2019 北京朝阳高三（上）期末

数　　学（理）

2019．1

（考试时间 120 分钟　　满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知集合 $A=\{x\in \mathbf{N} \mid 1\le x\le 3\}$， $B=\{2,3,4,5\}$，则 $A\cup B=$

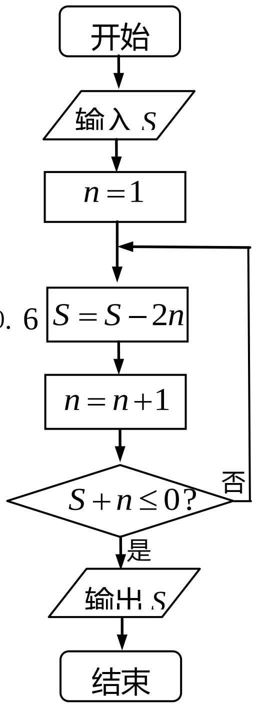
A. $\{2\}$　　B. $\{2,3\}$　　C. $\{2,3,4,5\}$　　D. $\{1,2,3,4,5\}$

2. 设复数 z 满足 $(1-\mathrm{i})z=2\mathrm{i}$，则 $|z|=$

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

3. 执行如图所示的程序框图，若输入的 $S=12$，则输出的 $S=$

A. -8　　B. -18　　C. 5　　D. 6



4. 在平面直角坐标系 xOy 中，过 $A(4,4),B(4,0),C(0,4)$ 三点的圆被 x 轴截得的弦长为

A. 4　　B. $4\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

5. 将函数 $y=\sin 2x$ 的图象向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位后，图象经过点 $(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{2})$，则 φ 的最小值为

A. $\frac{\pi}{12}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

6. 设 x 为实数，则“$x<0$”是“$x+\frac{1}{x}\le -2$”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

A. $(0,\frac{1}{3})$　　B. $[1,3]$　　C. $(1,3)$　　D. $[3,+\infty)$

8. 以棱长为 1 的正方体各面的中心为顶点，构成一个正八面体，再以这个正八面体各面的中心为顶点构成一个小正方体，那么该小正方体的棱长为

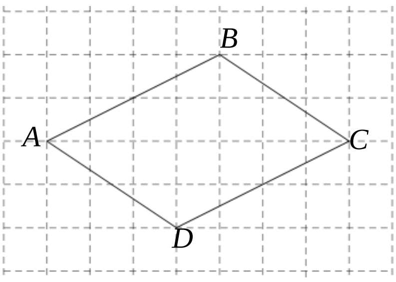
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{1}{4}$

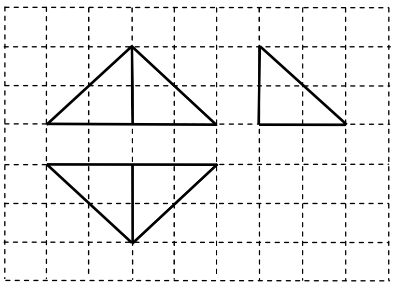
第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在答题卡上．

9. 已知数列$\{a_n\}$为等差数列，S_n为其前n项的和. 若$a_1+a_3=6$，$a_4=7$，则$S_5=$_______.

10. 已知四边形的顶点 A，B，C，D在边长为 1 的正方形网格中的位置如图所示，则$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=$____________.





11. 如图，在边长为 1 的正方形网格中，粗实线表示一个三棱锥的三视图，则该三棱锥的体积为_______________.

12. 过抛物线 $y^2=4x$ 焦点 F 的直线交抛物线于 A,B 两点，分别过 A,B 作准线 l 的垂线，垂足分别为 C,D. 若 $|AF|=4|BF|$，则 $|CD|=$_________________.

13. 2018 年国际象棋奥林匹克团体赛中国男队、女队同时夺冠. 国际象棋中骑士的移动规则是沿着 3×2 格或 2×3 格的对角移动. 在历史上，欧拉、泰勒、哈密尔顿等数学家研究了“骑士巡游”问题：在$8\times8=64$格的黑白相间的国际象棋棋盘上移动骑士，是否可以让骑士从某方格内出发不重复地走遍棋盘上的每一格？

图（一）给出了骑士的一种走法，它从图上标 1 的方格内出发，依次经过标 2, 3, 4, 5, 6, ⋯, 到达标 64 的方格内，不重复地走遍棋盘上的每一格，又可从标 64 的方格内直接走回到标 1 的方格内. 如果骑士的出发点在左下角标 50 的方格内，按照上述走法，_____（填“能”或“不能”）走回到标 50 的方格内.

若骑士限制在图（二）中的 3×4=12 格内按规则移动，存在唯一一种给方格标数字的方式，使得骑士从左上角标 1 的方格内出发，依次不重复经过 2, 3, 4, 5, 6, ⋯, 到达右下角标 12 的方格内，分析图（二）中 A 处所标的数应为____.

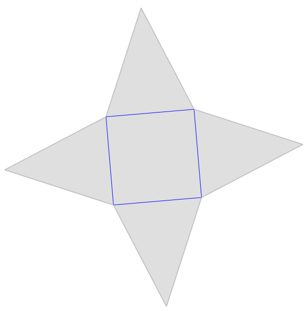
35	38	27	16	29	42	55	18
26	15	36	39	54	17	30	43
37	34	13	28	41	32	19	56
14	25	40	33	20	53	44	31
63	12	21	52	1	8	57	46
24	51	64	9	60	45	2	5
11	62	49	22	7	4	47	58
50	23	10	61	48	59	6	3

图（一）

1			
A			
3			12

图（二）

14. 如图，以正方形的各边为底可向外作四个腰长为 1 的等腰三角形，则阴影部分面积的最大值是___________.



三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15. （本小题满分 13 分）

在 $\triangle ABC$ 中，已知 $A=\dfrac{3\pi}{4}, \cos C=\dfrac{12}{13}$， $BC=13.$

（Ⅰ）求 AB 的长；

（Ⅱ）求 BC 边上的中线 AD 的长.

16. （本小题满分 13 分）

某日 A, B, C 三个城市 18 个销售点的小麦价格如下表：

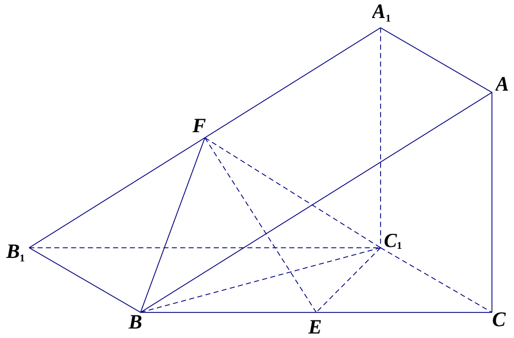
销售点序号	所属城市	小麦价格（元/吨）	销售点序号	所属城市	小麦价格（元/吨）
1	A	2420	10	B	2500
2	C	2580	11	A	2460
3	C	2470	12	A	2460
4	C	2540	13	A	2500
5	A	2430	14	B	2500
6	C	2400	15	B	2450
7	A	2440	16	B	2460
8	B	2500	17	A	2460
9	A	2440	18	A	2540

（Ⅰ）甲以 B 市 5 个销售点小麦价格的中位数作为购买价格，乙从 C 市 4 个销售点中随机挑选 2 个了解小麦价格. 记乙挑选的 2 个销售点中小麦价格比甲的购买价格高的个数为 X，求 X 的分布列及数学期望；

（Ⅱ）如果一个城市的销售点小麦价格方差越大，则称其价格差异性越大. 请你对 A, B, C 三个城市按照小麦价格差异性从大到小进行排序（只写出结果）.

17. （本小题满分 14 分）

如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面 BCC_1B_1 是平行四边形，$BC_1 \perp C_1C$，平面 $A_1C_1CA \perp$ 平面 BCC_1B_1，且 E, F 分别是 BC, A_1B_1 的中点.



（Ⅰ）求证：$EF //$ 平面 A_1C_1CA；

（Ⅱ）当侧面 A_1C_1CA 是正方形，且 $BC_1 = C_1C$ 时，

（ⅰ）求二面角 $F-BC_1-E$ 的大小；

（ⅱ）在线段 EF 上是否存在点 P，使得 $AP \perp EF$？若存在，指出点 P 的位置；若不存在，请说明理由.

18.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=xe^x-\frac{m}{2}(x+1)^2\ (m\geq 0)$.

（Ⅰ）当 $m=0$ 时，求函数 $f(x)$ 的极小值；

（Ⅱ）当 $m>0$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅲ）若函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上有且只有一个零点，求 m 的取值范围.

19.（本小题满分 14 分）

过椭圆 W: $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的左焦点 F_1 作直线 l_1 交椭圆于 A,B 两点，其中 $A\ (0,1)$，另一条过 F_1 的直线 l_2 交椭圆于 C,D 两点（不与 A,B 重合），且 D 点不与点 $(0,-1)$ 重合．过 F_1 作 x 轴的垂线分别交直线 AD，BC 于 E，G．

（Ⅰ）求 B 点坐标和直线 l_1 的方程；

（Ⅱ）求证：$|EF_1|=|F_1G|$.

20.（本小题满分 13 分）

已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 是由正整数组成的无穷数列，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，a_n 满足如下两个条件：

①a_n 是 n 的倍数；

②$|a_n-a_{n+1}|\leq 5$.

（Ⅰ）若 $a_1=30$，$a_2=32$，写出满足条件的所有 a_3 的值；

（Ⅱ）求证：当 $n\geq 11$ 时，$a_n\leq 5n$；

（Ⅲ）求 a_1 所有可能取值中的最大值.

数学试题答案

一、选择题（40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	B	A	A	B	C	B	C

二、填空题（30 分）

题号	9	10	11	12	13		14
答案	25	7	$\frac{8}{3}$	5	能	8	$2+2\sqrt{2}$

三、解答题（80 分）

15. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由 $\cos C=\frac{12}{13}$，$0<C<\frac{\pi}{2}$，所以 $\sin C=\frac{5}{13}$.

由正弦定理得，$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}$，即 $AB=BC\cdot\frac{\sin C}{\sin A}=13\times\frac{\frac{5}{13}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=5\sqrt{2}$. ．……… 6 分

（Ⅱ）在 $\triangle ABD$ 中，$\cos B=\cos(\pi-\frac{3\pi}{4}-C)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos C+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin C=\frac{17\sqrt{2}}{26}$.

由余弦定理得，$AD^2=AB^2+BD^2-2AB\cdot BD\cos B$，

所以 $AD^2=(5\sqrt{2})^2+\frac{169}{4}-2\times5\sqrt{2}\times\frac{13}{2}\times\frac{17\sqrt{2}}{26}=\frac{29}{4}$.

所以 $AD=\frac{\sqrt{29}}{2}$. ……………… 13 分

16. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）B 市共有 5 个销售点，其小麦价格从低到高排列为：2450，2460，2500，2500，2500. 所以中位数为 2500，所以甲的购买价格为 2500.

C 市共有 4 个销售点，其小麦价格从低到高排列为：2400，2470，2540，2580，

故 X 的可能取值为 0，1，2.

$P(X=0)=\frac{C_2^2C_2^0}{C_4^2}=\frac{1}{6}$，　$P(X=1)=\frac{C_2^1C_2^1}{C_4^2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，　$P(X=2)=\frac{C_2^0C_2^2}{C_4^2}=\frac{1}{6}$.

所以分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

所以数学期望 $E(X)=0\times P(X=0)+1\times P(X=1)+2\times P(X=2)=1\times\frac{2}{3}+2\times\frac{1}{6}=1$.

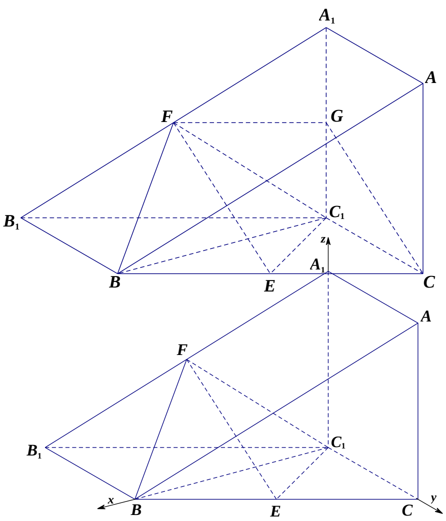
……… 10 分

（Ⅱ）三个城市按小麦价格差异性从大到小排序为：C, A, B ……… 13 分

17. （本小题满分 14 分）

证明：（Ⅰ）取 A_1C_1 中点 G，连 FG，连 GC.

在△ $A_1B_1C_1$ 中，因为 F,G 分别是 A_1B_1, A_1C_1 中点，



所以 $FG//B_1C_1$，且 $FG=\frac{1}{2}B_1C_1$.

在平行四边形 BCC_1B_1 中，因为 E 是 BC 的中点，

所以 $EC//B_1C_1$，且 $EC=\frac{1}{2}B_1C_1$.

所以 $EC//FG$，且 $EC=FG$.

所以四边形 $FECG$ 是平行四边形.

所以 $FE//GC$.

又因为 $FE\not\subset$ 平面 A_1C_1CA，$GC\subset$ 平面 A_1C_1CA，

所以 $EF//$ 平面 A_1C_1CA. …………………4 分

（Ⅱ）因为侧面 A_1C_1CA 是正方形，所以 $A_1C_1\perp C_1C$.

又因为平面 $A_1C_1CA\perp$ 平面 BCC_1B_1，且平面 $A_1C_1CA\cap$ 平面 $BCC_1B_1=C_1C$，

所以 $A_1C_1\perp$ 平面 BCC_1B_1. 所以 $A_1C_1\perp C_1B$.

又因为 $BC_1\perp C_1C$，以 C_1 为原点建立空间直角坐标系 C_1-xyz，如图所示.

设 $C_1C=a$，则 $A(0,a,a), B(a,0,0), C(0,a,0), A_1(0,0,a), B_1(a,-a,0)$，

$E(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0), F(\frac{a}{2},-\frac{a}{2},\frac{a}{2})$.

（ⅰ）设平面 FBC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1B}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1F}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}ax=0,\\ \frac{a}{2}x-\frac{a}{2}y+\frac{a}{2}z=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=0,\\ y=z.\end{cases}$ 令 $y=1$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,1,1)$.

又因为 $A_1C_1\perp$ 平面 BC_1E，所以 $\overrightarrow{C_1A_1}=(0,0,a)$ 是平面 BC_1E 的一个法向量.

所以 $\left|\cos\left\langle\overrightarrow{C_1A_1},\boldsymbol{n}\right\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{C_1A_1}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{C_1A_1}\right|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\left|\frac{a}{a\cdot\sqrt{2}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由图可知，二面角 $F-BC_1-E$ 为钝角，所以二面角 $F-BC_1-E$ 的大小为 $\frac{3\pi}{4}$.

……………10 分

（ⅱ）假设在线段 EF 上存在点 P，使得 $AP\perp EF$.

设 $\frac{EP}{EF}=\lambda,\lambda\in[0,1]$，则 $\overrightarrow{EP}=\lambda\overrightarrow{EF}$.

因为

$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EP}=\overrightarrow{AE}+\lambda\overrightarrow{EF}=(\frac{a}{2},-\frac{a}{2},-a)+\lambda(0,-a,\frac{a}{2})=(\frac{a}{2},-\frac{a}{2}-a\lambda,-a+\frac{a}{2}\lambda)$，

又 $AP\perp EF$，

所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{EF}=\frac{a}{2}\times0+(-\frac{a}{2}-a\lambda)(-a)+(-a+\frac{a}{2}\lambda)\frac{a}{2}=a^2(\frac{1}{4}\lambda+\lambda)=0$.

所以 $\lambda=0\in[0,1]$.

故点 P 在点 E 处时，有 $AP\perp EF$ ……………14 分

18. （本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）当 $m=0$ 时：$f'(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$，令 $f'(x)=0$ 解得 $x=-1$，

又因为当 $x\in(-\infty,-1)$，$f'(x)<0$，函数 $f(x)$ 为减函数；

当 $x\in(-1,+\infty)$，$f'(x)>0$，函数 $f(x)$ 为增函数.

所以，$f(x)$ 的极小值为 $f(-1)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$. ……………3 分

（Ⅱ）$f'(x)=(x+1)(\mathrm{e}^x-m)$.

当 $m>0$ 时，由 $f'(x)=0$，得 $x=-1$ 或 $x=\ln m$.

（ⅰ）若 $m=\frac{1}{\mathrm{e}}$，则 $f'(x)=(x+1)(\mathrm{e}^x-\frac{1}{\mathrm{e}})\geq0$. 故 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增；

（ii）若 $m>\frac{1}{\mathrm{e}}$，则 $\ln m>-1$. 故当 $f'(x)>0$ 时，$x<-1$或$x>\ln m$；

当 $f'(x)<0$ 时，$-1<x<\ln m$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$，$(\ln m,+\infty)$ 单调递增，在 $(-1,\ln m)$ 单调递减.

(iii) 若 $0<m<\frac{1}{\mathrm{e}}$，则 $\ln m<-1$. 故当 $f'(x)>0$ 时，$x<\ln m$ 或 $x>-1$；

当 $f'(x)<0$ 时，$\ln m<x<-1$.

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,\ln m)$，$(-1,+\infty)$ 单调递增，在 $(\ln m,-1)$ 单调递减.

. …………8 分

（III）(1) 当 $m=0$ 时，$f(x)=x\mathrm{e}^x$，令 $f(x)=0$，得 $x=0$. 因为当 $x<0$ 时，$f(x)<0$，

当 $x>0$ 时，$f(x)>0$，所以此时 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上有且只有一个零点.

(2) 当 $m>0$ 时：

（i）当 $m=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，由（II）可知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，且 $f(-1)=-\frac{1}{\mathrm{e}}<0$，$f(1)=\mathrm{e}-\frac{2}{\mathrm{e}}>0$，

此时 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上有且只有一个零点.

（ii）当 $m>\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，由（II）的单调性结合 $f(-1)<0$，又 $f(\ln m)<f(-1)<0$，

只需讨论 $f(1)=\mathrm{e}-2m$ 的符号：

当 $\frac{1}{\mathrm{e}}<m<\frac{\mathrm{e}}{2}$ 时，$f(1)>0$，$f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上有且只有一个零点；

当 $m\ge\frac{\mathrm{e}}{2}$ 时，$f(1)\le 0$，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上无零点.

(iii) 当 $0<m<\frac{1}{\mathrm{e}}$ 时，由（II）的单调性结合 $f(-1)<0$，$f(1)=\mathrm{e}-2m>0$，

$f(\ln m)=-\frac{m}{2}\ln^2 m-\frac{m}{2}<0$，此时 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,1)$ 上有且只有一个零点.

综上所述，$0\le m<\frac{\mathrm{e}}{2}$.　　　　　　　　. …………13 分

19. （本小题满分 14 分）

解：（I）由题意可得直线 l_1 的方程为 $y=x+1$. 与椭圆方程联立, 由 $\begin{cases} y=x+1 \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$

可求 $B(-\frac{4}{3},-\frac{1}{3})$. ……………4 分

（Ⅱ）当 l_2 与 x 轴垂直时，C,D 两点与 E，G 两点重合，由椭圆的对称性，$|EF_1|=|F_1G|$.

当 l_2 不与 x 轴垂直时，

设 $C(x_1,y_1)$，$D(x_2,y_2)$，l_2 的方程为 $y=k(x+1)$（$k\neq 1$）.

由 $\begin{cases} y=k(x+1) \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$ 消去 y，整理得 $(2k^2+1)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$.

则 $x_1+x_2=\frac{-4k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2k^2-2}{2k^2+1}$.

由已知，$x_2\neq 0$，

则直线 AD 的方程为 $y-1=\frac{y_2-1}{x_2}x$，令 $x=-1$，得点 E 的纵坐标 $y_E=\frac{x_2-y_2+1}{x_2}$. 把 $y_2=k(x_2+1)$ 代入得 $y_E=\frac{(x_2+1)(1-k)}{x_2}$.

由已知，$x_1\neq -\frac{4}{3}$，则直线 BC 的方程为 $y+\frac{1}{3}=\frac{y_1+\frac{1}{3}}{x_1+\frac{4}{3}}(x+\frac{4}{3})$，令 $x=-1$，得点 G 的纵坐标

$y_G=\frac{y_1-x_1-1}{3(x_1+\frac{4}{3})}$. 把 $y_1=k(x_1+1)$ 代入得 $y_G=\frac{(x_1+1)(k-1)}{3x_1+4}$.

$$y_E+y_G=\frac{(x_2+1)(1-k)}{x_2}+\frac{(x_1+1)(k-1)}{3x_1+4}=\frac{(1-k)\left[(x_2+1)(3x_1+4)-x_2(x_1+1)\right]}{x_2\cdot(3x_1+4)}$$

$$=\frac{(1-k)\left[2x_1x_2+3(x_1+x_2)+4\right]}{x_2\cdot(3x_1+4)}$$

把 $x_1+x_2=\frac{-4k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2k^2-2}{2k^2+1}$ 代入到 $2x_1x_2+3(x_1+x_2)+4$ 中，

$$2x_1x_2+3(x_1+x_2)+4=2\times\frac{2k^2-2}{2k^2+1}+3\times(\frac{-4k^2}{2k^2+1})+4=0.$$

即 $y_E+y_G=0$，即 $|EF_1|=|F_1G|$. …………14 分

20. （本小题满分 13 分）

（Ⅰ）a_3 的值可取 $27,30,33,36$. …………3 分

（Ⅱ）由 $a_{n+1} \le a_n + 5\ (n=1,2,\cdots)$，对于任意的 n，有 $a_n \le 5(n-1)+a_1$.

当 $n \ge a_1 - 4$ 时，$a_n \le 5(n-1)+a_1$，即 $a_n \le 5(n-1)+n+4$，即 $a_n \le 6n-1$.

则 $a_n < 6n$ 成立.

因为 a_n 是 n 的倍数，所以当 $n \ge a_1 - 4$ 时，有 $a_n \le 5n$ 成立.

若存在 n 使 $a_n > 5n$，依以上所证，这样的 n 的个数是有限的，设其中最大的为 N.

则 $a_N > 5N$，$a_{N+1} \le 5(N+1)$ 成立，因为 a_N 是 N 的倍数，故 $a_N \ge 6N$.

由 $5 \ge a_N - a_{N+1} \ge 6N - 5(N+1) = N-5$，得 $N \le 10$.

因此当 $n \ge 11$ 时，$a_n \le 5n$. …………8 分

（Ⅲ）由上问知 $a_{11} \le 55$，因为 $a_n \le a_{n+1} + 5$ 且 a_n 是 n 的倍数，

所以 $a_{10}, a_9, \cdots, a_1$ 满足下面的不等式：

$a_{10} \le 60$，$a_9 \le 63$，$a_8 \le 64$，$a_7 \le 63$，$a_6 \le 66$，$a_5 \le 70$，$a_4 \le 72$，$a_3 \le 75$，$a_2 \le 80$，$a_1 \le 85$.

则 $a_1=85$，$a_2=80$，$a_3=75$，$a_4=72$，$a_5=70$，$a_6=66$，$a_7=63$，$a_8=64$，

$a_9=63$，$a_{10}=60$，当 $n \ge 11$ 时，$a_n = 5n$ 这个数列符合条件.

故所求 a_1 的最大值为 85. ………13 分