高三数学试卷参考答案(文科)

1. D　因为 $z=\sqrt{2}\mathrm{i}$,所以 $z^2=-2,z^4=4$.

2. A　因为 $A=(0,16)$,$B=(-1,4)$,所以 $A\cup B=(-1,16)$.

3. B　因为 $f(-x)=\frac{(-x)^2}{2^{-x}-2^x}=-f(x)$,所以 $f(x)$ 为奇函数,排除 AC. 当 $x>0$ 时,$f(x)>0$,排除 D,故选 B.

4. C　由 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 得 $x^3=4x$,即 $x=\pm2$ 或 $x=0$,因为 $\boldsymbol{b}$ 为非零向量,所以 $x=\pm2$,即 $|x|=2$,故"$|x|=2$"是"$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$"的充要条件.

5. B　由题意可知该曲面棱柱的底面积 $S=\frac{9(\pi-\sqrt{3})}{2}$. 设 $AB=x$,则 $3\times(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}x^2-\frac{\sqrt{3}}{4}x^2)+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=\frac{9(\pi-\sqrt{3})}{2}$,解得 $x=3$.

6. D　因为 $1<a=1.3^{0.1}<2$,$b=\log_2 5>2$,$c=0.9^{2.3}<1$,所以 $c<a<b$.

7. D　由题意可得 $a_5=2a_4+2=2(2a_3-1)+2=4(2a_2+2)=8(2a_1-1)+8=16a_1=16$,$a_8=2a_7-1=2(2a_6+2)-1=4(2a_5-1)+3=127$,则 $a_5+a_8=16+127=143$.

8. B　甲、乙同学所选的科目情况有(化学,化学),(化学,生物),(生物,化学),(生物,生物),(政治,化学),(政治,生物),共 6 种,其中甲、乙同学所选的科目相同的情况有(化学,化学),(生物,生物),共 2 种,故所求概率 $P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$.

9. D　因为 $\angle AMB=\frac{2\pi}{3}$,所以圆心 M 到渐近线的距离等于半径的一半,则 $\frac{ab}{c}=\frac{c}{2}$,则 $a^2(c^2-a^2)=\frac{c^4}{4}$,即 $(\frac{c}{a})^4-4(\frac{c}{a})^2+4=0$,解得 $(\frac{c}{a})^2=2$,则双曲线 C 的离心率为 $\sqrt{2}$.

10. D　当 $x\in[-\frac{\pi}{4},\frac{a}{6}]$ 时,$2x+\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{3},\frac{a}{3}+\frac{\pi}{6}]$,则 $-\frac{\pi}{3}<\frac{a}{3}+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{2}$,解得 $-\frac{3\pi}{2}<a\leqslant\pi$;当 $x\in[\frac{2a}{5},\frac{7\pi}{12}]$ 时,$2x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{4a}{5}+\frac{\pi}{6},\frac{4\pi}{3}]$,则 $\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{4a}{5}+\frac{\pi}{6}<\frac{4\pi}{3}$,解得 $\frac{5\pi}{12}\leqslant a<\frac{35\pi}{24}$. 综上,$a$ 的取值范围是 $[\frac{5\pi}{12},\pi]$.

11. A　由题意可得 $f'(x)=\frac{1}{x}-2x$. 令 $f'(x)=\frac{1}{x}-2x=-1$,解得 $x=1$($x=-\frac{1}{2}$ 舍去). 因为 $f(1)=-1$,所以点 $(1,-1)$ 到直线 $x+y-4=0$ 的距离 $d=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$,则 A,B 之间的最短距离是 $2\sqrt{2}$.

12. A　设△ABC 外接圆的半径为 r,则 $r=\frac{4\sqrt{3}}{2\sin 60^\circ}=4$. 设球 O 的半径为 R,因为三棱锥 $P-ABC$ 体积的最大值是 $32\sqrt{3}$,所以 $\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(4\sqrt{3})^2\times(\sqrt{R^2-4^2}+R)=32\sqrt{3}$,解得 $R=5$,故

球 O 的表面积是 $4\pi R^2=100\pi$.

13. 120　由题意可知 $P(X>120)=P(X<60)=0.1$,则数学成绩为优秀的人数是 $1200\times 0.1=120$.

14. 7　画出可行域(图略),则直线 $z=2x-y$ 经过点(4,1)时,z 取得最大值,且最大值是 7.

15. $\frac{1}{n}$　因为 $(n+1)a_{n+1}^2-na_n^2+a_{n+1}a_n=0$,

所以 $[(n+1)a_{n+1}-na_n](a_{n+1}+a_n)=0$,所以 $(n+1)a_{n+1}-na_n=0$,即 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{n+1}$,则 $\frac{a_n}{a_1}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}$,故 $a_n=\frac{1}{n}$.

16. 2　由题意可知 $F(\frac{p}{2},0)$,设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{2}\cdot|DE|p=\frac{p}{2}|DE|$,

$S_{四边形ABED}=\frac{|AD|+|BE|}{2}\cdot|DE|=\frac{x_1+\frac{p}{2}+x_2+\frac{p}{2}}{2}\cdot|DE|=\frac{x_1+x_2+p}{2}\cdot|DE|$,

因为 $S_{\triangle DEF}=\frac{1}{4}S_{四边形ABED}$,所以 $x_1+x_2=3p$. 由题意可知直线 l 的斜率不为 0,设直线 l 的方程为 $x=my+\frac{p}{2}$,联立 $\begin{cases}x=my+\frac{p}{2},\\ y^2=2px,\end{cases}$ 整理得 $y^2-2mpy-p^2=0$,则 $y_1+y_2=2mp$,$y_1y_2=-p^2$,从而 $x_1+x_2=m(y_1+y_2)+p=(2m^2+1)p=3p$,解得 $m^2=1$,故 $|y_1-y_2|=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=2\sqrt{2}p$,即 $|DE|=2\sqrt{2}p$. 因为 $S_{\triangle DEF}=4\sqrt{2}$,所以 $\sqrt{2}p^2=4\sqrt{2}$,解得 $p=2$.

17. 解:(1)由题意得 $\bar{x}=\frac{2+4+5+6+8}{5}=5$,$\bar{y}=\frac{3+4+6+5+7}{5}=5$. ………………………… 2 分

因为 $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2=145$,$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4+x_5y_5=138$, …………… 4 分

所以 $\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\sum\limits_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\,\bar{y}=138-5\times5\times5=13$,

$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\sqrt{145-5\times5^2}=2\sqrt{5}$,$\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}=\sqrt{10}$,

故 $r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{13}{2\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=\frac{13\sqrt{2}}{20}\approx 0.92$. ……………… 6 分

(2)$\hat{b}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{13}{20}=0.65$,$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=5-0.65\times5=1.75$, … 8 分

故线性回归直线方程为 $\hat{y}=0.65x+1.75$. …………………………………………………… 9 分

(3)当 $x=10$ 时,$\hat{y}=0.65\times10+1.75=8.25$ 百万元. …………………………………… 12 分

18. (1)证明：由四边形 $ABCD$ 为矩形，得 $AD\perp CD$. ………………………………………… 1 分

因为 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp CD$. ………………………… 3 分

因为 $PA\cap AD=A$，所以 $CD\perp$ 平面 PAD. ……………………………………………… 4 分

因为 $CD\subset$ 平面 PCD，所以平面 $PAD\perp$ 平面 PCD. ………………………………… 5 分

(2)解：因为 $AD=3AE$，$AD=3$，所以 $AE=1$. ……………………………………………… 6 分

因为四边形 $ABCE$ 的面积 $S=\frac{1}{2}\times(1+3)\times1=2$，……………………………………… 8 分

所以 $V_{P-ABCE}=\frac{1}{3}\times PA\times S=\frac{1}{3}\times3\times2=2$. ……………………………………… 12 分

19. 解：(1)因为 $\sqrt{2}c\sin(A+\frac{\pi}{4})=b$，所以 $\sqrt{2}\sin C(\sin A\cos\frac{\pi}{4}+\cos A\sin\frac{\pi}{4})=\sin B$，

即 $\sin C\sin A+\sin C\cos A=\sin B$. ……………………………………………………… 2 分

因为 $A+B+C=\pi$，所以 $\sin B=\sin(A+C)=\sin A\cos C+\cos A\sin C$，………………… 3 分

所以 $\sin C=\cos C$，即 $\tan C=1$. ……………………………………………………………… 4 分

因为 $0<C<\pi$，所以 $C=\frac{\pi}{4}$. ………………………………………………………………… 5 分

(2)因为 D 为 AB 边的中点，所以 $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$，…………………………………… 6 分

所以 $\overrightarrow{CD}^2=\frac{\overrightarrow{CA}^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CB}^2}{4}=\frac{b^2+a^2+2ab\cos C}{4}=\frac{b^2+4b+8}{4}=\frac{(b+2)^2+4}{4}$. … 8 分

在△ABC 中，由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 $b=\frac{2\sqrt{2}\sin B}{\sin(B+\frac{\pi}{4})}=\frac{4}{1+\frac{1}{\tan B}}$. ……………… 9 分

因为△ABC 为锐角三角形，且 $C=\frac{\pi}{4}$，所以 $B\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，……………………………… 10 分

则 $\tan B\in(1,+\infty)$，故 $b\in(2,4)$. ………………………………………………………… 11 分

因为 $b\in(2,4)$，所以 $|\overrightarrow{CD}|\in(\sqrt{5},\sqrt{10})$，即线段 CD 长的取值范围为 $(\sqrt{5},\sqrt{10})$. … 12 分

20. 解：(1)设椭圆 C 的焦距为 $2c$，

由题意可得 $\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \frac{4}{a^2}=1,\\ c^2=a^2-b^2,\end{cases}$ 解得 $a=2$，$b=1$. ………………………………………… 3 分

故椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ………………………………………………………… 5 分

(2)由题意可知直线 l 的斜率不为 0，设直线 l：$x=my+6$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}x=my+6,\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1,\end{cases}$ 整理得 $(m^2+4)y^2+12my+32=0$，

则 $\Delta=144m^2-4(m^2+4)\times32=16(m^2-32)>0$，

$y_1+y_2=-\frac{12m}{m^2+4}, y_1y_2=\frac{32}{m^2+4}$. ………………………………………………… 7 分

因为 $P(2,0)$，所以 $k_1=\frac{y_1}{x_1-2}, k_2=\frac{y_2}{x_2-2}$， ………………………………………… 8 分

所以 $k_1k_2=\frac{y_1}{x_1-2}\times\frac{y_2}{x_2-2}=\frac{y_1y_2}{(my_1+4)(my_2+4)}=\frac{y_1y_2}{m^2y_1y_2+4m(y_1+y_2)+16}$ ……… 9 分

$$=\frac{\frac{32}{m^2+4}}{m^2\cdot\frac{32}{m^2+4}+4m\cdot(-\frac{12m}{m^2+4})+16}=\frac{32}{32m^2-48m^2+16m^2+64}=\frac{1}{2}.$$ ……………… 11 分

故 k_1k_2 为定值，该定值为 $\frac{1}{2}$. ……………………………………………………… 12 分

21.(1)解：因为 $f(x)=\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)$，所以 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，

且 $f'(x)=x-1+\frac{1}{x+1}=\frac{x^2}{x+1}$. ……………………………………………………… 1 分

因为 $x>-1$，所以 $f'(x)\geqslant 0$，所以 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上单调递增. ……………………… 2 分

因为 $f(0)=0$，所以当 $-1<x<0$ 时，$f(x)<0$；当 $x=0$ 时，$f(0)=0$；

当 $x>0$ 时，$f(x)>0$. ……………………………………………………………………… 4 分

(2)证明：由(1)可知当 $x\in[0,1)$ 时，$\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\geqslant 0$，即 $\ln(x+1)\geqslant x-\frac{x^2}{2}$. …… 5 分

同理当 $x\in(-1,0]$ 时，$\ln(1+x)\leqslant x-\frac{x^2}{2}$，即当 $x\in[0,1)$ 时，$\ln(1-x)\leqslant -x-\frac{x^2}{2}$， … 6 分

则 $\ln(x+1)-\ln(1-x)\geqslant 2x$，故 $x[\ln(x+1)-\ln(1-x)]+4\cos x-4\geqslant 2x^2+4\cos x-4$.

…………………………………………………………………………………………… 7 分

设 $g(x)=2x^2+4\cos x-4$，则 $g'(x)=4x-4\sin x$. ………………………………………… 8 分

设 $h(x)=4x-4\sin x$，则 $h'(x)=4-4\cos x\geqslant 0$，从而 $h(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调递增. …… 9 分

因为 $h(0)=0$，所以 $h(x)\geqslant 0$，即 $g'(x)\geqslant 0$，所以 $g(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调递增， ………… 10 分

则 $g(x)\geqslant g(0)=0$，即 $2x^2+4\cos x-4\geqslant 0$. ……………………………………… 11 分

故对任意的 $x\in[0,1)$，$x[\ln(x+1)-\ln(1-x)]+4\cos x-4\geqslant 0$ 恒成立. …………… 12 分

22.解：(1)由 $y=\sqrt{-x^2+4x}$，得 $y^2=-x^2+4x(y\geqslant 0)$， ………………………………… 1 分

则 $x^2+y^2=4x(y\geqslant 0)$，则 $\rho^2=4\rho\cos\theta(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$， ……………………………… 2 分

所以曲线 M 的极坐标方程为 $\rho=4\cos\theta(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$. ……………………………… 3 分

由 $xy=9$，得 $\rho^2\cos\theta\sin\theta=9$，即 $\rho^2\sin 2\theta=18$，

此即曲线 N 的极坐标方程. ……………………………………………………………… 5 分

(2)将 $\theta=\theta_0$ 代入 $\rho^2\sin 2\theta=18$，得 $|OB|=\rho=\sqrt{\frac{18}{\sin 2\theta_0}}$. ………………………………… 6 分

将 $\theta=\theta_0$ 代入 $\rho=4\cos\theta$，得 $|OA|=\rho=4\cos\theta_0$， ………………………………………… 7 分

则$|OA|\cdot|OB|=\frac{12}{\sqrt{\tan\theta_0}}$. …………………………………………………………………… 8 分

因为$|OA|\cdot|OB|=12$,所以 $\tan\theta_0=1$,又 $0<\theta_0<\frac{\pi}{2}$,所以 $\theta_0=\frac{\pi}{4}$. ………………… 10 分

【注】曲线 N 的极坐标方程写为$\rho^2\cos\theta\cdot\sin\theta=9$ 也可以,不扣分.

23.(1)证明:因为 $f(x)=|x-a-1|+|x-2a|\geqslant|x-a-1-(x-2a)|=|a-1|$, ……… 2 分

所以 $f(x)_{\min}=|a-1|$. …………………………………………………………………… 3 分

由$|a-1|\geqslant1$,得 $a\leqslant0$ 或 $a\geqslant2$, …………………………………………………… 4 分

则当 $a\geqslant2$ 时,$f(x)\geqslant1$ 恒成立,所以存在 $a\in(0,+\infty)$,使得 $f(x)\geqslant1$ 恒成立. ……… 5 分

(2)解:当 $x\in[2a,4]$时,$f(x)=|x-a-1|+x-2a$.

由 $f(x)\leqslant x+a$,得$|x-a-1|\leqslant3a$, ……………………………………………………… 6 分

则$-3a\leqslant x-a-1\leqslant3a$,即$-2a+1\leqslant x\leqslant4a+1$. ………………………………………… 7 分

因为当 $x\in[2a,4]$时,$f(x)\leqslant x+a$,所以$\begin{cases}-2a+1\leqslant2a,\\4a+1\geqslant4,\end{cases}$ ……………………………… 8 分

解得 $a\geqslant\frac{3}{4}$, …………………………………………………………………………… 9 分

又 $2a<4$,所以 a 的取值范围是$[\frac{3}{4},2)$. ………………………………………………… 10 分