北京市朝阳区高三年级高考练习一

数　学

2020. 4

（考试时间 120 分钟　满分 150 分）

本试卷分为选择题（共 40 分）和非选择题（共 110 分）两部分

考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效.考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回.

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{x\in\mathbf{Z}\,|\,(x-1)(x-4)<0\}$，则 $A\cup B=$

（A）$\{3\}$　　（B）$\{1,3\}$　　（C）$\{1,2,3,5\}$　　（D）$\{1,2,3,4,5\}$

（2）下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

（A）$y=x^3$　　（B）$y=-x^2+1$　　（C）$y=\log_2 x$　　（D）$y=2^{|x|}$

（3）在等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_4=-8$，则 $\{a_n\}$ 的前 6 项和为

（A）-21　　（B）11　　（C）31　　（D）63

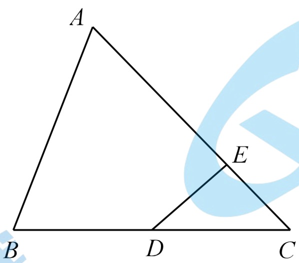
（4）如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D，E 满足 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{CE}$．若 $\overrightarrow{DE}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ $(x,y\in\mathbf{R})$，则 $x+y=$

（A）$-\dfrac{1}{2}$

（B）$-\dfrac{1}{3}$

（C）$\dfrac{1}{2}$

（D）$\dfrac{1}{3}$



（第 4 题图）

（5）已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，准线为 l，点 A 是抛物线 C 上一点，$AD\perp l$ 于 D．

若 $AF=4$，$\angle DAF=60°$，则抛物线 C 的方程为

（A）$y^2=8x$　　（B）$y^2=4x$　　（C）$y^2=2x$　　（D）$y^2=x$

（6）现有甲、乙、丙、丁、戊 5 种在线教学软件，若某学校要从中随机选取 3 种作为教师“停课不停学”的教学工具，则其中甲、乙、丙至多有 2 种被选取的概率为

（A）$\dfrac{2}{3}$　　（B）$\dfrac{2}{5}$　　（C）$\dfrac{3}{5}$　　（D）$\dfrac{9}{10}$

（7）在$\triangle ABC$中，$AB=BC$，$\angle ABC=120°$．若以A，B为焦点的双曲线经过点C，则该双曲线的离心率为

（A）$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{7}}{2}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$　　（D）$\sqrt{3}$

（8）已知函数$f(x)=\sqrt{3}\sin(\omega x-\varphi)\,(\omega>0)$的图象上相邻两个最高点的距离为$\pi$，则“$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$”是“$f(x)$的图象关于直线$x=\dfrac{\pi}{3}$对称”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（9）已知函数$f(x)=\begin{cases}x^2-2ax+2a, & x\le 1,\\ 2x-a\ln x, & x>1.\end{cases}$若关于$x$的不等式$f(x)\ge\dfrac{a}{2}$在$\mathbf{R}$上恒成立，则实数$a$的取值范围为

（A）$(-\infty,2\sqrt{e}]$　　（B）$[0,\dfrac{3}{2}]$　　（C）$[0,2]$　　（D）$[0,2\sqrt{e}]$

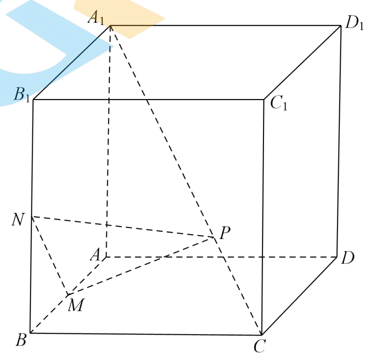
（10）如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M，N分别是棱AB，BB_1的中点，点P在对角线CA_1上运动．当$\triangle PMN$的面积取得最小值时，点P的位置是

（A）线段CA_1的三等分点，且靠近点A_1

（B）线段CA_1的中点

（C）线段CA_1的三等分点，且靠近点C

（D）线段CA_1的四等分点，且靠近点C



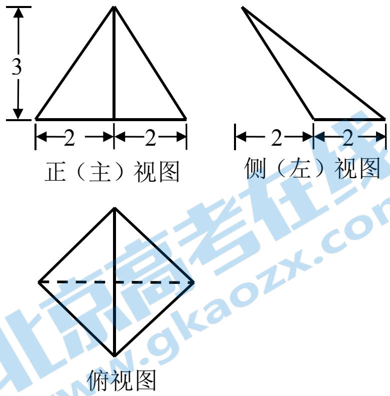
（第 10 题图）

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分。

（11）若复数 $z=\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$，则 $|\bar{z}|=$________.

（12）已知某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的最长棱的长为________，它的体积为________.



（第 12 题图）

（13）某购物网站开展一种商品的预约购买，规定每个手机号只能预约一次，预约后通过摇号的方式决定能否成功购买到该商品．规则如下：（ⅰ）摇号的初始中签率为 0.19；（ⅱ）当中签率不超过 1 时，可借助“好友助力”活动增加中签率，每邀请到一位好友参与“好友助力”活动可使中签率增加 0.05．为了使中签率超过 0.9，则至少需要邀请________位好友参与到“好友助力”活动．

（14）已知函数 $f(x)=x\cos\dfrac{\pi x}{2}$．数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=f(n)+f(n+1)$（$n\in\mathbf{N}^*$），则数列 $\{a_n\}$ 的前 100 项和是________.

（15）数学中有许多寓意美好的曲线，曲线 $C:(x^2+y^2)^3=4x^2y^2$ 被称为“四叶玫瑰线”（如图所示）．

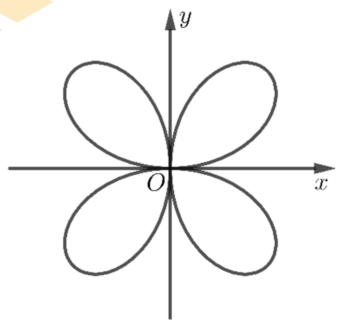
给出下列三个结论：

① 曲线 C 关于直线 $y=x$ 对称；

② 曲线 C 上任意一点到原点的距离都不超过 1；

③ 存在一个以原点为中心、边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形，使得曲线 C 在此正方形区域内（含边界）．

其中，正确结论的序号是________.



（第 15 题图）

注：本题给出的结论中，有多个符合题目要求。全部选对得 5 分，不选或有错选得 0 分，其他得 3 分。

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（16）（本小题 14 分）

在$\triangle ABC$中，$b\sin A = a\cos(B-\frac{\pi}{6})$.

（Ⅰ）求B；

（Ⅱ）若$c=5$，________. 求a.

从①$b=7$， ②$C=\frac{\pi}{4}$这两个条件中任选一个，补充在上面问题中并作答.

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

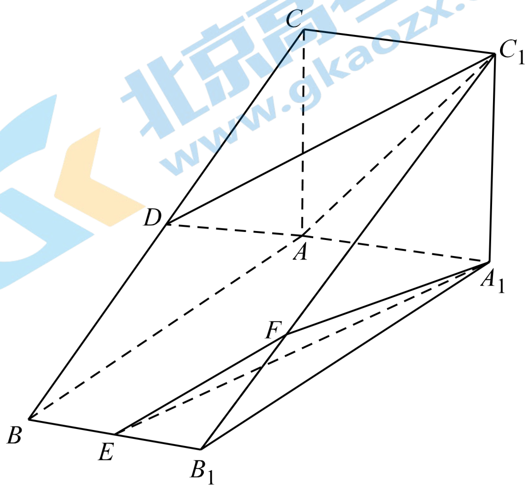
（17）（本小题 14 分）

如图，在三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，平面$ACC_1A_1 \perp$平面ABC，四边形ACC_1A_1是正方形，点D，E分别是棱BC，BB_1的中点，$AB=4$，$AA_1=2$，$BC=2\sqrt{5}$.

（Ⅰ）求证：$AB \perp CC_1$；

（Ⅱ）求二面角$D-AC_1-C$的余弦值；

（Ⅲ）若点F在棱B_1C_1上，且$B_1C_1=4B_1F$，判断平面AC_1D与平面A_1EF是否平行，并说明理由.



（18）（本小题 14 分）

某科研团队研发了一款快速检测某种疾病的试剂盒. 为了解该试剂盒检测的准确性，质检部门从某地区（人数众多）随机选取了80位患者和100位非患者，用该试剂盒分别对他们进行检测，结果如下：

患者的检测结果	人数
阳性	76
阴性	4

非患者的检测结果	人数
阳性	1
阴性	99

（Ⅰ）从该地区患者中随机选取一人，对其检测一次，估计此患者检测结果为阳性的概率；

（Ⅱ）从该地区患者中随机选取 3 人，各检测一次，假设每位患者的检测结果相互独立，以 X 表示检测结果为阳性的患者人数，利用（Ⅰ）中所得概率，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）假设该地区有10万人，患病率为0.01. 从该地区随机选取一人，用该试剂盒对其检测一次. 若检测结果为阳性，能否判断此人患该疾病的概率超过0.5？并说明理由.

（19）（本小题 14 分）

已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，圆 $O:x^2+y^2=r^2$（O 为坐标原点）. 过点 $(0,b)$ 且斜率为1的直线与圆 O 交于点 $(1,2)$，与椭圆 C 的另一个交点的横坐标为 $-\dfrac{8}{5}$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程和圆 O 的方程；

（Ⅱ）过圆 O 上的动点 P 作两条互相垂直的直线 l_1，l_2，若直线 l_1 的斜率为 $k(k\neq 0)$ 且 l_1 与椭圆 C 相切，试判断直线 l_2 与椭圆 C 的位置关系，并说明理由.

（20）（本小题 15 分）

已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-\dfrac{x+1}{x-1}$.

（Ⅰ）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）判断函数 $f(x)$ 的零点的个数，并说明理由；

（Ⅲ）设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点，证明曲线 $y=\mathrm{e}^{x}$ 在点 (x_0,e^{x_0}) 处的切线也是曲线 $y=\ln x$ 的切线.

（21）（本小题 14 分）

设数列 $A:a_1,a_2,\ldots,a_n$（$n\geq 3$）的各项均为正整数，且 $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n$．若对任意 $k\in\{3,4,\cdots,n\}$，存在正整数 $i,j(1\leq i\leq j<k)$ 使得 $a_k=a_i+a_j$，则称数列 A 具有性质 T.

（Ⅰ）判断数列 $A_1:1,2,4,7$ 与数列 $A_2:1,2,3,6$ 是否具有性质 T；（只需写出结论）

（Ⅱ）若数列 A 具有性质 T，且 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_n=200$，求 n 的最小值；

（Ⅲ）若集合 $S=\{1,2,3,\cdots,2019,2020\}=S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4\cup S_5\cup S_6$，且 $S_i\cap S_j=\varnothing$（任意 $i,j\in\{1,2,\cdots,6\}$，$i\neq j$）．求证：存在 S_i，使得从 S_i 中可以选取若干元素（可重复选取）组成一个具有性质 T 的数列.

北京市朝阳区高三年级高考练习一

数学参考答案

2020.4

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题（共10小题，每小题4分，共40分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

(1)C	(2)D	(3)A	(4)B	(5)B
(6)D	(7)C	(8)A	(9)C	(10)B

第二部分（非选择题 共110分）

二、填空题（共5小题，每小题5分，共25分）

(11) $\sqrt{2}$　　(12) 5:4　　(13) 15

(14) 100　　(15) ①②

三、解答题（共6小题，共85分.解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程）

(16)（本小题14分）

解：（Ⅰ）因为 $b\sin A=a\cos(B-\frac{\pi}{6})$，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以 $\sin B\sin A=\sin A\cos(B-\frac{\pi}{6})$.

又因为 $\sin A\neq 0$，所以 $\sin B=\cos(B-\frac{\pi}{6})$，即 $\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B+\frac{1}{2}\sin B$.

所以 $\sin(B-\frac{\pi}{3})=0$.

又因为 $-\frac{\pi}{3}<B-\frac{\pi}{3}<\frac{2\pi}{3}$，所以 $B-\frac{\pi}{3}=0$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$.

（Ⅱ）若选① $b=7$，则在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

得 $a^2-5a-24=0$，解得 $a=8$ 或 $a=-3$（舍）.所以 $a=8$.

若选② $C=\frac{\pi}{4}$，则 $\sin A=\sin(B+C)=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

得 $\frac{a}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}=\frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$，解得 $a=\frac{5\sqrt{3}+5}{2}$.

所以 $a=\frac{5\sqrt{3}+5}{2}$. ………………………………………… 14分

(17)（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为四边形 ACC_1A_1 是正方形，

所以 $CC_1\perp AC$.

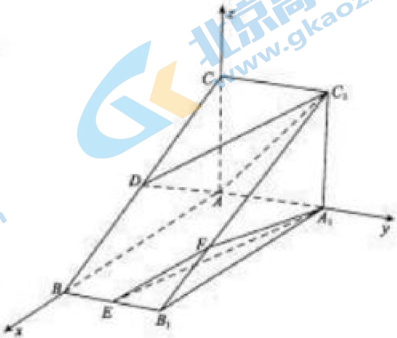
又因为平面 $ABC\perp$ 平面 ACC_1A_1，

平面 $ABC\cap$ 平面 $ACC_1A_1=AC$，

所以 $CC_1\perp$ 平面 ABC.

又因为 $AB\subset$ 平面 ABC，

所以 $AB\perp CC_1$.



（Ⅱ）由（Ⅰ）知，$CC_1\perp AB$，$AA_1/\!/CC_1$，

所以 $AA_1\perp AB$.

又 $AB=4$，$AC=AA_1=2$，$BC=2\sqrt{5}$，

所以 $AB^2+AC^2=BC^2$.

所以 $AC\perp AB$.

如图，以 A 为原点，建立空间直角坐标系 $A-xyz$.

所以 $A(0,0,0)$，$B(4,0,0)$，$C(0,0,2)$，$A_1(0,2,0)$.

则有 $D(2,0,1)$，$C_1(0,2,2)$，$E(4,1,0)$.

平面 ACC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{u}=(1,0,0)$.

设平面 AC_1D 的一个法向量为 $\boldsymbol{v}=(x,y,z)$，

又 $\overrightarrow{AD}=(2,0,1)$，$\overrightarrow{AC_1}=(0,2,2)$，

由 $\begin{cases}\boldsymbol{v}\cdot\overrightarrow{AD}=0,\\ \boldsymbol{v}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0.\end{cases}$ 得 $\begin{cases}2x+z=0,\\ 2y+2z=0.\end{cases}$

令 $x=1$，则 $z=-2$，$y=2$.所以 $\boldsymbol{v}=(1,2,-2)$.

设二面角 $D-AC_1-C$ 的平面角为 θ，则 $|\cos\theta|=\dfrac{|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}=\dfrac{1}{1\times3}=\dfrac{1}{3}$.

由题知，二面角 $D-AC_1-C$ 为锐角，所以其余弦值为 $\dfrac{1}{3}$.

（Ⅲ）平面 AC_1D 与平面 A_1EF 不平行.理由如下：

由（Ⅱ）知，平面 AC_1D 的一个法向量为 $\boldsymbol{v}=(1,2,-2)$，$\overrightarrow{A_1E}=(4,-1,0)$，

所以 $\overrightarrow{A_1E}\cdot\boldsymbol{v}=2\neq0$，所以 A_1E 与平面 AC_1D 不平行.

又因为 $A_1E\subset$ 平面 A_1EF，

所以平面 AC_1D 与平面 A_1EF 不平行.…………………………………………… 14 分

(18)(本小题 14 分)

(Ⅰ)由题意知,80 位患者中有 76 位用该试剂盒检测一次,结果为阳性.

所以从该地区患者中随机选取一位,用该试剂盒检测一次,结果为阳性的概率估计为

$\frac{76}{80}=\frac{19}{20}$.

(Ⅱ)由题意可知 $X\sim B(n,p)$,其中 $n=3,p=\frac{19}{20}$.

X 的所有可能的取值为 0,1,2,3.

$P(X=0)=C_3^0(\frac{19}{20})^0\times(\frac{1}{20})^3=\frac{1}{8000}$,

$P(X=1)=C_3^1(\frac{19}{20})^1\times(\frac{1}{20})^2=\frac{57}{8000}$,

$P(X=2)=C_3^2(\frac{19}{20})^2\times(\frac{1}{20})^1=\frac{1083}{8000}$,

$P(X=3)=C_3^3(\frac{19}{20})^3\times(\frac{1}{20})^0=\frac{6859}{8000}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8000}$	$\frac{57}{8000}$	$\frac{1083}{8000}$	$\frac{6859}{8000}$

故 X 的数学期望 $E(X)=np=\frac{57}{20}$.

(Ⅲ)此人患该疾病的概率未超过 0.5.理由如下:

由题意得,如果该地区所有人用该试剂盒检测一次,那么结果为阳性的人数为

$99000\times\frac{1}{100}+1000\times\frac{19}{20}=990+950=1940$,其中患者人数为 950.

若某人检测结果为阳性,那么他患该疾病的概率为 $\frac{950}{1940}<\frac{970}{1940}=0.5$.

所以此人患该疾病的概率未超过 0.5. ………………………………………… 14 分

(19)(本小题 14 分)

解:(Ⅰ)因为圆 O 过点(1,2),所以圆 O 的方程为:$x^2+y^2=5$.

因为过点$(0,b)$且斜率为 1 的直线方程为 $y=x+b$,

又因为过点(1,2),所以 $b=1$.

因为直线与椭圆相交的另一个交点坐标为$(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5})$,

所以$\frac{(-\frac{8}{5})^2}{a^2}+\frac{(-\frac{3}{5})^2}{1}=1$,解得 $a^2=4$.

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

(Ⅱ)直线 l_2 与椭圆 C 相切,理由如下:

设圆 O 上动点 $P(x_0,y_0)(x_0\neq\pm2)$,所以 $x_0^2+y_0^2=5$.

依题意,设直线 $l_1:y-y_0=k(x-x_0)$.

由$\begin{cases}x^2+4y^2=4,\\y=kx+(y_0-kx_0)\end{cases}$得$(1+4k^2)x^2+8k(y_0-kx_0)x+4(y_0-kx_0)^2-4=0$.

因为直线 l_1 与椭圆 C 相切,

所以 $\Delta=[8k(y_0-kx_0)]^2-4(1+4k^2)[4(y_0-kx_0)^2-4]=0$.

所以 $1+4k^2=(y_0-kx_0)^2$.所以$(4-x_0^2)k^2+2x_0y_0k+(1-y_0^2)=0$.

因为 $x_0^2+y_0^2=5$,所以 $4-x_0^2=y_0^2-1$.

所以$(y_0^2-1)k^2+2x_0y_0k+(1-y_0^2)=0$.

设直线 $l_2:y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0)$,

由$\begin{cases}x^2+4y^2=4,\\y-y_0=-\frac{1}{k}(x-x_0),\end{cases}$

得$(1+\frac{4}{k^2})x^2-\frac{8}{k}(y_0+\frac{x_0}{k})x+4(y_0+\frac{x_0}{k})^2-4=0$.

$$\Delta_1=16[(4-x_0^2)(-\frac{1}{k})^2+2x_0y_0(-\frac{1}{k})+(1-y_0^2)]$$

$$=\frac{16}{k^2}[(4-x_0^2)-2kx_0y_0+(1-y_0^2)k^2]$$

$$=\frac{16}{k^2}[(y_0^2-1)-2kx_0y_0+(1-y_0^2)k^2]$$

$$=-\frac{16}{k^2}[(y_0^2-1)k^2+2kx_0y_0+(1-y_0^2)]=0.$$

所以直线 l_2 与椭圆 C 相切. ………………………………………………………… 14 分

(20)(本小题 15 分)

解:(Ⅰ)因为 $f(x)=e^x-\frac{x+1}{x-1}$,

所以 $f(0)=e^0-\frac{0+1}{0-1}=2$, $f'(x)=e^x+\frac{2}{(x-1)^2}$, $f'(0)=e^0+\frac{2}{(0-1)^2}=3$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线的方程为 $3x-y+2=0$.

(Ⅱ)函数 $f(x)$ 有且仅有两个零点.理由如下:

$f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\in\mathbf{R},x\neq1\}$.

因为 $f'(x)=e^x+\frac{2}{(x-1)^2}>0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上均单调递增.

因为 $f(0)=2>0$, $f(-2)=e^{-2}-\frac{1}{3}<0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,1)$ 上有唯一零点 x_1.

因为 $f(2)=e^2-3>0$, $f(\frac{5}{4})=e^{\frac{5}{4}}-9<0$,

所以 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有唯一零点 x_2.

综上,$f(x)$ 有且仅有两个零点.

(Ⅲ)曲线 $y=e^x$ 在点 (x_0,e^{x_0}) 处的切线方程为 $y-e^{x_0}=e^{x_0}(x-x_0)$,

即 $y=e^{x_0}x-x_0e^{x_0}+e^{x_0}$.

设曲线 $y=\ln x$ 在点 (x_3,y_3) 处的切线斜率为 e^{x_0},

则 $e^{x_0}=\frac{1}{x_3}$, $x_3=\frac{1}{e^{x_0}}$, $y_3=-x_0$,即切点为 $(\frac{1}{e^{x_0}},-x_0)$.

所以曲线 $y=\ln x$ 在点 $(\frac{1}{e^{x_0}},-x_0)$ 处的切线方程为

$y+x_0=e^{x_0}(x-\frac{1}{e^{x_0}})$,即 $y=e^{x_0}x-x_0-1$.

因为 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点,所以 $e^{x_0}=\frac{x_0+1}{x_0-1}$.

所以 $-x_0e^{x_0}+e^{x_0}=e^{x_0}(1-x_0)=\frac{x_0+1}{x_0-1}(1-x_0)=-1-x_0$.

所以这两条切线重合.

所以结论成立. ………………………………………………………………………… 15 分

(21)(本小题 14 分)

解:(Ⅰ)数列 A_1 不具有性质 T;数列 A_2 具有性质 T.

(Ⅱ)由题可知 $a_2=2$, $a_3\leq 2a_2=4$, $a_4\leq 2a_3\leq 8$, $\cdots$, $a_8\leq 2a_7\leq 128$,

所以 $n\geq 9$.

若 $n=9$,因为 $a_9=200$ 且 $a_9\leq 2a_8$,所以 $128\geq a_8\geq 100$.

同理,$64\geq a_7\geq 50$, $32\geq a_6\geq 25$, $16\geq a_5\geq 12.5$, $8\geq a_4\geq 6.25$, $4\geq a_3\geq 3.125$.

因为数列各项均为正整数,所以 $a_3=4$.所以数列前三项为 1,2,4.

因为数列 A 具有性质 T,a_4 只可能为 4,5,6,8 之一,而又因为 $8\geq a_4\geq 6.25$,

所以 $a_4=8$.

同理,有 $a_5=16$, $a_6=32$, $a_7=64$, $a_8=128$.

此时数列为 1,2,4,8,16,32,64,128,200.

但数列中不存在 $1\leq i\leq j<9$ 使得 $200=a_i+a_j$,所以该数列不具有性质 T.

所以 $n\geq 10$.

当 $n=10$ 时,取 A:1,2,4,8,16,32,36,64,100,200.(构造数列不唯一)

经验证,此数列具有性质 T.

所以,n 的最小值为 10.

(Ⅲ)反证法:假设结论不成立,即对任意 $S_i(i=1,2,\cdots,6)$ 都有:

若正整数 $a,b\in S_i$, $a<b$,则 $b-a\notin S_i$.

否则,当 $a<b-a$ 时,$a,b-a,b$ 是一个具有性质 T 的数列;

当 $a>b-a$ 时,$b-a,a,b$ 是一个具有性质 T 的数列;

当 $a=b-a$ 时,a,a,b 是一个具有性质 T 的数列.

(ⅰ)由题意可知,这 6 个集合中至少有一个集合的元素个数不少于 337 个,不妨设

此集合为 S_1,从 S_1 中取出 337 个数,记为 $a_1,a_2,\cdots,a_{337}$,且 $a_1<a_2<\cdots<a_{337}$.

令集合 $N_1=\{a_{337}-a_i\mid i=1,2,\cdots,336\}\subseteq S$.

由假设,对任意 $i=1,2,\cdots,336$, $a_{337}-a_i\notin S_1$,所以 $N_1\subseteq S_2\cup S_3\cup S_4\cup S_5\cup S_6$.

(ⅱ)在 S_2,S_3,S_4,S_5,S_6 中至少有一个集合包含 N_1 中的至少 68 个元素，不妨设这个集合为 S_2，从 $S_2\cap N_1$ 中取出 68 个数，记为 $b_1,b_2,\cdots,b_{68}$，且 $b_1<b_2<\cdots<b_{68}$.

令集合 $N_2=\{b_{68}-b_i\mid i=1,2,\cdots,67\}\subseteq S$.

由假设 $b_{68}-b_i\notin S_2$.

对任意 $k=1,2,\cdots,68$，存在 $i_k\in\{1,2,\cdots,336\}$ 使得 $b_k=a_{337}-a_{i_k}$.

所以对任意 $i=1,2,\cdots,67$，$b_{68}-b_i=(a_{337}-a_{i_{68}})-(a_{337}-a_{i_i})=a_{i_i}-a_{i_{68}}$，

由假设 $a_{i_i}-a_{i_{68}}\notin S_1$，所以 $b_{68}-b_i\notin S_1$，所以 $b_{68}-b_i\notin S_1\cup S_2$，

所以 $N_2\subseteq S_3\cup S_4\cup S_5\cup S_6$.

(ⅲ)在 S_3,S_4,S_5,S_6 中至少有一个集合包含 N_2 中的至少 17 个元素，不妨设这个集合为 S_3，从 $S_3\cap N_2$ 中取出 17 个数，记为 $c_1,c_2,\cdots,c_{17}$，且 $c_1<c_2<\cdots<c_{17}$.

令集合 $N_3=\{c_{17}-c_i\mid i=1,2,\cdots,16\}\subseteq S$.

由假设 $c_{17}-c_i\notin S_3$.

对任意 $k=1,2,\cdots,17$，存在 $i_k\in\{1,2,\cdots,67\}$ 使得 $c_k=b_{68}-b_{i_k}$.

所以对任意 $i=1,2,\cdots,16$，$c_{17}-c_i=(b_{68}-b_{i_{17}})-(b_{68}-b_{i_i})=b_{i_i}-b_{i_{17}}$，

同样，由假设可得 $b_{i_i}-b_{i_{17}}\notin S_1\cup S_2$，所以 $c_{17}-c_i\notin S_1\cup S_2\cup S_3$，

所以 $N_3\subseteq S_4\cup S_5\cup S_6$.

(ⅳ)类似地，在 S_4,S_5,S_6 中至少有一个集合包含 N_3 中的至少 6 个元素，

不妨设这个集合为 S_4，从 $S_4\cap N_3$ 中取出 6 个数，记为 $d_1,d_2,\cdots,d_6$，

且 $d_1<d_2<\cdots<d_6$，则 $N_4=\{d_6-d_i\mid i=1,2,\cdots,5\}\subseteq S_5\cup S_6$.

(ⅴ)同样，在 S_5,S_6 中至少有一个集合包含 N_4 中的至少 3 个元素，

不妨设这个集合为 S_5，从 $S_5\cap N_4$ 中取出 3 个数，记为 e_1,e_2,e_3，且 $e_1<e_2<e_3$，

同理可得 $N_5=\{e_3-e_1,e_3-e_2\}\subseteq S_6$.

(ⅵ)由假设可得 $e_2-e_1=(e_3-e_1)-(e_3-e_2)\notin S_6$.

同上可知，$e_2-e_1\notin S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4\cup S_5$，

而又因为 $e_2-e_1\in S$，所以 $e_2-e_1\in S_6$，矛盾.

所以假设不成立.

所以原命题得证. ·· 14 分

关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。

北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯（ID：bj-gaokao）

扫码关注获取更多