数学

全卷满分 150 分，考试时间 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、班级、考场号、座位号、考生号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

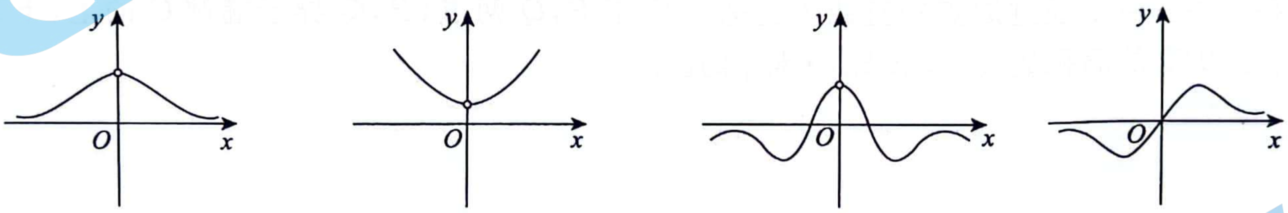
1. 已知 $a\in\mathbf{R}$，复数 $z=a+2i$，z^2-2z 是实数，则 $|z|=$ （　　）

A. 5　　B. 10　　C. $\sqrt{5}$　　D. $\sqrt{10}$

2. 已知全集 $I=\mathbf{R}$，$M=\{x\,|\,x<1\}$，$N=\{x\,|\,\log_2 x<1\}$，则 $(\complement_I M)\cap N=$ （　　）

A. $[1,+\infty)$　　B. $[1,2)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(1,2)$

3. 函数 $f(x)=\dfrac{3x}{e^x-e^{-x}}$ 的大致图象是 （　　）



A　　B　　C　　D

4. 已知 $x=\dfrac{\pi}{3}$，$x=\pi$ 是函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{3\pi}{2}\right)$ 图象上两条相邻的对称轴，则 $\varphi=$ （　　）

A. π　　B. $\dfrac{3\pi}{4}$　　C. $\dfrac{2\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{3}$

5. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-6x+18}$，则 （　　）

A. $f(x)$是偶函数　　B. $f(x)$是奇函数

C. $f(x)$的图象关于直线 $x=3$ 对称　　D. $f(x)$的图象关于点$(3,1)$成中心对称

6. 毕业典礼上，某班有 a,b,c,d,e,f 六人站一排照相，要求 a,b 两人均不在排头，且 e,f 两人不相邻，则不同的排法种数为 （　　）

A. 160　　B. 288　　C. 336　　D. 480

7. 已知抛物线 $y^2=8x$ 的焦点为F，点 $M(-2,2)$，过 F 的直线 l 垂直于MF，且 l 交抛物线于A,B 两点，则 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=$ （　　）

A. 3　　B. 2　　C. 1　　D. 0

8. 在正四棱锥 $P-ABCD$ 中，$AB=2$，E,F,G 分别为 AB,PC,AD 的中点，直线 BF 与 EG 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，则三棱锥 $P-EFG$ 的体积为（　　）

A. $\frac{5\sqrt{2}}{12}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{6}$

二、选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. 已知 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，满足 $a>b>c>d>0$，则（　　）

A. $\sin a>\sin b$　　B. $a-\sin a>b-\sin b$

C. $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$　　D. $ad+bc>ab+cd$

10. 已知 $\theta\in(0,2\pi)$，O 为坐标原点，θ 终边上有一点 $M\left(\sin\frac{3\pi}{8}-\cos\frac{3\pi}{8},\sin\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}\right)$，则（　　）

A. $\theta=\frac{3\pi}{8}$　　B. $|OM|=\sqrt{2}$　　C. $\tan\theta<1$　　D. $\cos\theta>\frac{1}{2}$

11. 已知在等边三角形 ABC 中，$AB=2$，D 为 AC 的中点，E 为 BD 的中点，延长 CE 交 AB 于点 F，则（　　）

A. $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$　　B. $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$

C. $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}$　　D. $S_{\triangle DEC}=2S_{\triangle BEF}$

12. 若数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1,a_{n+1}=\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}$（$n$ 为正整数），S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，则（　　）

A. $a_2=1$　　B. $a_{2\,024}=1\,012$

C. $S_n=\frac{n(n+1)}{4}$　　D. $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}<3$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知双曲线$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{m^2+4}=1(m>0)$的离心率为 2，则实数 $m=$________.

14. 已知 $f(x)=\log_a x+\log_{a+2}x\ (0<a<1)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的减函数，则实数 a 的取值范围是________.

15. 已知一个圆台内切球的半径为$\sqrt{2}$，圆台的表面积为 14π，则这个圆台的体积为________.

16. 现有一组数据：$1,2,2,3,3,3,4,4,4,4,\cdots,\underbrace{n,n,\cdots,n}_{n个n},\cdots$，共 200 项，$S(x)=\sum_{i=1}^{200}(x-x_i)^2$（$x_i$ 是这一组数据的第 i 项），有以下结论：①这组数据的极差为 19；②这组数据的中位数为 14；③这组数据的平均数为 13.5；④$S(13)<S(14)$.

其中正确结论的个数为________.（参考公式：$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$）

四、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（10 分）

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=a_2=0$，且$\{a_n+n\}$为等比数列，$n\in\mathbf{N}^*$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

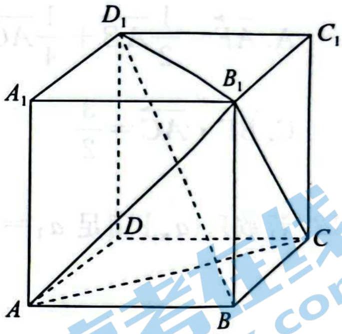
(2)求满足$a_1+a_2+\cdots+a_n<2\ 024$的最大整数$n$.

18.（12 分）

在直四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，四边形$ABCD$是菱形，$AB=2$，$\angle DAB=60°$，$BD_1\perp$平面AB_1C.

(1)求AA_1；

(2)求二面角$B-B_1C-A$的正弦值.

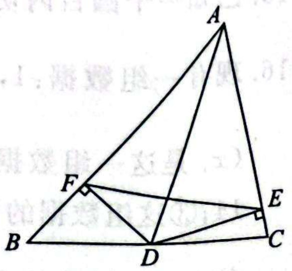


19.（12 分）

在$\triangle ABC$中，$\angle BAC=60°$，$\triangle ABC$的面积为$10\sqrt{3}$，D为BC的中点，$DE\perp AC$于点E，$DF\perp AB$于点F.

(1)求$\triangle DEF$的面积；

(2)若$AD=\frac{\sqrt{129}}{2}$，求$\sin\angle ABC+\sin\angle ACB$的值.



20.(12 分)

某地乒乓球协会在年龄 55 岁～65 岁的乒乓球运动爱好者中，进行一次"快乐乒乓"比赛，3 人一组先进行预赛，选出 1 名参赛人员进入正式比赛. 已知甲、乙、丙在同一组，抽签确定第一轮比赛次序为：甲对乙、甲对丙、乙对丙，先累计获胜 2 场的选手，进入正式比赛. 若前三场比赛甲、乙、丙各胜负一场，则根据抽签确定由甲、乙加赛一场，胜者参加正式比赛.

已知甲胜乙、甲胜丙、乙胜丙的概率分别为 $\frac{3}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{1}{2}$，各场比赛互不影响且无平局.

(1)求甲进入正式比赛的概率；

(2)若比赛进行了四场结束，记甲获胜的场数为 X，求 X 的分布列与数学期望.

21.(12 分)

已知 A，B 是椭圆 C 上的两点，$A(2,1)$，A，B 关于原点 O 对称，M 是椭圆 C 上异于 A，B 的一点，直线 MA 和 MB 的斜率满足 $k_{MA}\cdot k_{MB}=-\frac{1}{2}$.

(1)求椭圆 C 的标准方程；

(2)若斜率存在且不经过原点的直线 l 交椭圆 C 于 P，Q 两点(P，Q 异于椭圆 C 的上、下顶点)，当△OPQ 的面积最大时，求 $k_{OP}\cdot k_{OQ}$ 的值.

22.(12 分)

已知函数 $f(x)=e^x\ln(a+x)-x$，$f'(0)=0$.

(1)求实数 a 的值；

(2)证明：$x>\ln 4$ 时，$f(x)>x^2$.

数学答案

1. C 【解析】$z^2-2z=(a+2i)^2-2(a+2i)=a^2-4+4ai-2(a+2i)=a^2-2a-4+(4a-4)i\in\mathbf{R}$,故 $4a-4=0$,解得 $a=1$,故 $|z|=\sqrt{5}$. 故选 C.

2. B 【解析】$\complement_I M=\{x\,|\,x\geqslant 1\}$,$N=\{x\,|\,0<x<2\}$,故 $(\complement_I M)\cap N=[1,2)$. 故选 B.

3. A 【解析】由 $f(-x)=f(x)$ 可知 $f(x)$ 是偶函数,排除选项 D;
当 $x>0$ 时,$e^x>1>e^{-x}$,$\therefore e^x-e^{-x}>0$,$\therefore f(x)>0$,排除选项 C;
当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)\to 0$. 故选 A.

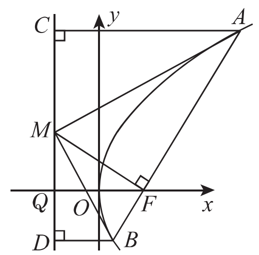
4. A 【解析】$\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{T}{2}=\frac{2\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{\omega}$,故 $\omega=\frac{3}{2}$,故 $f(x)=\sin\left(\frac{3}{2}x+\varphi\right)$,当 $x=\frac{\pi}{3}$ 时,$\frac{3}{2}\times\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,故 $\varphi=k\pi(k\in\mathbf{Z})$,又 $\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{3\pi}{2}$,故 $\varphi=\pi$. 故选 A.

5. D 【解析】由 $f(-x)=\frac{x^2}{x^2+6x+18}$,易知选项 A,B 不正确;易得 $f(2)=\frac{2}{5}$,$f(4)=\frac{8}{5}$,故 $f(2)\neq f(4)$,故选项 C 不正确;$f(x)=\frac{x^2}{(x-3)^2+9}$,故 $f(6-x)+f(x)=\frac{(6-x)^2}{(3-x)^2+9}+\frac{x^2}{(x-3)^2+9}=\frac{2x^2-12x+36}{(x-3)^2+9}=2$,故 $f(x)$ 的图象关于点 $(3,1)$ 中心对称. 故选 D.

6. C 【解析】e,f 不相邻的排法种数为 $A_4^4A_5^2=480$,其中 a 或 b 在排头的排法种数为 $C_2^1A_3^3A_4^2=144$,故不同的排法种数为 $480-144=336$. 故选 C.

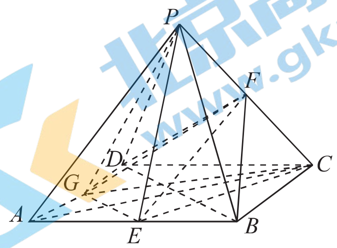
7. D 【解析】(方法 1)易知焦点 $F(2,0)$,故 $k_{MF}=-\frac{1}{2}$,则 $k_{AB}=2$,故直线 AB 的方程为 $y=2(x-2)=2x-4$,代入 $y^2=8x$ 得,$y^2-4y-16=0$,
设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=4$,$y_1y_2=-16$,
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=(x_1+2,y_1-2)\cdot(x_2+2,y_2-2)=\left(\frac{y_1^2}{8}+2\right)\left(\frac{y_2^2}{8}+2\right)+(y_1-2)(y_2-2)=\frac{(y_1y_2)^2}{64}+\frac{1}{4}(y_1^2+y_2^2)+4+y_1y_2-2(y_1+y_2)+4=\frac{(y_1y_2)^2}{64}+\frac{1}{4}(y_1+y_2)^2+\frac{1}{2}y_1y_2-2(y_1+y_2)+8=\frac{(-16)^2}{64}+\frac{1}{4}\times 4^2+\frac{1}{2}\times(-16)-2\times 4+8=0$. 故选 D.

(方法 2)设点 A,B 在准线上的射影分别为点 C,D,如图,



易知 $|AF|=|AC|$,$|AM|=|AM|$,$\angle ACM=\angle AFM=90^\circ$,则 $\text{Rt}\triangle AFM\cong\text{Rt}\triangle ACM$,则 $\angle CMA=\angle FMA$,同理 $\text{Rt}\triangle BFM\cong\text{Rt}\triangle BDM$,则 $\angle DMB=\angle FMB$,由此可得 $\angle AMB=90^\circ$,故 $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$. 故选 D.

8. B 【解析】连接 BD,DF,如图,



设 $BF=DF=x$,由 $BD/\!/EG$,得 $\angle FBD$ 即为 BF 与 EG 所成的角,在 $\triangle FBD$ 中,易知 $BD=2\sqrt{2}$,$\cos\angle FBD=\frac{x^2+8-x^2}{4\sqrt{2}x}=\frac{\sqrt{6}}{3}$,解得 $x=\sqrt{3}$. 设 $PB=PC=y$,在 $\triangle PFB$ 中,$\left(\frac{y}{2}\right)^2+3-2\sqrt{3}\cdot\frac{y}{2}\cos\angle PFB=y^2$,在 $\triangle BCF$ 中,$\left(\frac{y}{2}\right)^2+3-2\sqrt{3}\cdot\frac{y}{2}\cos\angle BFC=4$,两式相加求得 $y=2$. 因为 F 为 PC 的中点,故 $V_{P\text{-}EFG}=V_{C\text{-}EFG}=V_{F\text{-}ECG}$,在等腰直角三角

形 PAC 中，易求得 P 到 AC 的距离即 P 到底面的距离为$\sqrt{2}$，故 F 到平面 CEG 的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，$S_{\triangle ECG}=S_{ABCD}-S_{\triangle AEG}-S_{\triangle CDG}-S_{\triangle CEB}=4-\frac{1}{2}-1-1=\frac{3}{2}$，故所求三棱锥的体积为$\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

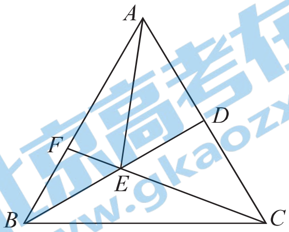
故选 B.

9. BC 【解析】取 $a=\pi,b=\frac{\pi}{2}$，则 $\sin a<\sin b$，故 A 错误；构造函数 $f(x)=x-\sin x(x>0)$，则 $f'(x)=1-\cos x\geqslant0$，故 $f(x)$为增函数，故 $f(a)>f(b)$，即 $a-\sin a>b-\sin b$，故 B 正确；$c>d>0$，故$\frac{1}{d}>\frac{1}{c}>0$与 $a>b>0$ 两式相乘得$\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$，故 C 正确；$ad+bc-(ab+cd)=a(d-b)+c(b-d)=(d-b)(a-c)<0$，故 D 错误. 故选 BC.

10. AB 【解析】$\tan\theta=\dfrac{\sin\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}}{\sin\frac{3\pi}{8}-\cos\frac{3\pi}{8}}=\dfrac{\tan\frac{3\pi}{8}+1}{\tan\frac{3\pi}{8}-1}=-\tan\frac{5\pi}{8}=\tan\frac{3\pi}{8}$，故 $\theta=\frac{3\pi}{8}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，又 $\sin\frac{3\pi}{8}-\cos\frac{3\pi}{8}>0$，$\sin\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}>0$，故 θ 是第一象限角，又 $\theta\in(0,2\pi)$，故 $\theta=\frac{3\pi}{8}$，故 A 正确；$|OM|^2=\left(\sin\frac{3\pi}{8}-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2+\left(\sin\frac{3\pi}{8}+\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2=2$，故 $|OM|=\sqrt{2}$，故 B 正确；$\tan\theta=\tan\frac{3\pi}{8}>\tan\frac{\pi}{4}=1$，故 C 错误；$\cos\theta=\cos\frac{3\pi}{8}<\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，故 D 错误.

故选 AB.

11. AB 【解析】如图，



$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，故 A 正确；设 $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AF}$，则 $\overrightarrow{AE}=\frac{k}{2}\overrightarrow{AF}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，又 E,F,C 三点在一条直线上，故$\frac{k}{2}+\frac{1}{4}=1$，故 $k=\frac{3}{2}$，即 $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{FB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$，故 $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{FB}$，故 B 正确；$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$，故 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC})=\frac{1}{4}\times(-2+2)=0$，故 C 错误；$S_{\triangle DEC}=S_{\triangle BEC}=\frac{1}{2}S_{\triangle BDC}=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle BEF}=S_{\triangle FBC}-S_{\triangle BEC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}-\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}=\frac{1}{12}S_{\triangle ABC}$，故 $S_{\triangle DEC}=3S_{\triangle BEF}$，故 D 错误. 故选 AB.

12. ABD 【解析】$a_2=\frac{a_1}{1}=1$，故 A 正确；由 $a_{n+1}=\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}$知，$a_n=\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{n-1}(n\geqslant2)$，两式相减得 $a_{n+1}-a_n=\frac{a_n}{n}(n\geqslant2)$，故$\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$，故当 $n\geqslant2$ 时，$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$为常数列，故$\frac{a_n}{n}=\frac{a_2}{2}=\frac{1}{2}$，故 $a_n=\begin{cases}1,n=1,\\ \frac{n}{2},n\geqslant2,\end{cases}$ 故 $a_{2\,024}=1\,012$，故 B 正确；$S_n=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{n}{2}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\cdots+\frac{n}{2}\right)=\frac{n(n+1)}{4}+\frac{1}{2}$，故 C 错误；$\frac{1}{S_n}=\dfrac{1}{\frac{n(n+1)}{4}+\frac{1}{2}}<\frac{4}{n(n+1)}=4\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，故$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}<1+4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1+4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}\right)<3$，故 D 正确.

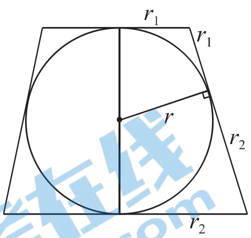
故选 ABD.

13. $\sqrt{2}$ 【解析】由题意得，$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{m^2+m^2+4}{m^2}=4$，又 $m>0$，则 $m=\sqrt{2}$.

14. $(\sqrt{2}-1,1)$ 【解析】$f'(x)=\frac{1}{x\ln a}+\frac{1}{x\ln(a+2)}=\frac{1}{x}\left[\frac{1}{\ln a}+\frac{1}{\ln(a+2)}\right]\leqslant0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立，则$\frac{1}{\ln a}+\frac{1}{\ln(a+2)}\leqslant0$，

又 $0<a<1$，则 $\ln a<0$，$\ln(a+2)>0$，不等式化为 $\ln(a+2)+\ln a\geqslant 0$，即 $\ln(a^2+2a)\geqslant 0$，则 $a^2+2a\geqslant 1$，解得 $\sqrt{2}-1\leqslant a<1$，当 $a=\sqrt{2}-1$ 时，$f(x)=\log_{\sqrt{2}-1}x+\log_{\sqrt{2}+1}x=0$，不合题意，故 $\sqrt{2}-1<a<1$.

15. $\dfrac{14\sqrt{2}}{3}\pi$ 【解析】设内切球的半径为 r，圆台上、下底面圆半径分别为 r_1,r_2，则圆台的高 $h=2r=2\sqrt{2}$，右图为圆台的轴截面图形，



可得母线长 $l=r_1+r_2$，故 $S_{圆台}=\pi(r_1+r_2)^2+\pi r_1^2+\pi r_2^2=14\pi$，知 $r_1^2+r_1r_2+r_2^2=7$，故 $V_{圆台}=\dfrac{1}{3}h\cdot\pi(r_1^2+r_1r_2+r_2^2)=\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{2}\pi\times 7=\dfrac{14\sqrt{2}}{3}\pi$.

16. 3 【解析】这一组数据有 1 个 1，2 个 2，3 个 3，…，故出现 n 以前共有数据的个数为 $1+2+\cdots+n-1$，而 $1+2+\cdots+13=91$，$1+2+\cdots+14=105$，故第 100 个数和第 101 个数均为 14，中位数为 14，故②正确；$1+2+3+\cdots+19=190$，$1+2+3+\cdots+20=210$，故最大的数有 10 个，数值为 20，故极差为 $20-1=19$，故①正确；$\dfrac{1}{200}\times(1\times1+2\times2+\cdots+19\times19+10\times20)=\dfrac{1}{200}\times\left(\dfrac{1}{6}\times19\times20\times39+200\right)=13.35$，故③错误；$S(x)=\sum\limits_{i=1}^{200}(x-x_i)^2=\sum\limits_{i=1}^{200}(x^2-2x_ix+x_i^2)=200x^2-2(x_1+x_2+\cdots+x_{200})x+x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{200}^2$，这是关于 x 的二次函数，且开口向上，$x=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_{200}}{200}=13.35$ 为二次函数的对称轴，故 $S(13)<S(14)$，故④正确.

故正确结论的个数为 3.

17. **解：**(1)由 $a_1=a_2=0$ 得，$a_1+1=1$，$a_2+2=2$， (1 分)

故等比数列 $\{a_n+n\}$ 的公比为 2， (2 分)

则 $a_n+n=(a_1+1)\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$， (4 分)

故 $a_n=2^{n-1}-n$. (5 分)

(2)$a_1+a_2+\cdots+a_n=(2^0+2^1+\cdots+2^{n-1})-(1+2+\cdots+n)=2^n-1-\dfrac{n(n+1)}{2}$， (7 分)

当 $n=11$ 时，$2^{11}-1-\dfrac{11\times12}{2}=1\ 981<2\ 024$， (8 分)

当 $n=12$ 时，$2^{12}-1-\dfrac{12\times13}{2}=4\ 017>2\ 024$， (9 分)

易知当 $n>2$ 时，$a_n>0$，

故满足 $a_1+a_2+\cdots+a_n<2\ 024$ 的最大整数 n 为 11. (10 分)

18. **解：**(1)连接 BD 交 AC 于点 O，连接 B_1O，

因为 $BD_1\perp$ 平面 ACB_1，$B_1O\subset$ 平面 ACB_1，所以 $BD_1\perp B_1O$， (1 分)

故在矩形 BDD_1B_1 中，$\angle D_1BB_1=\angle BOB_1$，又 $\angle B_1BO=\angle D_1B_1B=90°$，

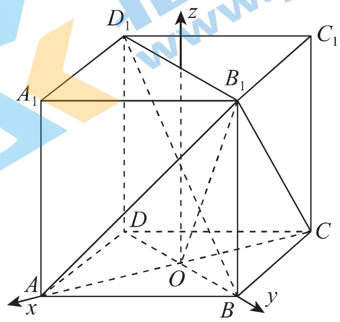
则 $\triangle BOB_1\backsim\triangle B_1BD_1$，则 $\dfrac{B_1D_1}{BB_1}=\dfrac{BB_1}{BO}$. (3 分)

因为四边形 $ABCD$ 是菱形，$AB=2$，$\angle DAB=60°$，

所以 $BD=B_1D_1=2$，$BO=1$， (4 分)

则 $BB_1^2=2$，即 $AA_1=BB_1=\sqrt{2}$. (5 分)

(2)以 O 为原点，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 O-xyz，



则 $B(0,1,0)$，$C(-\sqrt{3},0,0)$，$B_1(0,1,\sqrt{2})$，$D_1(0,-1,\sqrt{2})$，

则 $\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{BB_1}=(0,0,\sqrt{2})$， (6 分)

设平面 BCB_1 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BC}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{BB_1}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\sqrt{3}x-y=0,\\ \sqrt{2}z=0,\end{cases}$

取 $x=1$，则 $\boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},0)$，（8 分）

由题意易知 $\overrightarrow{D_1B}$ 为平面 AB_1C 的法向量，$\overrightarrow{D_1B}=(0,2,-\sqrt{2})$，（9 分）

则 $\cos\langle \boldsymbol{m},\overrightarrow{D_1B}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{D_1B}}{|\boldsymbol{m}|\,|\overrightarrow{D_1B}|}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{2\times\sqrt{6}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，（11 分）

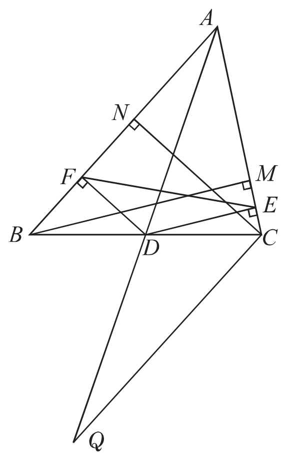
故 $\sin\langle \boldsymbol{m},\overrightarrow{D_1B}\rangle=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即二面角 $B-B_1C-A$ 的正弦值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.（12 分）

19. **解**：(1)在四边形 $AFDE$ 中，$\angle BAC=60^\circ$，

$\angle DFA=\angle DEA=90^\circ$，故$\angle FDE=120^\circ$，（1 分）

故 $S_{\triangle DEF}=\dfrac{1}{2}DE\cdot DF\sin 120^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}DE\cdot DF$.（2 分）

作 $BM\perp AC$ 于点 M，$CN\perp AB$ 于点 N，



又 D 为 BC 的中点，

则 $DE=\dfrac{1}{2}BM=\dfrac{1}{2}AB\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}AB$，（3 分）

$DF=\dfrac{1}{2}CN=\dfrac{1}{2}AC\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}AC$，（4 分）

故 $S_{\triangle DEF}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}AB\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}AC=\dfrac{3}{16}S_{\triangle ABC}=\dfrac{3}{16}\times 10\sqrt{3}=\dfrac{15\sqrt{3}}{8}$.（6 分）

(2)设$\triangle ABC$ 的三条边 BC,AC,AB 分别为 a,b,c，由 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin\angle BAC=10\sqrt{3}$，知 $bc=40$，（7 分）

延长 AD 到点 Q，使 $AD=DQ$，连接 CQ，则 $AQ=\sqrt{129}$，$\angle ABC=\angle BCQ$，

则在$\triangle AQC$ 中，$\angle ACQ=120^\circ$，$CQ=AB=c$，（8 分）

故由 $b^2+c^2+bc=129$ 与 $bc=40$ 可得，

$b^2+c^2-bc=49=a^2$，则 $a=7$，（9 分）

$b^2+c^2+2bc=169$，则 $b+c=13$，（10 分）

故$\dfrac{b+c}{\sin\angle ABC+\sin\angle ACB}=\dfrac{a}{\sin\angle BAC}=\dfrac{14}{\sqrt{3}}$，（11 分）

则 $\sin\angle ABC+\sin\angle ACB=\dfrac{13\sqrt{3}}{14}$.（12 分）

20. **解**：(1)由题意，可分为两种情况，即分甲连胜两场和前三场甲、乙、丙各胜负一场，第 4 场甲胜乙：

①甲连胜两场的概率为$\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{25}$；（2 分）

②前三场甲、乙、丙各胜负一场，第 4 场甲胜乙的概率为$\left(\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{39}{250}$，（4 分）

则甲进入正式比赛的概率为$\dfrac{6}{25}+\dfrac{39}{250}=\dfrac{99}{250}$.（6 分）

(2)由题意得 X 的可能取值为 1，2，且前 3 场甲、乙、丙各胜一场，（7 分）

则 $P(X=1)=\dfrac{2}{5}$，$P(X=2)=\dfrac{3}{5}$，（8 分）

则 X 的分布列为

X	1	2
P	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{3}{5}$

（10 分）

则 $E(X)=1\times\dfrac{2}{5}+2\times\dfrac{3}{5}=\dfrac{8}{5}$.（12 分）

21. **解**：设 $M(x,y)$，易知 $B(-2,-1)$，由 $k_{MA}\cdot k_{MB}=-\dfrac{1}{2}$，

得$\dfrac{y-1}{x-2}\cdot\dfrac{y+1}{x+2}=-\dfrac{1}{2}$，（2 分）

化简得$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$，

故椭圆 C 的标准方程为$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$.（4 分）

(2)设 l 的方程为 $y=kx+t(t\neq 0)$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，将 $y=kx+t$ 代入椭圆方程整理得，

$(1+2k^2)x^2+4ktx+2t^2-6=0$，

$\Delta=8(6k^2-t^2+3)>0$，

$x_1+x_2=-\dfrac{4kt}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2t^2-6}{1+2k^2}(t^2\neq 3)$，（6 分）

则 $|PQ|=\sqrt{k^2+1}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{k^2+1}\cdot\dfrac{\sqrt{8(3+6k^2-t^2)}}{1+2k^2}$，（7 分）

又原点 O 到 l 的距离为 $d=\dfrac{|t|}{\sqrt{k^2+1}}$，（8 分）

故 $S_{\triangle OPQ}=\dfrac{1}{2}|PQ|\cdot d=$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{3+6k^2-t^2}\cdot|t|}{1+2k^2}\leqslant$

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{3+6k^2-t^2+t^2}{1+2k^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，

当且仅当 $\sqrt{3+6k^2-t^2}=|t|$ 时取等号，

此时 $3+6k^2=2t^2(t^2\neq 3)$，$\triangle OPQ$ 的面积最大.

（9 分）

故 $k_{OP}\cdot k_{OQ}=\dfrac{y_1y_2}{x_1x_2}=\dfrac{(kx_1+t)(kx_2+t)}{x_1x_2}=$

$\dfrac{k^2x_1x_2+kt(x_1+x_2)+t^2}{x_1x_2}=$

$$\frac{k^2\cdot\dfrac{2t^2-6}{1+2k^2}+kt\cdot\dfrac{-4kt}{1+2k^2}+t^2}{\dfrac{2t^2-6}{1+2k^2}}=$$

$\dfrac{k^2(2t^2-6)-4k^2t^2+t^2+2k^2t^2}{2t^2-6}=\dfrac{-6k^2+t^2}{2t^2-6}=$

$\dfrac{-(2t^2-3)+t^2}{2t^2-6}=-\dfrac{1}{2}$.（12 分）

22. **解**：(1)易得 $f'(x)=e^x\ln(a+x)+\dfrac{e^x}{a+x}-1$，

由 $f'(0)=0$ 得，$\ln a+\dfrac{1}{a}-1=0$，（1 分）

令 $g(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}-1$，

则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$，（2 分）

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，

故 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，

故 $g(x)$ 有最小值 $g(1)=0$，

故 $a=1$.（4 分）

(2)证明：要证当 $x>\ln 4$ 时，$f(x)>x^2$，

即证 $e^x\ln(1+x)>x+x^2$，即证 $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}>\dfrac{x}{e^x}$，

令 $1+x=t$，$e^x=s$，则上式等价于 $\dfrac{\ln t}{t}>\dfrac{\ln s}{s}$，

（5 分）

构造函数 $p(x)=\dfrac{\ln x}{x}$，则 $p'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$，（6 分）

故在 $(0,e)$ 上，$p'(x)>0$，$p(x)$ 为增函数；

在 $(e,+\infty)$ 上，$p'(x)<0$，$p(x)$ 为减函数.（7 分）

由 $e>2.7>\dfrac{5}{2}$ 得，$e-1>\dfrac{3}{2}$，故 $e^{e-1}>e^{\frac{3}{2}}>\sqrt{2.7^3}>\sqrt{16}=4$，故 $e-1>\ln 4$.（8 分）

当 $\ln 4<x<e-1$ 时，$t=1+x\in(1+\ln 4,e)$，

$s=e^x\in(4,e^{e-1})$，又 $(4,e^{e-1})\subseteq(e,+\infty)$，

故 $p(s)<p(4)=\dfrac{\ln 4}{4}=\dfrac{\ln 2}{2}=p(2)$，（9 分）

又 $(1,e)$ 是 $p(x)$ 的增区间，而 $2<1+\ln 4<t$，

故 $p(2)<p(t)$，故 $p(t)>p(s)$，

即 $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}>\dfrac{x}{e^x}$.（10 分）

当 $x\geqslant e-1$ 时，$e^x>1+x\geqslant e$，即 $s>t\geqslant e$.

在 $[e,+\infty)$ 上，$p(x)$ 为减函数，故 $p(t)>p(s)$，即 $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}>\dfrac{x}{e^x}$，

故原命题得证.（12 分）