绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数　　学（理工类）

本试卷分为第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分，共150分，考试用时120分钟。第Ⅰ卷1至2页，第Ⅱ卷3至5页。

答卷前，考生务必将自己的姓名、准考号填写在答题卡上，并在规定位置粘贴考试用条形码。答卷时，考生务必将答案涂写在答题卡上，答在试卷上的无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

祝各位考生考试顺利!

第Ⅰ卷

注意事项：

1．每小题选出答案后，用铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。

2．本卷共8小题，每小题5分，共40分。

参考公式：

- 如果事件 A，B 互斥，那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.
- 如果事件 A，B 相互独立，那么 $P(AB)=P(A)P(B)$.
- 圆柱的体积公式 $V=Sh$，其中 S 表示圆柱的底面面积，h 表示圆柱的高.
- 棱锥的体积公式 $V=\frac{1}{3}Sh$，其中 S 表示棱锥的底面面积，h 表示棱锥的高.

一．选择题：在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

（1）设集合 $A=\{-1,1,2,3,5\}$，$B=\{2,3,4\}$，$C=\{x\in\mathbf{R}\mid 1\leqslant x<3\}$，则 $(A\cap C)\cup B=$

（A）$\{2\}$　　（B）$\{2,3\}$　　（C）$\{-1,2,3\}$　　（D）$\{1,2,3,4\}$

（2）设变量 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y-2\leqslant 0,\\ x-y+2\geqslant 0,\\ x\geqslant -1,\\ y\geqslant -1,\end{cases}$ 则目标函数 $z=-4x+y$ 的最大值为

（A）2　　（B）3　　（C）5　　（D）6

（3）设 $x \in \mathbf{R}$，则“$x^2-5x<0$”是“$|x-1|<1$”的

（A）充分而不必要条件

（B）必要而不充分条件

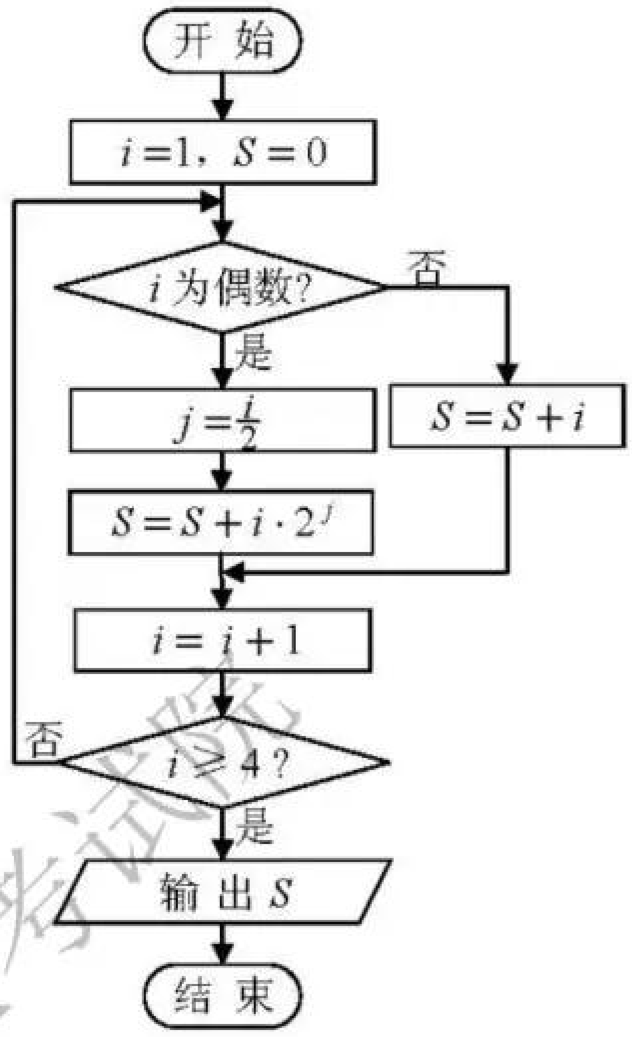
（C）充要条件

（D）既不充分也不必要条件

（4）阅读右边的程序框图，运行相应的程序，输出 S 的值为

（A）5　　　　（B）8

（C）24　　　　（D）29



第（4）题图

（5）已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，准线为 l．若 l 与双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0,b>0$）的两条渐近线分别交于点 A 和点 B，且 $|AB|=4|OF|$（O 为原点），则双曲线的离心率为

（A）$\sqrt{2}$　　　　（B）$\sqrt{3}$

（C）2　　　　（D）$\sqrt{5}$

（6）已知 $a=\log_5 2$，$b=\log_{0.5}0.2$，$c=0.5^{0.2}$，则 a，b，c 的大小关系为

（A）$a<c<b$　　（B）$a<b<c$　　（C）$b<c<a$　　（D）$c<a<b$

（7）已知函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)$（$A>0$，$\omega>0$，$|\varphi|<\pi$）是奇函数，将 $y=f(x)$ 的图象上所有点的横坐标伸长到原来的 2 倍（纵坐标不变），所得图象对应的函数为 $g(x)$．若 $g(x)$ 的最小正周期为 2π，且 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$，则 $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)=$

（A）-2　　（B）$-\sqrt{2}$　　（C）$\sqrt{2}$　　（D）2

（8）已知 $a\in\mathbf{R}$．设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2-2ax+2a, & x\leqslant 1, \\ x-a\ln x, & x>1. \end{cases}$ 若关于 x 的不等式 $f(x)\geqslant 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，则 a 的取值范围为

（A）$[0,1]$　　（B）$[0,2]$　　（C）$[0,\mathrm{e}]$　　（D）$[1,\mathrm{e}]$

绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数　学（理工类）

第Ⅱ卷

注意事项：

1．用黑色墨水的钢笔或签字笔将答案写在答题卡上。

2．本卷共12小题，共110分。

二．填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分．

（9）i是虚数单位，则$\left|\frac{5-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|$的值为____________．

（10）$\left(2x-\frac{1}{8x^3}\right)^8$的展开式中的常数项为____________．

（11）已知四棱锥的底面是边长为$\sqrt{2}$的正方形，侧棱长均为$\sqrt{5}$．若圆柱的一个底面的圆周经过四棱锥四条侧棱的中点，另一个底面的圆心为四棱锥底面的中心，则该圆柱的体积为____________．

（12）设$a\in\mathbf{R}$，直线$ax-y+2=0$和圆$\begin{cases}x=2+2\cos\theta,\\y=1+2\sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）相切，则$a$的值为____________．

（13）设$x>0$，$y>0$，$x+2y=5$，则$\frac{(x+1)(2y+1)}{\sqrt{xy}}$的最小值为____________．

（14）在四边形$ABCD$中，$AD//BC$，$AB=2\sqrt{3}$，$AD=5$，$\angle A=30^\circ$，点E在线段CB的延长线上，且$AE=BE$，则$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{AE}=$____________．

三．解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．

（15）（**本小题满分 13 分**）

在 $\triangle ABC$ 中，内角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c．已知 $b+c=2a$，$3c\sin B=4a\sin C$．

（Ⅰ）求 $\cos B$ 的值；

（Ⅱ）求 $\sin\left(2B+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值．

（16）（**本小题满分 13 分**）

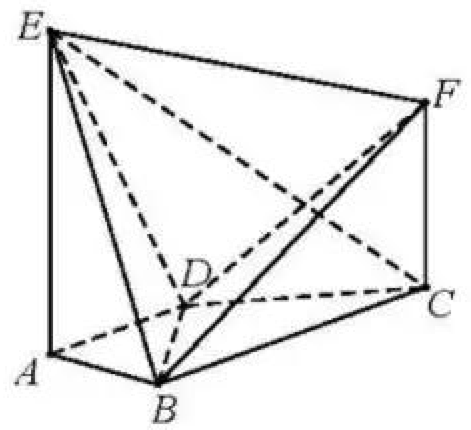
设甲、乙两位同学上学期间，每天 7:30 之前到校的概率均为 $\dfrac{2}{3}$．假定甲、乙两位同学到校情况互不影响，且任一同学每天到校情况相互独立．

（Ⅰ）用 X 表示甲同学上学期间的三天中 7:30 之前到校的天数，求随机变量 X 的分布列和数学期望；

（Ⅱ）设 M 为事件"上学期间的三天中，甲同学在 7:30 之前到校的天数比乙同学在 7:30 之前到校的天数恰好多 2"，求事件 M 发生的概率．

（17）（**本小题满分 13 分**）

如图，$AE\perp$ 平面 $ABCD$，$CF\,//\,AE$，$AD\,//\,BC$，$AD\perp AB$，$AB=AD=1$，$AE=BC=2$．



（Ⅰ）求证：$BF\,//$ 平面 ADE；

（Ⅱ）求直线 CE 与平面 BDE 所成角的正弦值；

（Ⅲ）若二面角 $E-BD-F$ 的余弦值为 $\dfrac{1}{3}$，求线段 CF 的长．

（18）（**本小题满分 13 分**）

设椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的左焦点为 F，上顶点为 B．已知椭圆的短轴长为 4，离心率为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$．

（Ⅰ）求椭圆的方程；

（Ⅱ）设点 P 在椭圆上，且异于椭圆的上、下顶点，点 M 为直线 PB 与 x 轴的交点，点 N 在 y 轴的负半轴上．若 $|ON|=|OF|$（O 为原点），且 $OP\perp MN$，求直线 PB 的斜率．

（19）（**本小题满分 14 分**）

设 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列．已知 $a_1=4$，$b_1=6$，$b_2=2a_2-2$，$b_3=2a_3+4$．

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_1=1$，$c_n=\begin{cases}1, & 2^k<n<2^{k+1},\\ b_k, & n=2^k,\end{cases}$ 其中 $k\in\mathbf{N}^*$．

（ⅰ）求数列 $\left\{a_{2^n}\left(c_{2^n}-1\right)\right\}$ 的通项公式；

（ⅱ）求 $\sum\limits_{i=1}^{2^n}a_ic_i$（$n\in\mathbf{N}^*$）．

（20）（**本小题满分 14 分**）

设函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x$，$g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数．

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，证明 $f(x)+g(x)\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\geqslant 0$；

（Ⅲ）设 x_n 为函数 $u(x)=f(x)-1$ 在区间 $\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{4},2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的零点，其中 $n\in\mathbf{N}$，证明 $2n\pi+\dfrac{\pi}{2}-x_n<\dfrac{\mathrm{e}^{-2n\pi}}{\sin x_0-\cos x_0}$．

绝密★启用前

2019年普通高等学校招生全国统一考试（天津卷）

数学（理工类）参考解答

一．选择题：本题考查基本知识和基本运算．每小题5分，满分40分．

（1）D　　（2）C　　（3）B　　（4）B

（5）D　　（6）A　　（7）C　　（8）C

二．填空题：本题考查基本知识和基本运算．每小题5分，满分30分．

（9）$\sqrt{13}$　　（10）28　　（11）$\dfrac{\pi}{4}$

（12）$\dfrac{3}{4}$　　（13）$4\sqrt{3}$　　（14）-1

三．解答题

（15）本小题主要考查同角三角函数的基本关系，两角和的正弦公式，二倍角的正弦与余弦公式，以及正弦定理、余弦定理等基础知识．考查运算求解能力．满分13分．

（Ⅰ）**解：** 在$\triangle ABC$中，由正弦定理$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$，得$b\sin C=c\sin B$，又由$3c\sin B=4a\sin C$，得$3b\sin C=4a\sin C$，即$3b=4a$．又因为$b+c=2a$，得到$b=\dfrac{4}{3}a$，$c=\dfrac{2}{3}a$．由余弦定理可得$\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{a^2+\dfrac{4}{9}a^2-\dfrac{16}{9}a^2}{2\cdot a\cdot\dfrac{2}{3}a}=-\dfrac{1}{4}$．

（Ⅱ）**解：** 由（Ⅰ）可得$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$，从而$\sin 2B=2\sin B\cos B=-\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，$\cos 2B=\cos^2 B-\sin^2 B=-\dfrac{7}{8}$，故

$$\sin\left(2B+\frac{\pi}{6}\right)=\sin 2B\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2B\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{15}}{8}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{7}{8}\times\frac{1}{2}=-\frac{3\sqrt{5}+7}{16}.$$

（16）本小题主要考查离散型随机变量的分布列与数学期望，互斥事件和相互独立事件的概率计算公式等基础知识．考查运用概率知识解决简单实际问题的能力．满分13分．

（Ⅰ）**解：** 因为甲同学上学期间的三天中到校情况相互独立，且每天7:30之前到校的概率均为$\dfrac{2}{3}$，故$X\sim B\left(3,\dfrac{2}{3}\right)$，从而$P(X=k)=C_3^k\left(\dfrac{2}{3}\right)^k\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3-k}$，$k=0,1,2,3$．

所以，随机变量X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

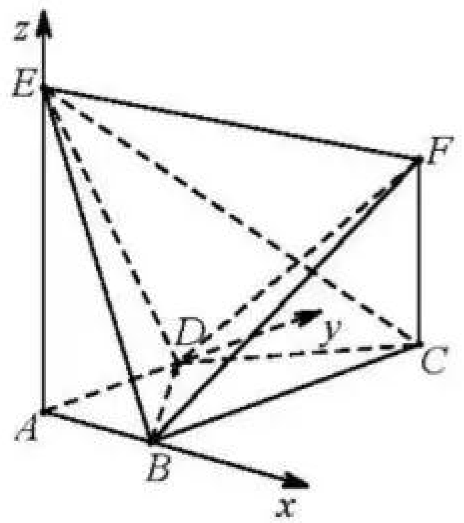
随机变量X的数学期望$E(X)=3\times\frac{2}{3}=2$．

（Ⅱ）**解：**设乙同学上学期间的三天中 7:30 之前到校的天数为Y，则$Y\sim B\left(3,\frac{2}{3}\right)$，且$M=\{X=3,Y=1\}\cup\{X=2,Y=0\}$．由题意知事件$\{X=3,Y=1\}$与$\{X=2,Y=0\}$互斥，且事件$\{X=3\}$与$\{Y=1\}$，事件$\{X=2\}$与$\{Y=0\}$均相互独立，从而由（Ⅰ）知

$$P(M)=P(\{X=3,Y=1\}\cup\{X=2,Y=0\})=P(X=3,Y=1)+P(X=2,Y=0)$$

$$=P(X=3)P(Y=1)+P(X=2)P(Y=0)=\frac{8}{27}\times\frac{2}{9}+\frac{4}{9}\times\frac{1}{27}=\frac{20}{243}.$$

（17）本小题主要考查直线与平面平行、二面角、直线与平面所成的角等基础知识．考查用空间向量解决立体几何问题的方法．考查空间想象能力、运算求解能力和推理论证能力．满分 13 分．



依题意，可以建立以A为原点，分别以$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AE}$的方向为x轴，y轴，z轴正方向的空间直角坐标系（如图），可得$A(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(1,2,0)$，$D(0,1,0)$，$E(0,0,2)$．设$CF=h$（$h>0$），则$F(1,2,h)$．

（Ⅰ）**证明：**依题意，$\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$是平面$ADE$的法向量，又$\overrightarrow{BF}=(0,2,h)$，可得$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，又因为直线$BF\not\subset$平面$ADE$，所以$BF//$平面$ADE$．

（Ⅱ）**解：**依题意，$\overrightarrow{BD}=(-1,1,0)$，$\overrightarrow{BE}=(-1,0,2)$，$\overrightarrow{CE}=(-1,-2,2)$．

设$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$为平面BDE的法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-x+y=0,\\ -x+2z=0,\end{cases}$不妨令$z=1$，

可得$\boldsymbol{n}=(2,2,1)$．因此有$\cos\left\langle\overrightarrow{CE},\boldsymbol{n}\right\rangle=\frac{\overrightarrow{CE}\cdot\boldsymbol{n}}{\left|\overrightarrow{CE}\right|\left|\boldsymbol{n}\right|}=-\frac{4}{9}$．

所以，直线CE与平面BDE所成角的正弦值为$\dfrac{4}{9}$．

（III）**解：** 设$\boldsymbol{m}=(x,y,z)$为平面BDF的法向量，则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BF}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-x+y=0,\\ 2y+hz=0,\end{cases}$

不妨令$y=1$，可得$\boldsymbol{m}=\left(1,1,-\dfrac{2}{h}\right)$．

由题意，有$\left|\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle\right|=\dfrac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{\left|4-\dfrac{2}{h}\right|}{3\sqrt{2+\dfrac{4}{h^2}}}=\dfrac{1}{3}$，解得$h=\dfrac{8}{7}$．经检验，符合题意．

所以，线段CF的长为$\dfrac{8}{7}$．

（18）本小题主要考查椭圆的标准方程和几何性质、直线方程等基础知识．考查用代数方法研究圆锥曲线的性质．考查运算求解能力，以及用方程思想解决问题的能力．满分13分．

（I）**解：** 设椭圆的半焦距为c，依题意，$2b=4$，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，又$a^2=b^2+c^2$，可得$a=\sqrt{5}$，$b=2$，$c=1$．

所以，椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$．

（II）**解：** 由题意，设$P(x_P,y_P)$（$x_P\neq0$），$M(x_M,0)$．设直线PB的斜率为k（$k\neq0$），

又$B(0,2)$，则直线PB的方程为$y=kx+2$，与椭圆方程联立$\begin{cases}y=kx+2,\\ \dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1,\end{cases}$ 整理得

$(4+5k^2)x^2+20kx=0$，可得$x_P=-\dfrac{20k}{4+5k^2}$，代入$y=kx+2$得$y_P=\dfrac{8-10k^2}{4+5k^2}$，进而直线$OP$的斜率$\dfrac{y_P}{x_P}=\dfrac{4-5k^2}{-10k}$．在$y=kx+2$中，令$y=0$，得$x_M=-\dfrac{2}{k}$．由题意得$N(0,-1)$，所以直线$MN$的斜率为$-\dfrac{k}{2}$．由$OP\perp MN$，得$\dfrac{4-5k^2}{-10k}\cdot\left(-\dfrac{k}{2}\right)=-1$，化简得$k^2=\dfrac{24}{5}$，从而$k=\pm\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$．

所以，直线PB的斜率为$\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$或$-\dfrac{2\sqrt{30}}{5}$．

（19）本小题主要考查等差数列、等比数列的通项公式及其前n项和公式等基础知识．考查化归与转化思想和数列求和的基本方法以及运算求解能力．满分 14 分．

（Ⅰ）**解：** 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，等比数列$\{b_n\}$的公比为q．依题意得

$\begin{cases}6q=6+2d,\\6q^2=12+4d,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}d=3,\\q=2,\end{cases}$ 故 $a_n=4+(n-1)\times3=3n+1$，$b_n=6\times2^{n-1}=3\times2^n$．

所以，$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n+1$，$\{b_n\}$的通项公式为$b_n=3\times2^n$．

（Ⅱ）（ⅰ）**解：** $a_{2^n}\left(c_{2^n}-1\right)=a_{2^n}\left(b_n-1\right)=\left(3\times2^n+1\right)\left(3\times2^n-1\right)=9\times4^n-1$．

所以，数列$\left\{a_{2^n}\left(c_{2^n}-1\right)\right\}$的通项公式为$a_{2^n}\left(c_{2^n}-1\right)=9\times4^n-1$．

（ⅱ）**解：** $\sum\limits_{i=1}^{2^n}a_ic_i=\sum\limits_{i=1}^{2^n}\left[a_i+a_i\left(c_i-1\right)\right]=\sum\limits_{i=1}^{2^n}a_i+\sum\limits_{i=1}^{n}a_{2^i}\left(c_{2^i}-1\right)$

$$=\left(2^n\times4+\frac{2^n\left(2^n-1\right)}{2}\times3\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(9\times4^i-1\right)$$

$$=\left(3\times2^{2n-1}+5\times2^{n-1}\right)+9\times\frac{4\left(1-4^n\right)}{1-4}-n$$

$$=27\times2^{2n-1}+5\times2^{n-1}-n-12\ （n\in\mathbf{N}^*）.$$

（20）本小题主要考查导数的运算、不等式证明、运用导数研究函数的性质等基础知识和方法．考查函数思想和化归与转化思想．考查抽象概括能力、综合分析问题和解决问题的能力．满分 14 分．

（Ⅰ）**解：** 由已知，有$f'(x)=\mathrm{e}^x\left(\cos x-\sin x\right)$．因此，当$x\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）时，有$\sin x>\cos x$，得$f'(x)<0$，则$f(x)$单调递减；当$x\in\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{4}\right)$（$k\in\mathbf{Z}$）时，有$\sin x<\cos x$，得$f'(x)>0$，则$f(x)$单调递增．

所以，$f(x)$的单调递增区间为$\left[2k\pi-\frac{3\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{4}\right]$（$k\in\mathbf{Z}$），$f(x)$的单调递减区间为$\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{5\pi}{4}\right]$（$k\in\mathbf{Z}$）．

（Ⅱ）**证明：** 记 $h(x)=f(x)+g(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$．依题意及（Ⅰ），有 $g(x)=\mathrm{e}^{x}(\cos x-\sin x)$，从而 $g'(x)=-2\mathrm{e}^{x}\sin x$．当 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)<0$，故

$$h'(x)=f'(x)+g'(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+g(x)(-1)=g'(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)<0.$$

因此，$h(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上单调递减，进而 $h(x)\geqslant h\left(\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$．

所以，当 $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 时，$f(x)+g(x)\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\geqslant 0$．

（Ⅲ）**证明：** 依题意，$u(x_n)=f(x_n)-1=0$，即 $\mathrm{e}^{x_n}\cos x_n=1$．记 $y_n=x_n-2n\pi$，则 $y_n\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$，且 $f(y_n)=\mathrm{e}^{y_n}\cos y_n=\mathrm{e}^{x_n-2n\pi}\cos(x_n-2n\pi)=\mathrm{e}^{-2n\pi}$（$n\in\mathbf{N}$）.

由 $f(y_n)=\mathrm{e}^{-2n\pi}\leqslant 1=f(y_0)$ 及（Ⅰ），得 $y_n\geqslant y_0$．由（Ⅱ）知，当 $x\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ 上为减函数，因此 $g(y_n)\leqslant g(y_0)<g\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$．又由（Ⅱ）知，$f(y_n)+g(y_n)\left(\frac{\pi}{2}-y_n\right)\geqslant 0$，故

$$\frac{\pi}{2}-y_n\leqslant-\frac{f(y_n)}{g(y_n)}=-\frac{\mathrm{e}^{-2n\pi}}{g(y_n)}\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-2n\pi}}{g(y_0)}=\frac{\mathrm{e}^{-2n\pi}}{\mathrm{e}^{y_0}(\sin y_0-\cos y_0)}<\frac{\mathrm{e}^{-2n\pi}}{\sin x_0-\cos x_0}.$$

所以，$2n\pi+\frac{\pi}{2}-x_n<\frac{\mathrm{e}^{-2n\pi}}{\sin x_0-\cos x_0}$．