绝密★本科目考试启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试

数　学（文）（北京卷）

本试卷共5页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题　共40分）

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{x|x>1\}$，则 $A\cup B=$

（A）$(-1,1)$　　（B）$(1,2)$

（C）$(-1,+\infty)$　　（D）$(1,+\infty)$

（2）已知复数 $z=2+\mathrm{i}$，则 $z\cdot\overline{z}=$

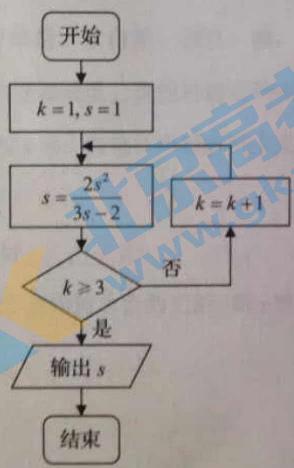
（A）$\sqrt{3}$　　（B）$\sqrt{5}$

（C）3　　（D）5

（3）下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

（A）$y=x^{\frac{1}{2}}$　　（B）$y=2^{-x}$

（C）$y=\log_{\frac{1}{2}}x$　　（D）$y=\dfrac{1}{x}$



（4）执行如图所示的程序框图，输出的 s 值为

（A）1　　（B）2

（C）3　　（D）4

（5）已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-y^2=1\ (a>0)$ 的离心率是 $\sqrt{5}$，则 $a=$

（A）$\sqrt{6}$　　（B）4

（C）2　　（D）$\dfrac{1}{2}$

(6) 设函数 $f(x)=\cos x+b\sin x$（b 为常数），则“$b=0$”是“$f(x)$ 为偶函数”的

(A) 充分而不必要条件　　(B) 必要而不充分条件

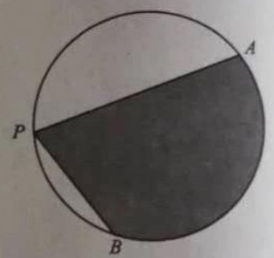
(C) 充分必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

(7) 在天文学中，天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述．两颗星的星等与亮度满足 $m_2-m_1=\frac{5}{2}\lg\frac{E_1}{E_2}$，其中星等为 m_k 的星的亮度为 $E_k\,(k=1,2)$．已知太阳的星等是 -26.7，天狼星的星等是 -1.45，则太阳与天狼星的亮度的比值为

(A) $10^{10.1}$　　(B) 10.1

(C) $\lg 10.1$　　(D) $10^{-10.1}$

(8) 如图，A,B 是半径为 2 的圆周上的定点，P 为圆周上的动点，$\angle APB$ 是锐角，大小为 β．图中阴影区域的面积的最大值为



(A) $4\beta+4\cos\beta$　　(B) $4\beta+4\sin\beta$

(C) $2\beta+2\cos\beta$　　(D) $2\beta+2\sin\beta$

第二部分（非选择题　共 110 分）

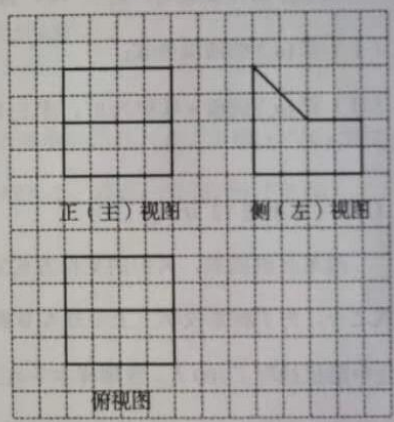
二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）已知向量 $\boldsymbol{a}=(-4,3)$，$\boldsymbol{b}=(6,m)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则 $m=$________.

（10）若 x,y 满足 $\begin{cases}x\leqslant 2,\\ y\geqslant -1,\\ 4x-3y+1\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $y-x$ 的最小值为________，最大值为________.

（11）设抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l．则以 F 为圆心，且与 l 相切的圆的方程为________.

（12）某几何体是由一个正方体去掉一个四棱柱所得，其三视图如图所示．如果网格纸上小正方形的边长为 1，那么该几何体的体积为________.



（13）已知 l,m 是平面 α 外的两条不同直线．给出下列三个论断：

① $l\perp m$；　② $m\parallel\alpha$；　③ $l\perp\alpha$．

以其中的两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出一个正确的命题：________.

（14）李明自主创业，在网上经营一家水果店，销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃，价格依次为 60 元/盒、65 元/盒、80 元/盒、90 元/盒．为增加销量，李明对这四种水果进行促销：一次购买水果的总价达到 120 元，顾客就少付 x 元．每笔订单顾客网上支付成功后，李明会得到支付款的 80%．

① 当 $x=10$ 时，顾客一次购买草莓和西瓜各 1 盒，需要支付________元；

② 在促销活动中，为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折，则 x 的最大值为________.

三、解答题共6小题，共80分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题13分）

在$\triangle ABC$中，$a=3$，$b-c=2$，$\cos B=-\frac{1}{2}$.

（Ⅰ）求b,c的值；

（Ⅱ）求$\sin(B+C)$的值.

（16）（本小题13分）

设$\{a_n\}$是等差数列，$a_1=-10$，且a_2+10，a_3+8，a_4+6成等比数列.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）记$\{a_n\}$的前n项和为S_n，求S_n的最小值.

（17）（本小题12分）

改革开放以来，人们的支付方式发生了巨大转变．近年来，移动支付已成为主要支付方式之一．为了解某校学生上个月A,B两种移动支付方式的使用情况，从全校所有的1000名学生中随机抽取了100人，发现样本中A,B两种支付方式都不使用的有5人，样本中仅使用A和仅使用B的学生的支付金额分布情况如下：

支付金额 \ 支付方式	不大于2000元	大于2000元
仅使用A	27人	3人
仅使用B	24人	1人

（Ⅰ）估计该校学生中上个月A,B两种支付方式都使用的人数；

（Ⅱ）从样本仅使用B的学生中随机抽取1人，求该学生上个月支付金额大于2000元的概率；

（Ⅲ）已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化．现从样本仅使用B的学生中随机抽查1人，发现他本月的支付金额大于2000元．结合（Ⅱ）的结果，能否认为样本仅使用B的学生中本月支付金额大于2000元的人数有变化？说明理由.

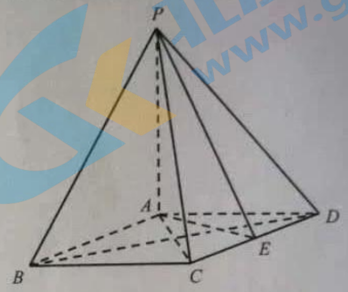
(18)（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为菱形，E 为 CD 的中点．

（Ⅰ）求证：$BD\perp$ 平面 PAC；

（Ⅱ）若 $\angle ABC=60^\circ$，求证：平面 $PAB\perp$ 平面 PAE；

（Ⅲ）棱 PB 上是否存在点 F，使得 $CF\,/\!/$ 平面 PAE？说明理由．



(19)（本小题 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的右焦点为 $(1,0)$，且经过点 $A(0,1)$．

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 O 为原点，直线 l：$y=kx+t\,(t\neq\pm1)$ 与椭圆 C 交于两个不同点 P,Q，直线 AP 与 x 轴交于点 M，直线 AQ 与 x 轴交于点 N．若 $|OM|\cdot|ON|=2$，求证：直线 l 经过定点．

(20)（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-x^2+x$．

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 的斜率为1的切线方程；

（Ⅱ）当 $x\in[-2,4]$ 时，求证：$x-6\leqslant f(x)\leqslant x$；

（Ⅲ）设 $F(x)=|f(x)-(x+a)|\ (a\in\mathbf{R})$，记 $F(x)$ 在区间 $[-2,4]$ 上的最大值为 $M(a)$．当 $M(a)$ 最小时，求 a 的值．

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试

数学（文）（北京卷）参考答案

一、选择题（共8小题，每小题5分，共40分）

（1）C	（2）D	（3）A	（4）B
（5）D	（6）C	（7）A	（8）B

二、填空题（共6小题，每小题5分，共30分）

（9）8　　　（10）-3　1

（11）$(x-1)^2+y^2=4$　　　（12）40

（13）若$l\perp m$，$l\perp\alpha$，则$m//\alpha$．（答案不唯一）

（14）130　15

三、解答题（共6小题，共80分）

（15）（共13分）

解：（Ⅰ）由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得

$$b^2=3^2+c^2-2\times3\times c\times(-\frac{1}{2}).$$

因为$b=c+2$，

所以$(c+2)^2=3^2+c^2-2\times3\times c\times(-\frac{1}{2})$．

解得$c=5$．

所以$b=7$．

（Ⅱ）由$\cos B=-\frac{1}{2}$得$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$．

由正弦定理得$\sin A=\frac{a}{b}\sin B=\frac{3\sqrt{3}}{14}$．

在$\triangle ABC$中，$B+C=\pi-A$．

所以$\sin(B+C)=\sin A=\frac{3\sqrt{3}}{14}$．

（16）（共 13 分）

解：（Ⅰ）设 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

因为 $a_1=-10$,

所以 $a_2=-10+d$ ， $a_3=-10+2d$ ， $a_4=-10+3d$.

因为 $a_2+10,\ a_3+8,\ a_4+6$ 成等比数列，

所以 $(a_3+8)^2=(a_2+10)(a_4+6)$.

所以 $(-2+2d)^2=d(-4+3d)$.

解得 $d=2$.

所以 $a_n=a_1+(n-1)d=2n-12$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知， $a_n=2n-12$.

所以，当 $n\geqslant 7$ 时， $a_n>0$ ；当 $n\leqslant 6$ 时， $a_n\leqslant 0$.

所以， S_n 的最小值为 $S_6=-30$.

（17）（共 12 分）

解：（Ⅰ）由题知，样本中仅使用 A 的学生有 $27+3=30$ 人，仅使用 B 的学生有 $24+1=25$ 人，A, B 两种支付方式都不使用的学生有 5 人.

故样本中 A, B 两种支付方式都使用的学生有 $100-30-25-5=40$ 人.

估计该校学生中上个月 A, B 两种支付方式都使用的人数为 $\dfrac{40}{100}\times 1\,000=400$.

（Ⅱ）记事件 C 为“从样本仅使用 B 的学生中随机抽取1人，该学生上个月的支付金额大于 2 000 元”，则 $P(C)=\dfrac{1}{25}=0.04$.

（Ⅲ）记事件 E 为“从样本仅使用 B 的学生中随机抽查1人，该学生本月的支付金额大于 2 000 元”.

假设样本仅使用 B 的学生中，本月支付金额大于 2 000 元的人数没有变化，则由（Ⅱ）知， $P(E)=0.04$.

答案示例 1：可以认为有变化．理由如下：

$P(E)$ 比较小，概率比较小的事件一般不容易发生，一旦发生，就有理由认为本月支付金额大于 2 000 元的人数发生了变化．所以可以认为有变化.

答案示例 2：无法确定有没有变化．理由如下：

事件 E 是随机事件，$P(E)$ 比较小，一般不容易发生，但还是有可能发生的．所以无法确定有没有变化.

(18)（共 14 分）

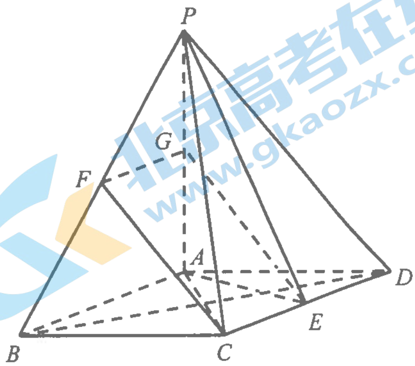
解：（Ⅰ）因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp BD$．

又因为底面 $ABCD$ 为菱形，

所以 $BD\perp AC$．

所以 $BD\perp$ 平面 PAC．



（Ⅱ）因为 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$AE\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PA\perp AE$．

因为底面 $ABCD$ 为菱形，$\angle ABC=60°$，且 E 为 CD 的中点，

所以 $AE\perp CD$．

所以 $AB\perp AE$．

所以 $AE\perp$ 平面 PAB．

所以平面 $PAB\perp$ 平面 PAE．

（Ⅲ）棱 PB 上存在点 F，使得 $CF\parallel$ 平面 PAE．

取 F 为 PB 的中点，取 G 为 PA 的中点，连结 CF，FG，EG．

则 $FG\parallel AB$，且 $FG=\dfrac{1}{2}AB$．

因为底面 $ABCD$ 为菱形，且 E 为 CD 的中点，

所以 $CE\parallel AB$，且 $CE=\dfrac{1}{2}AB$．

所以 $FG\parallel CE$，且 $FG=CE$．

所以四边形 $CEGF$ 为平行四边形．

所以 $CF\parallel EG$．

因为 $CF\not\subset$ 平面 PAE，$EG\subset$ 平面 PAE，

所以 $CF\parallel$ 平面 PAE．

(19)(共 14 分)

解:(Ⅰ)由题意得，$b^2=1$，$c=1$.

所以 $a^2=b^2+c^2=2$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

(Ⅱ)设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

则直线 AP 的方程为 $y=\frac{y_1-1}{x_1}x+1$.

令 $y=0$，得点 M 的横坐标 $x_M=-\frac{x_1}{y_1-1}$.

又 $y_1=kx_1+t$，从而 $|OM|=|x_M|=|\frac{x_1}{kx_1+t-1}|$.

同理，$|ON|=|\frac{x_2}{kx_2+t-1}|$.

由 $\begin{cases} y=kx+t, \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+4ktx+2t^2-2=0$.

则 $x_1+x_2=-\frac{4kt}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2t^2-2}{1+2k^2}$.

$$\begin{aligned}
\text{所以}|OM|\cdot|ON|&=|\frac{x_1}{kx_1+t-1}|\cdot|\frac{x_2}{kx_2+t-1}| \\
&=|\frac{x_1x_2}{k^2x_1x_2+k(t-1)(x_1+x_2)+(t-1)^2}| \\
&=|\frac{\frac{2t^2-2}{1+2k^2}}{k^2\cdot\frac{2t^2-2}{1+2k^2}+k(t-1)\cdot(-\frac{4kt}{1+2k^2})+(t-1)^2}| \\
&=2|\frac{1+t}{1-t}|.
\end{aligned}$$

又 $|OM|\cdot|ON|=2$，

所以 $2|\frac{1+t}{1-t}|=2$.

解得 $t=0$，所以直线 l 经过定点 $(0,0)$.

（20）（共 14 分）

解：（Ⅰ）由 $f(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2+x$ 得 $f'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x+1$．

令 $f'(x)=1$，即 $\frac{3}{4}x^2-2x+1=1$，得 $x=0$ 或 $x=\frac{8}{3}$．

又 $f(0)=0$， $f(\frac{8}{3})=\frac{8}{27}$，

所以曲线 $y=f(x)$ 的斜率为1的切线方程是 $y=x$ 与 $y-\frac{8}{27}=x-\frac{8}{3}$，

即 $y=x$ 与 $y=x-\frac{64}{27}$．

（Ⅱ）令 $g(x)=f(x)-x$， $x\in[-2,4]$．

由 $g(x)=\frac{1}{4}x^3-x^2$ 得 $g'(x)=\frac{3}{4}x^2-2x$．

令 $g'(x)=0$ 得 $x=0$ 或 $x=\frac{8}{3}$．

$g'(x), g(x)$ 的情况如下：

x	-2	$(-2,0)$	0	$(0,\frac{8}{3})$	$\frac{8}{3}$	$(\frac{8}{3},4)$	4
$g'(x)$		$+$		$-$		$+$	
$g(x)$	-6	↗	0	↘	$-\frac{64}{27}$	↗	0

所以 $g(x)$ 的最小值为 -6， 最大值为 0．

故 $-6\leqslant g(x)\leqslant 0$， 即 $x-6\leqslant f(x)\leqslant x$．

（Ⅲ）由（Ⅱ）知，

当 $a<-3$ 时， $M(a)\geqslant F(0)=|g(0)-a|=-a>3$；

当 $a>-3$ 时， $M(a)\geqslant F(-2)=|g(-2)-a|=6+a>3$；

当 $a=-3$ 时， $M(a)=3$．

综上，当 $M(a)$ 最小时， $a=-3$．