

$\therefore 4a\cdot\cos B=3b\cdot\sin A$……………………………………………………2 分

$\therefore 4\sin A\cos B=3\sin B\sin A$， ……………………………………………3 分

$\therefore \tan B=\frac{4}{3}$，则 $\cos B=\frac{3}{5}$，……………………………………………4 分

又 $\because 4\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=24c$，

$\therefore 4ac\cos B=24c$， ……………………………………………………5 分

$\therefore a\cos B=6$，

$\therefore a=\frac{6}{\cos B}=6\times\frac{5}{3}=10$； ……………………………………………6 分

（2）由余弦定理：$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$， ……………………………7 分

$\therefore b^2=100+c^2-12c$， ……………………………………………8 分

又 $a+b+c=48$，则 $b+c=38$， ……………………………………………9 分

$\therefore (38-c)^2=100+c^2-12c$， ……………………………………………10 分

$\therefore c=21$， ……………………………………………………………11 分

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\cdot sinB=\frac{1}{2}\times10\times21\times\frac{4}{5}=84$． ……………………12 分

20．解：（1）设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}y=kx-2\\x^2=2py\end{cases}$，消 y 整理得：$x^2-2pkx+4p=0$， ……………………2 分

所以：$x_1+x_2=2pk$，$x_1x_2=4p$， ……………………………………3 分

$$k_{FA}k_{FB}=\frac{y_1-\frac{p}{2}}{x_1}+\frac{y_2-\frac{p}{2}}{x_2}=\frac{kx_1-(2+\frac{p}{2})}{x_1}+\frac{kx_2-(2+\frac{p}{2})}{x_2}$$

$$=\frac{2kx_1x_2-(2+\frac{p}{2})(x_1+x_2)}{x_1x_2}$$

$=2k-\frac{k}{2}(2+\frac{p}{2})=k(1-\frac{p}{4})=0$，……………………………………4 分

$\therefore p=4$，即抛物线 E 的方程为：$x^2=8y$；……………………………………5 分

（2）由（1）可知：$x_1+x_2=8k$，$x_1x_2=16$……………………………………6 分

且 $\Delta=64k^2-64>0$，所以：$k^2>1$，

$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=8\sqrt{k^2-1}$，……………………………………7 分

直线 FA 的方程为：$y=\frac{y_1-2}{x_1}x+2$，所以：$x_M=\frac{4x_1}{2-y_1}=\frac{4x_1}{4-kx_1}$，…… 8 分

同理：$x_N=\frac{4x_2}{2-y_2}=\frac{4x_2}{4-kx_2}$，

所以 $|MN|=|x_M-x_N|=|\frac{4x_1}{4-kx_1}-\frac{4x_2}{4-kx_2}|$……………………………………9 分

$=|\frac{16(x_1-x_2)}{16-4k(x_1+x_2)+k^2x_1x_2}|$……………………………………10 分

$=\frac{8\sqrt{k^2-1}}{|1-k^2|}=\frac{8}{\sqrt{k^2-1}}\geq 16$……………………………………11 分

解得：$-\frac{\sqrt{5}}{2}\leq k<-1$ 或 $1<k\leq\frac{\sqrt{5}}{2}$．……………………………………12 分

21．解：（1）$f'(x)=2\cos x-2ax+3$，……………………………………1 分

$\therefore f'(0)=2\cos 0+3=5$，……………………………………2 分

切线斜率为 5，……………………………………3 分

曲线 $f(x)$ 在 x=0 处的切线方程为 y=5x．……………………………………4 分

（2）解法一：①当 $x\in[0,\pi]$ 时 $f'(x)=2\cos x-2ax+3$，……………………5 分

若 $a<0$ 时，$2\cos x>2ax-3$ 恒成立，

若 $a\geq 0$ 时 $f'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递减．……………………………………6 分

$\therefore f'(x) \ge f'(\pi) = -2-2a\pi+3 \ge 0$，则 $0 \le a \le \dfrac{1}{2\pi}$，…………………………7 分

综上：$a \le \dfrac{1}{2\pi}$；……………………………………………………………………8 分

②当 $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$ 时

若 $a \ge 0$ 时，$2\cos x > 2ax - 3$ 恒成立，

$\therefore f'(x) \ge 0$ 恒成立，………………………………………………………………9 分

若 $a < 0$ 时 $f'(x)$ 在 $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$ 上单调递增.

$\therefore f'(x) \ge f'(-\dfrac{\pi}{2}) = a\pi + 3 \ge 0$，则 $-\dfrac{3}{\pi} \le a < 0$，……………………………10 分

$\therefore a \ge -\dfrac{3}{\pi}$，………………………………………………………………………11 分

综上所述：$-\dfrac{3}{\pi} \le a \le \dfrac{1}{2\pi}$. ……………………………………………………12 分

解法二： 由（1）可知 $f'(0) = 2+3=5>0$，

$\therefore f(x)$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2}, \pi]$ 上必是单调递增函数，………………………………………5 分

令 $f'(x) = 2\cos x - 2ax + 3$，

则 $f'(-\dfrac{\pi}{2}) = a\pi + 3 \geqslant 0$，$f'(\pi) = 1 - 2a\pi \geqslant 0$，…………………………………6 分

$\therefore -\dfrac{3}{\pi} \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{2\pi}$ 为 $f(x)$ 在 $[-\dfrac{\pi}{2}, \pi]$ 上是增函数成立的必要条件，…………7 分

令 $f'(x) = 2\cos x - 2ax + 3$，

下证：当 $-\dfrac{3}{\pi} \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{2\pi}$ 时，$f'(x) \geqslant 0$ 对任意 $x \in [-\dfrac{\pi}{2}, \pi]$ 恒成立，…………8 分

①当 $0 \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{2\pi}$ 时，$x \in [-\dfrac{\pi}{2}, \pi]$，则 $ax \in [-\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}]$，$-2ax \in [-1, \dfrac{1}{2}]$，

$\therefore f'(x) = 2\cos x - 2ax + 3 \geqslant 1 - 2ax \geqslant 0$；……………………………………9 分

②当 $-\dfrac{3}{\pi} \leqslant a < 0$ 时，

$x \in [0, \pi]$，$-2ax > 0$，很显然 $f'(x) > 2\cos x + 3 > 0$；

$x\in[-\frac{\pi}{2},0]$，$f'(x)$为增函数，$f'(x)\geqslant f'(-\frac{\pi}{2})\geqslant a\pi+3\geqslant 0$；…………………………10分

∴当$-\frac{3}{\pi}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2\pi}$时，$g(x)\geqslant 0$对任意$x\in[-\frac{\pi}{2},\pi]$恒成立，…………………11分

∴$-\frac{3}{\pi}\leqslant a\leqslant\frac{1}{2\pi}$，使得$f(x)$在$[-\frac{\pi}{2},\pi]$上是单调函数. …………………………12分

22.（1）由题意：$(\frac{x}{3})^2+(\frac{y}{2})^2=1-t^2+t^2=1$，且$x=3\sqrt{1-t^2}\geq 0$，…………………2分

∴曲线C的普通方程为：$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1(x\geq 0)$ ……………………………………………………3分

∴曲线C的极坐标方程为$\frac{\rho^2\cos^2\theta}{9}+\frac{\rho^2\sin^2\theta}{4}=1$（$-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$），

即$\rho^2=\frac{36}{4+5\sin^2\theta}$（$-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$）；……………………………………………5分

（2）由（1）得$\rho^2=\frac{36}{4+5\sin^2\theta}$，

因为且$OA\perp OB$，不妨设$A(\rho_1,\ \theta)$，$B(\rho_2,\ \theta+\frac{\pi}{2})$，……………………………6分

∴$\rho_1{}^2=\frac{36}{4+5\sin^2\theta}$，……………………………………………………………………7分

∴$\rho_2{}^2=\frac{36}{4+5\sin^2(\theta+\frac{\pi}{2})^2}=\frac{36}{4+5\cos^2\theta}$，…………………………………………8分

∴$\frac{1}{|OA|^2}+\frac{1}{|OB|^2}=\frac{1}{\rho_2{}^2}+\frac{1}{\rho_2{}^2}$……………………………………………………9分

$=\frac{4+5\sin^2\theta+4+5\cos^2\theta}{36}=\frac{8+5}{36}=\frac{13}{36}$. ……………………………………10分

23.（1）证明：因为$(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})(ax^2+by^2)=x^2+\frac{ax^2}{b}+\frac{by^2}{a}+y^2$

$\geq x^2+y^2+2\sqrt{\frac{ax^2}{b}\cdot\frac{by^2}{a}}=x^2+y^2+2xy=(x+y)^2$，…………3分

∴$\frac{(x+y)^2}{ax^2+by^2}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$，………………………………………………………………4分

当且仅当$\frac{ax^2}{b}=\frac{by^2}{a}$，即$ax=by$时，等号成立；……………………………………5分

（2）函数$f(x)=\frac{4x^2+4x+1}{5x^2+4x+2}=\frac{(2x+1)^2}{5x^2+4x+2}=\frac{[x+(x+1)]^2}{3\cdot x^2+2\cdot(x+1)^2}$……………………7分

根据（1）的结论，$\frac{[x+(x+1)]^2}{3\cdot x^2+2\cdot(x+1)^2}\le\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$，……………………………8分

当且仅当$3x=2(x+1)$，即$x=2$时，等号成立．……………………………………9分

∴函数$f(x)=\frac{4x^2+4x+1}{5x^2+4x+2}(x>0)$的最大值为$\frac{5}{6}$，此时$x=2$．……………………10分