育英学校2024届高三年级统一练习（一）

数　　学

第一部分　选择题（共40分）

一、选择题.（每小题4分，共40分）

1. 已知集合 $A=\{0,a\},B=\{x|-1<x<2\}$，且 $A\subseteq B$，则 a 可以是（　　）

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

【答案】C

【解析】

【分析】由 $A\subseteq B$ 先求出 $-1<a<2$ 且 $a\neq 0$，对照四个选项即可得到答案.

【详解】解：因为 $A\subseteq B$，且集合 $A=\{0,a\},B=\{x|-1<x<2\}$，

所以 $-1<a<2$ 且 $a\neq 0$，

根据选项情况，由此可以判定只能选择C.

故选：C

2. $\left(\frac{1}{x}-x\right)^{10}$ 的展开式中 x^4 的系数是（　　）

A. -210　　B. -120　　C. 120　　D. 210

【答案】B

【解析】

【分析】先写出展开式通项，然后令 x 的指数部分为4，由此求解出 r 的值，则 x^4 项的系数可求.

【详解】由二项展开式知其通项为 $T_{r+1}=C_{10}^{r}\left(\frac{1}{x}\right)^{10-r}(-x)^{r}=(-1)^{r}C_{10}^{r}x^{2r-10}$，

令 $2r-10=4$，解得 $r=7$.

所以 x^4 的系数为 $(-1)^7C_{10}^{7}=-120$.

故选：B.

3. 已知双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一条渐近线的倾斜角为 $60°$，且与椭圆 $\frac{x^2}{5}+y^2=1$ 有相等的焦距，则 C 的方程为（　　）

A. $\frac{x^2}{3}-y^2=1$　　B. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$　　C. $x^2-\frac{y^2}{3}=1$　　D. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{9}=1$

【答案】C

【解析】

【分析】

根据题意，由双曲线的方程分析可得其渐近线方程，分析可得有$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，即$b=\sqrt{3}a$，求出椭圆的半焦距，

分析可得$a^2+b^2=4$，解可得a^2、b^2的值，将a^2、b^2的值代入双曲线的方程，即可得答案.

【详解】解：根据题意，双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的焦点在$x$轴上，其渐近线方程为$y=\pm\frac{b}{a}x$，

若其一条渐近线的倾斜角为$60°$，则该渐近线的方程为$y=\sqrt{3}x$，

则有$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，即$b=\sqrt{3}a$，

椭圆$\frac{x^2}{5}+y^2=1$中，$c^2=5-1=4$，

若双曲线与椭圆有相等的焦距，则有$a^2+b^2=4$，

解可得$a^2=1$，$b^2=3$，

则双曲线的方程为$x^2-\frac{y^2}{3}=1$；

故选：C.

【点睛】本题考查双曲线、椭圆的几何性质，注意分析双曲线的焦点位置，属于基础题.

4. 若$a<b<0$，则下列不等式中正确的是（　　）

A. $b^2<a^2$　　B. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$　　C. $\frac{b}{a}>1$　　D. $\sqrt{-a}<\sqrt{-b}$

【答案】A

【解析】

【分析】利用作差法判断A，举反例排除BCD.

【详解】对于A，因为$a<b<0$，所以$b-a>0,b+a<0$，

所以$b^2-a^2=(b-a)(b+a)<0$，则$b^2<a^2$，故A正确；

对于 B，取 $a=-2,b=-1$，满足 $a<b<0$，但 $\frac{1}{a}=-\frac{1}{2}>-1=\frac{1}{b}$，故 B 错误；

对于 C，取 $a=-2,b=-1$，满足 $a<b<0$，但 $\frac{b}{a}=\frac{1}{2}<1$，故 C 错误；

对于 D，取 $a=-2,b=-1$，满足 $a<b<0$，但 $\sqrt{-a}=\sqrt{2}>\sqrt{1}=\sqrt{-b}$，故 D 错误.

故选：A.

5. 函数 $f(x)=\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{x^2+1}-\frac{1}{2x}$ 的零点个数为（　　）

A. 0　　　　B. 1　　　　C. 2　　　　D. 4

【答案】C

【解析】

【分析】由 $f(x)=0$ 可得 $2\sin\frac{\pi x}{2}=x+\frac{1}{x}$，作出函数 $y=2\sin\frac{\pi x}{2}$ 与函数 $\mathrm{y}=\mathrm{x}+\frac{1}{\mathrm{x}}$ 的图象，结合基本不等式可得出函数 $f(x)$ 的零点个数.

【详解】函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$，由 $f(x)=0$ 可得 $2\sin\frac{\pi x}{2}=x+\frac{1}{x}$，

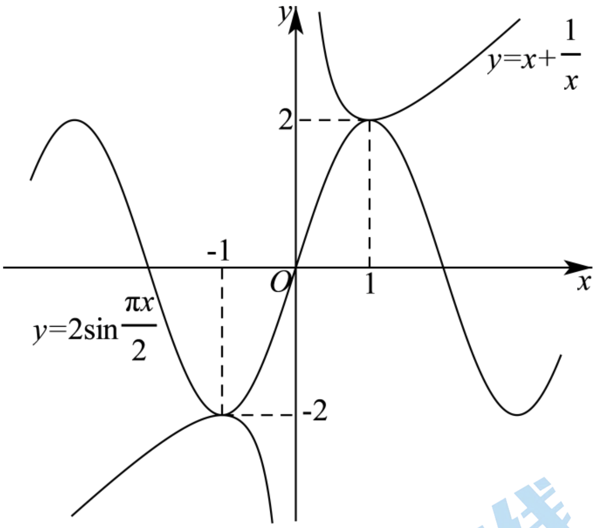
当 $x>0$ 时，由基本不等式可得 $x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2$，当且仅当 $x=1$ 时，等号成立，

且 $x=1$ 满足方程 $2\sin\frac{\pi x}{2}=x+\frac{1}{x}$；

当 $x<0$ 时，由基本不等式可得 $x+\frac{1}{x}=-\left[(-x)+\frac{1}{(-x)}\right]\leq -2\sqrt{(-x)\cdot\frac{1}{(-x)}}=-2$，当且仅当 $x=-1$ 时，等号成立，

且 $x=-1$ 也满足方程 $2\sin\frac{\pi x}{2}=x+\frac{1}{x}$.

作出函数 $y=2\sin\frac{\pi x}{2}$ 与对勾函数 $\mathrm{y}=\mathrm{x}+\frac{1}{\mathrm{x}}$ 的图象如下图所示：



由图可知，函数 $y=2\sin\frac{\pi x}{2}$ 与函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 的图象有 2 个公共点，

因此，函数 $f(x)$ 的零点个数为 2.

故选：C.

6. 以抛物线 C 的顶点为圆心的圆交 C 于 A、B 两点，交 C 的准线于 D、E 两点. 已知 $|AB|=4\sqrt{2}$，$|DE|=2\sqrt{5}$，则 C 的焦点到准线的距离为

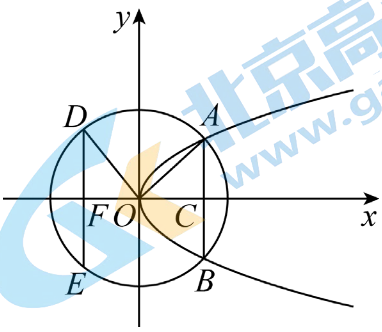
A. 8　　B. 6　　C. 4　　D. 2

【答案】C

【解析】

【详解】试题分析：如图，设抛物线方程为 $y^2=2px$， AB,DE 交 x 轴于 C,F 点，则 $AC=2\sqrt{2}$，即 A 点纵坐标为 $2\sqrt{2}$，则 A 点横坐标为 $\frac{4}{p}$，即 $OC=\frac{4}{p}$，由勾股定理知 $DF^2+OF^2=DO^2=r^2$，$AC^2+OC^2=AO^2=r^2$，即 $(\sqrt{5})^2+(\frac{p}{2})^2=(2\sqrt{2})^2+(\frac{4}{p})^2$，解得 $p=4$，即 C 的焦点到准线的距离为 4，故选 C.

考点：抛物线的性质.



7. 已知 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 为共面的三个单位向量，且 $\vec{i}\perp\vec{j}$，则 $(\vec{i}+\vec{k})\cdot(\vec{j}+\vec{k})$ 的取值范围是（　　）

A. [−3，3]

B. [−2，2]

C. $\left[\sqrt{2}-1,\sqrt{2}+1\right]$

D. $\left[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right]$

【答案】D

【解析】

【分析】

先由数量积的运算律及条件化简 $(\vec{i}+\vec{k})\cdot(\vec{j}+\vec{k})=$ $(\vec{i}+\vec{j})\cdot\vec{k}+1$，再由数量积的定义将 $(\vec{i}+\vec{j})\cdot\vec{k}$

$=|\vec{i}+\vec{j}|\cdot|\vec{k}|\cdot\cos<\vec{i}+\vec{j},\vec{k}>$，再化简结合余弦函数的值域求得答案.

【详解】由 $\vec{i}\perp\vec{j}$ 得 $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$，$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 为共面的三个单位向量,

则 $|\vec{i}+\vec{j}|=\sqrt{\vec{i}^2+\vec{j}^2+2\vec{i}\cdot\vec{j}}=\sqrt{2}$，

则 $(\vec{i}+\vec{k})\cdot(\vec{j}+\vec{k})=\vec{i}\cdot\vec{j}+(\vec{i}+\vec{j})\cdot\vec{k}+\vec{k}^2=(\vec{i}+\vec{j})\cdot\vec{k}+1$

$=|\vec{i}+\vec{j}|\cdot|\vec{k}|\cdot\cos<\vec{i}+\vec{j},\vec{k}>+1=\sqrt{2}\cos<\vec{i}+\vec{j},\vec{k}>+1$

由 $-1\le\cos<\vec{i}+\vec{j},\vec{k}>\le1$，则 $(\vec{i}+\vec{k})\cdot(\vec{j}+\vec{k})$ 的取值范围是 $\left[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}\right]$.

故选：D.

【点睛】本题考查了平面向量数量积的定义与运算，向量垂直的应用，余弦函数的值域，属于中档题.

8. 已知函数 $f(x)=\sin\omega x(\omega>0)$，则“函数 $f(x)$ 的图象经过点（$\frac{\pi}{4}$，1）”是“函数 $f(x)$ 的图象经过点（$\frac{\pi}{2}$,0）”的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

【答案】A

【解析】

【分析】

先由 $f\left(x\right)$ 的图象经过点 $\left(\frac{\pi}{4},1\right)$ 求出 ω；再由 $f\left(x\right)$ 的图象经过点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 求出 ω，根据充分条件与必要条件的概念，即可得出结果.

【详解】函数 $f\left(x\right)$ 的图象经过点（$\frac{\pi}{4}$，1）时，有 $\sin\frac{\pi}{4}\omega=1$，所以，$\frac{\pi}{4}\omega=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，

因为 $\omega>0$，所以 $\omega=2+8k$，$k\in N$，函数为：$f\left(x\right)=\sin\left(2+8k\right)x$，$k\in N$

当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2+8k\right)\times\frac{\pi}{2}=\sin\left(\pi+4k\pi\right)=0$，所以，充分性成立；

当函数 $f\left(x\right)$ 的图象经过点（$\frac{\pi}{2},0$）时，$\sin\frac{\pi}{2}\omega=0$，所以，$\frac{\pi}{2}\omega=k\pi$，$k\in Z$，即 $\omega=2k$，$k\in Z$，

$f\left(x\right)=\sin 2kx(k>0,k\in Z)$，

当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(2k\times\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{k\pi}{2}$ 不一定等于 1，所以，必要性不成立.

故选 A

【点睛】本题主要考查充分条件与必要条件的判定，熟记概念即可，属于常考题型.

9. 设 $0<p<1$，随机变量 ξ 的分布列如图，则当 p 在 $(0,1)$ 内增大时，

ξ	0	1	2
P	$\frac{1-p}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{p}{2}$

A. $D\left(\xi\right)$ 减小　　　　B. $D\left(\xi\right)$ 增大

C. $D\left(\xi\right)$ 先减小后增大　　　　D. $D\left(\xi\right)$ 先增大后减小

【答案】D

【解析】

【分析】先求数学期望，再求方差，最后根据方差函数确定单调性.

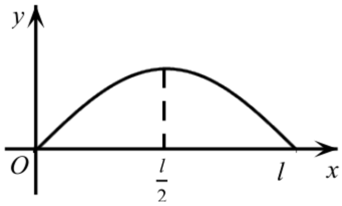
【详解】$\because E(\xi)=0\times\frac{1-p}{2}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{p}{2}=p+\frac{1}{2}$，

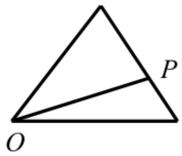
$\therefore D(\xi)=\frac{1-p}{2}(0-p-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}(1-p-\frac{1}{2})^2+\frac{p}{2}(2-p-\frac{1}{2})^2=-p^2+p+\frac{1}{4}$，

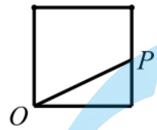
$\because\frac{1}{2}\in(0,1)$，$\therefore D(\xi)$ 先增后减，因此选 D.

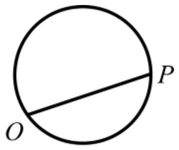
【点睛】$E(\xi)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i, D(\xi)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(\xi))^2 p_i=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i-E^2(\xi).$

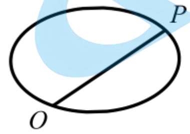
10. 点 P 从 O 点出发，按逆时针方向沿周长为 l 的图形运动一周，O、P 两点的距离 y 与点 P 所走路程 x 的函数关系如图所示，那么点 P 所走的图形是（　　）



A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】C

【解析】

【分析】认真观察函数的图象，根据其运动特点，采用排除法，即可求解.

【详解】观察函数的运动图象，可以发现两个显著特点：

①点 P 运动到周长的一半时，OP 最大；②点 P 的运动图象是抛物线，

设点 M 为周长的一半，如下图所示：

图 1 中，因为 $OM \le OP$，不符合条件①，因此排除选项 A；

图 4 中，由 $OM \le OP$，不符合条件①，并且 OP 的距离不是对称变化的，因此排除选项 D；

另外，在图 2 中，当点 P 在线段 OA 上运动时，此时 $y=x$，其图象是一条线段，不符合条件②，因此排除选项 B.

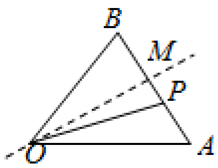


图 1

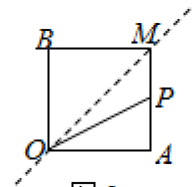


图 2

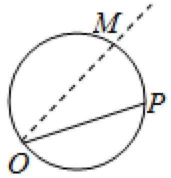


图 3

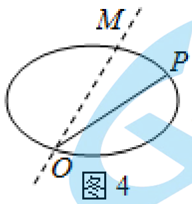


图 4

故选：C

第二部分　非选择题（共 110 分）

二、填空题.（每小题 5 分，共 25 分）

11. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_1=1$，$a_1+a_3=6$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为_____.

【答案】$a_n=2n-1$

【解析】

【分析】由 $a_1=1$，$a_1+a_3=6$，可求出 a_3，再求出公差，从而可求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【详解】由题意，等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_1+a_3=6$，

所以 $a_3=5$，公差 $d=\frac{1}{2}(a_3-a_1)=2$，所以 $a_n=2n-1$.

故答案为：$a_n=2n-1$.

12. 已知不等式$|x-m|<1$ 成立的充分不必要条件是 $\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}$，则 m 的取值范围是________

【答案】$[-\frac{1}{2},\frac{4}{3}]$

【解析】

【分析】先求出不等式的解集 B，又设 $A=\{x|\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\}$，则 A 是 B 的真子集，再求得 m 的取值范围.

【详解】由不等式$|x-m|<1$，得 $-1+m<x<m+1$，即其解集 $B=\{x|-1+m<x<m+1\}$，

又设 $A=\{x|\frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}\}$，由已知知 A 是 B 的真子集，

得 $\begin{cases}-1+m\le\frac{1}{3}\\ m+1\ge\frac{1}{2}\end{cases}$（等号不同时成立），得 $-\frac{1}{2}\le m\le\frac{4}{3}$.

故答案为：$[-\frac{1}{2},\frac{4}{3}]$

【点睛】本题考查了不等式的解法，考查了将充分不必要条件转化为集合的包含关系，属于基础题.

13. 椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 与曲线 C_2 关于直线 $y=-x$ 对称，C_1 与 C_2 分别在第一、二、三、四象限交于点 P_1,P_2,P_3,P_4. 若四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的面积为 4，则点 P_1 的坐标为____，C_1 的离心率为____.

【答案】 ①. (1,1) ②. $\frac{\sqrt{6}}{3}$##$\frac{1}{3}\sqrt{6}$

【解析】

【分析】根据题意求得曲线 $C_2:\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{b^2}=1$，联立方程组求得 $b^2=\frac{4}{3}$，得到点 P_1 的坐标，结合离心率的定义，即可求解.

【详解】在椭圆 $C_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 中，取 $x=-y,y=-x$，可得曲线 $C_2:\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{b^2}=1$，

联立方程组$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ \dfrac{y^2}{4}+\dfrac{x^2}{b^2}=1\end{cases}$，解得$x^2=y^2=\dfrac{4b^2}{4+b^2}$，

因为四边形$P_1P_2P_3P_4$的面积为4，所以$4x^2=4$，即$\dfrac{4b^2}{4+b^2}=1$，解得$b^2=\dfrac{4}{3}$，

所以$x^2=y^2=1$，

因为点P_1位于第一象限，所以点P_1的坐标为$P_1(1,1)$，

由$a^2=4$，可得$a=2$，则$c=\sqrt{a^2-b^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，

所以椭圆的离心率为$e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

故答案为：$(1,1)$；$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

14. 已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}-x^2-2x,x\le m\\ x-4,x>m\end{cases}$.

①当 m＝0 时，函数$f\left(x\right)$的零点个数为__________.

②如果函数$f\left(x\right)$恰有两个零点，那么实数 m 的取值范围为__________.

【答案】 ①. 3 ②. $-2\le m<0$或$m\ge 4$.

【解析】

【分析】①分段解方程求零点，即得结果，②根据①中零点分类讨论，确定满足条件的实数 m 的取值范围.

【详解】①当 m＝0 时，由$\begin{cases}x\le 0\\ -x^2-2x=0\end{cases}$或$\begin{cases}x>0\\ x-4=0\end{cases}$得$x=0$或$x=-2$或$x=4$，共 3 个零点；

②当$m<-2$时， 函数$f\left(x\right)$只有一个零点：$x=4$，

当$-2\le m<0$时， 函数$f\left(x\right)$有两个零点：$x=0$，$x=4$，

当$0\le m<4$时， 函数$f\left(x\right)$有三个零点：$x=-2,x=0$，$x=4$，

当$m\ge 4$时， 函数$f\left(x\right)$有两个零点：$x=-2,x=0$,

综上，满足条件的实数 m 的取值范围为$-2\le m<0$或$m\ge 4$.

【点睛】本题利用数形结合法研究零点问题：先对解析式变形，在同一平面直角坐标系中，画出函数的图

象，然后数形结合求解.

15. 已知函数 $f(x)=e^x-e^{-x}$，下列命题正确的有________.（写出所有正确命题的编号）

①$f(x)$是奇函数；

②$f(x)$在R上是单调递增函数；

③方程 $f(x)=x^2+2x$ 有且仅有 1 个实数根；

④如果对任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)>kx$，那么 k 的最大值为 2.

【答案】①②④

【解析】

【详解】 根据题意，依次分析四个命题：

对于①中，$f(x)=e^x-e^{-x}$，定义域是 R，且 $f(-x)=e^{-x}-e^x=-f(x),f(x)$ 是奇函数，所以是正确的；

对于②中，若 $f(x)=e^x-e^{-x}$，则 $f'(x)=e^x+e^{-x}>0$，所以 $f(x)$ 的 R 递增，所以是正确的；

对于③中，$f(x)=x^2+2x$，令 $g(x)=e^x-e^{-x}-x^2-2x$，

令 $x=0$ 可得，$g(0)=0$，即方程 $f(x)=x^2+2x$ 有一根 $x=0$，

$g(3)=e^3-\frac{1}{e^3}-13\left\langle 0,g(4)=e^4-\frac{1}{e^4}-20\right\rangle 0$，则方程 $f(x)=x^2+2x$ 有一根 $(3,4)$ 之间，

所以是错误的；

对于④中，如果对于任意 $x\in(0,+\infty)$，都有 $f(x)>kx$，即 $e^x-e^{-x}-kx>0$ 恒成立，

令 $h(x)=e^x-e^{-x}-kx$，且 $h(0)=0$，

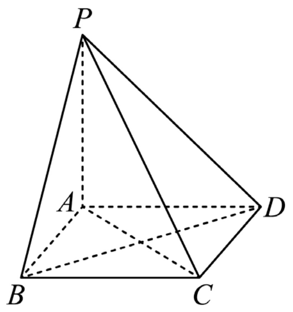
若 $h(x)>0$ 恒成立，则必有 $h'(x)=e^x+e^{-x}-k>0$ 恒成立，

若 $e^x+e^{-x}-k>0$，即 $k<e^x+e^{-x}=e^x+\frac{1}{e^x}$ 恒成立，

而 $e^x+\frac{1}{e^x}\geq 2$，若有 $k<2$，所以是正确的，综上可得①②④正确.

三、简答题.（共 85 分）

16. 如图,棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是矩形，$PA\perp$ 平面 $ABCD$，$PA=AD=2,BD=2\sqrt{2}$.



（1）求证：$BD\perp$平面PAC；

（2）求二面角$P-CD-B$的大小；

（3）求点C到平面PBD的距离.

【答案】（1）证明见解析；

（2）$\dfrac{\pi}{4}$

（3）$\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】

【分析】（1）先证明$ABCD$为正方形,可得$BD\perp AC$,由$PA\perp$平面$ABCD$,$BD\subset$平面$ABCD$,可得$BD\perp PA$，利用线面垂直的判定定理可得结果；

（2）先证$CD\perp PD$，即得$\angle PDA$为二面角$P-CD-B$的平面角.

（3）根据等体积法即可求得点C到平面PBD的距离.

【小问1详解】

在Rt□BAD中，$AD=2$,$BD=2\sqrt{2}$，

$\therefore AB=2$，$\therefore$底面$ABCD$为正方形,

因此$BD\perp AC$，

$\because PA\perp$平面$ABCD$,$BD\subset$平面$ABCD$,

$\therefore BD\perp PA$.

又$\because PA\cap AC=A$,$PA,AC\subset$平面PAC，

$\therefore BD\perp$平面PAC.

【小问2详解】

因为$PA\perp$平面$ABCD$，

所以AD为PD在平面$ABCD$上的射影.

又$CD\perp AD$,$CD\perp PA$，

$AD \cap PA = A$， $AD, PA \subset$ 平面 PAD，

$\therefore CD \perp$ 平面 PAD，而 $PD \subset$ 平面 PAD，

所以 $CD \perp PD$，

$\therefore \angle PDA$ 为二面角 $P-CD-B$ 的平面角.

又$\because PA = AD, \therefore \angle PDA = \dfrac{\pi}{4}$.

即二面角 $P-CD-B$ 的大小为 $\dfrac{\pi}{4}$.

【小问 3 详解】

$\because PA = AB = AD = 2$，

$\therefore PB = PD = BD = 2\sqrt{2}$，

所以 $S_{\triangle PBD} = \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$，

$S_{\triangle BCD} = \dfrac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$，

设 C 到平面 PBD 的距离为 d，

由 $V_{P-BCD} = V_{C-PBD}$，

有 $\dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle BCD} \cdot PA = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle PBD} \cdot d$，解得得 $d = \dfrac{2}{3}\sqrt{3}$.

即求点 C 到平面 PBD 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

17. 已知函数 $f(x) = 4a\cos x\sin(x - \dfrac{\pi}{6})$，且 $f(\dfrac{\pi}{3}) = 1$.

(Ⅰ) 求 a 的值及 $f(x)$ 的最小正周期；

(Ⅱ) 若 $f(x)$ 在区间 $[0, m]$ 上单调递增，求 m 的最大值.

【答案】(Ⅰ) $a = 1$, 最小正周期为 π；(Ⅱ) $\dfrac{\pi}{3}$.

【解析】

【分析】(Ⅰ)由题意首先确定 a 的值，然后整理函数的解析式为 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi) + b$ 的形式即可确定函数的最小正周期；

(Ⅱ)结合题中所给的区间 $[0, m]$ 和(Ⅰ)中确定的函数解析式得到关于 m 的不等式，求解不等式即可确定 m 的最大值.

【详解】（Ⅰ）由已知 $f(\frac{\pi}{3})=1$，得 $4a\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=1$，解得 $a=1$.

$f(x)=4\cos x\sin(x-\frac{\pi}{6})$

$=4\cos x(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x)$

$=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\cos^2 x$

$=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-1$

$=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$

所以 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$ 的最小正周期为 π.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})-1$.

当 $x\in[0,m]$ 时，$2x-\frac{\pi}{6}\in[-\frac{\pi}{6},2m-\frac{\pi}{6}]$，

若 $f(x)$ 在区间 $[0,m]$ 上单调递增，

则有 $2m-\frac{\pi}{6}\le\frac{\pi}{2}$，即 $m\le\frac{\pi}{3}$.

所以 m 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$.

【点睛】本题主要考查三角函数解析式的化简，三角函数的单调性，三角函数最小正周期的求解等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

18. 某学校为了解学生的体质健康状况，对高一、高二两个年级的学生进行体质健康测试．现从两个年级学生中各随机抽取 20 人，将他们的测试数据用茎叶图表示如下：

高一		高二
6 4 3	9	0 5 8
9 6 2 3	8	1 4 5 8
9 8 5 2 1	7	2 3 3 9
9 7 7 6 4	6	4 5 7 8
8 3 0	5	0 2 6
	4	0 2

《国家学生体质健康标准》的等级标准如下表．规定：测试数据≥60，体质健康为合格．

等级	优秀	良好	及格	不及格
测试数据	[90，100]	[80，89]	[60，79]	[0，59]

（1）从该校高二年级学生中随机抽取一名学生，试估计这名学生体质健康合格的概率；

（2）从两个年级等级为优秀的样本中各随机选取一名学生，求选取的两名学生的测试数据平均数大于 95 的概率；

（3）设该校高一学生测试数据的平均数和方差分别为 $\overline{x_1},s_1^2$，高二学生测试数据的平均数和方差分别为 $\overline{x_2},s_2^2$，试比较 $\overline{x_1}$ 与 $\overline{x_2}$、s_1^2 与 s_2^2 的大小.（只需写出结论）

【答案】（1）$\frac{3}{4}$

（2）$\frac{4}{9}$

（3）$\overline{x_1}>\overline{x_2},s_1^2<s_2^2$

【解析】

【分析】（1）根据古典概型的概率公式即可求得答案；

（2）利用列举法，结合古典概型的概率公式，即可求得答案；

（3）结合茎叶图中数据即可判断出结论.

【小问 1 详解】

由茎叶图可知高二学生样本中体质健康合格的人数为 $3+4+4+4=15$，

故样本中学生体质健康合格的频率为 $\frac{15}{20}=\frac{3}{4}$，

故从该校高二年级学生中随机抽取一名学生，估计这名学生体质健康合格的概率为 $\frac{3}{4}$.

【小问 2 详解】

设高一年级样本中测试数据为 $93,94,96$ 的三名学生分别为 a_1,a_2,a_3，

高一年级样本中测试数据为 $90,95,98$ 的三名学生分别为 b_1,b_2,b_3，

学区的 2 名学生构成的基本事件共有 $(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_2,b_1),(a_2,b_2),(a_2,b_3),(a_3,b_1),(a_3,b_2),(a_3,b_3)$，共 9 个，

其中两名学生的测试数据平均数大于 95 的有 $(a_1,b_3),(a_2,b_3),(a_3,b_2),(a_3,b_3)$，共 4 个，

故选取的两名学生的测试数据平均数大于 95 的概率为 $\frac{4}{9}$.

【小问 3 详解】

由茎叶图中相应分数段内数据可看出高一学生测试数据的平均数要大于高二学生测试数据的平均数，高一学生的测试数据比高二学生的测试数据更为集中，因此高一学生测试数据的方差要小于高二学生测试数据的方差，

故 $\overline{x_1} > \overline{x_2}, s_1^2 < s_2^2$.

19. 已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，以椭圆 C 的任意三个顶点为顶点的三角形的面积是 $2\sqrt{2}$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设 A 是椭圆 C 的右顶点，点 B 在 x 轴上．若椭圆 C 上存在点 P，使得 $\angle APB=90^\circ$，求点 B 横坐标的取值范围．

【答案】（1）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$；（2）$(-2,0)$

【解析】

【分析】（1）依题意得 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$ab=2\sqrt{2}$，结合 $a^2=b^2+c^2$ 解得 a,b，即可得椭圆 C 的方程；

（2）“椭圆 C 上存在点 P，使得 $\angle APB=90^\circ$”等价于“存在不是椭圆左、右顶点的点 P，使得 $\overrightarrow{PA}\square\overrightarrow{PB}=0$ 成立”，设出点 B 坐标，结合椭圆范围，即可解得点 B 横坐标的取值范围．

【详解】（1）设椭圆 C 的半焦距为 c．依题意，得 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$ab=2\sqrt{2}$，且 $a^2=b^2+c^2$.

解得 $a=2$，$b=\sqrt{2}$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$.

（2）“椭圆 C 上存在点 P，使得 $\angle APB=90^\circ$”等价于“存在不是椭圆左、右顶点的点 P，使得 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ 成立”.

由题知 $A(2,0)$.

设 $B(t,0)$，$P(m,n)$，则 $m^2+2n^2=4$，$\overrightarrow{PA}=(2-m,-n),\overrightarrow{PB}=(t-m,-n)$

由 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$ 得，$(2-m,-n)\cdot(t-m,-n)=0$，

即$(2-m)(t-m)+n^2=0$.

将$n^2=\dfrac{4-m^2}{2}$代入上式，得 $(2-m)(t-m)+\dfrac{4-m^2}{2}=0$.

因为$-2<m<2$，所以$t-m+\dfrac{2+m}{2}=0$，

即$m=2t+2$，所以$-2<2t+2<2$，解得$-2<t<0$，

所以，点B横坐标的取值范围是$(-2,0)$.

20. 已知函数$f(x)=\dfrac{1}{4}x^3-x^2+x$.

（Ⅰ）求曲线$y=f(x)$的斜率为1的切线方程；

（Ⅱ）当$x\in[-2,4]$时，求证：$x-6\le f(x)\le x$；

（Ⅲ）设$F(x)=|f(x)-(x+a)|(a\in\mathbf{R})$，记$F(x)$在区间$[-2,4]$上的最大值为$M$（$a$），当$M$（$a$）最小时，求$a$的值.

【答案】（Ⅰ）$x-y=0$和$27x-27y-64=0$.

（Ⅱ）见解析；

（Ⅲ）$a=-3$.

【解析】

【分析】(Ⅰ)首先求解导函数，然后利用导函数求得切点的横坐标，据此求得切点坐标即可确定切线方程；

(Ⅱ)由题意分别证得$f(x)-(x-6)\ge 0$和$f(x)-x\le 0$即可证得题中的结论；

(Ⅲ)由题意结合(Ⅱ)中的结论分类讨论即可求得a的值.

【详解】（Ⅰ）$f'(x)=\dfrac{3}{4}x^2-2x+1$，令$f'(x)=\dfrac{3}{4}x^2-2x+1=1$得$x=0$或者$x=\dfrac{8}{3}$.

当$x=0$时，$f(0)=0$，此时切线方程为$y=x$，即$x-y=0$；

当$x=\dfrac{8}{3}$时，$f(\dfrac{8}{3})=\dfrac{8}{27}$，此时切线方程为$y=x-\dfrac{64}{27}$，即$27x-27y-64=0$；

综上可得所求切线方程为$x-y=0$和$27x-27y-64=0$.

（Ⅱ）设$g(x)=f(x)-x=\dfrac{1}{4}x^3-x^2$，$g'(x)=\dfrac{3}{4}x^2-2x$，令$g'(x)=\dfrac{3}{4}x^2-2x=0$得$x=0$或者$x=\dfrac{8}{3}$，所以当$x\in[-2,0]$时，$g'(x)\ge 0$，$g(x)$为增函数；当$x\in(0,\dfrac{8}{3})$时，$g'(x)<0$，$g(x)$为减函数；当$x\in[\dfrac{8}{3},4]$时，$g'(x)\ge 0$，$g(x)$为增函数；

而 $g(0)=g(4)=0$，所以 $g(x)\le 0$，即 $f(x)\le x$；

同理令 $h(x)=f(x)-x+6=\frac{1}{4}x^3-x^2+6$，可求其最小值为 $h(-2)=0$，所以 $h(x)\ge 0$，即

$f(x)\ge x-6$，综上可得 $x-6\le f(x)\le x$.

（Ⅲ）由（Ⅱ）知 $-6\le f(x)-x\le 0$，

所以 $M(a)$ 是 $|a|,|a+6|$ 中的较大者，

若 $|a|\ge|a+6|$，即 $a\le -3$ 时，$M(a)=|a|=-a\ge 3$；

若 $|a|<|a+6|$，即 $a>-3$ 时，$M(a)=|a+6|=a+6>3$；

所以当 $M(a)$ 最小时，$M(a)=3$，此时 $a=-3$.

【点睛】本题主要考查利用导函数研究函数的切线方程，利用导函数证明不等式的方法，分类讨论的数学思想等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

21. 给定数列 $\{a_n\}$，若满足 $a_1=a$（$a>0$ 且 $a\ne 1$），对于任意的 $n,m\in\mathrm{N}^*$，都有 $a_{n+m}=a_n\cdot a_m$，则称数列 $\{a_n\}$ 为“指数型数列”.

（1）已知数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 的通项公式分别为 $a_n=5\times 3^{n-1},b_n=4^n$，试判断数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是不是“指数型数列”；

（2）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{1}{2},a_n=a_na_{n+1}+3a_{n+1}(n\in\mathrm{N}^*)$，判断数列 $\{\frac{1}{a_n}+1\}$ 是不是“指数型数列”. 若是，请给出证明，若不是，请说明理由；

（3）若数列 $\{a_n\}$ 是“指数型数列”，且 $a_1=\frac{a+1}{a+2}(a\in\mathrm{N}^*)$，证明数列 $\{a_n\}$ 中任意三项都不能构成等差数列.

【答案】（1）$\{a_n\}$ 不是指数型数列，$\{b_n\}$ 是指数型数列

（2）$\left\{\frac{1}{a_n}+1\right\}$ 不是“指数型数列”

（3）证明见详解

【解析】

【分析】（1）利用指数型数列的定义，判断即可；

（2）利用 $a_1=\dfrac{1}{2},a_n=a_na_{n+1}+3a_{n+1}(n\in\mathrm{N}^*)$，说明数列 $\{\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{2}\}$ 是等比数列，然后证明数列 $\{\dfrac{1}{a_n}+1\}$ 不是“指数型数列”；

（3）利用反证法，结合 n 为偶数以及奇数进行证明即可.

【小问 1 详解】

对于数列 $\{a_n\}$，$a_n\cdot a_m=5\times3^{n-1}\times5\times3^{m-1}=\dfrac{5}{3}\times\left(5\times3^{n+m-1}\right)\neq a_{n+m}$，

所以 $\{a_n\}$ 不是指数型数列.

对于数列 $\{b_n\}$，对任意 $n,m\in\mathrm{N}^*$，因为 $b_{n+m}=4^{n+m}=4^n\cdot4^m=b_n\cdot b_m$，

所以 $\{b_n\}$ 是指数型数列.

【小问 2 详解】

证明：由题意，$\{\dfrac{1}{a_n}+1\}$ 不是“指数型数列”，

由 $a_n=a_na_{n+1}+3a_{n+1}\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{3}{a_n}+1\Rightarrow\dfrac{1}{a_{n+1}}+\dfrac{1}{2}=3\left(\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{2}\right)$，

所以数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{2}\right\}$ 是等比数列，$\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{2}=\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{2}\right)\times3^{n-1}=\dfrac{5\cdot3^{n-1}}{2}$，

$\left(\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{a_m}+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5\cdot3^{n-1}}{2}\cdot\dfrac{5\cdot3^{m-1}}{2}=\dfrac{25\times3^{m+n-2}}{4}\neq\left(\dfrac{1}{a_{n+m}}+\dfrac{1}{2}\right)$，

数列 $\{\dfrac{1}{a_n}+1\}$ 不是“指数型数列”.

【小问 3 详解】

证明：因为数列 $\{a_n\}$ 是指数型数列，故对于任意的 $n,m\in\mathrm{N}^*$，

有 $a_{n+m}=a_n\cdot a_m$，$\Rightarrow a_{n+1}=a_n\cdot a_1\Rightarrow a_n=a_1^n=\left(\dfrac{a+1}{a+2}\right)^n$，

假设数列 $\{a_n\}$ 中存在三项 a_u，a_v，a_w 构成等差数列，不妨设 $u<v<w$，

则由 $2a_v=a_u+a_w$，得 $2\left(\dfrac{a+1}{a+2}\right)^v=\left(\dfrac{a+1}{a+2}\right)^u+\left(\dfrac{a+1}{a+2}\right)^w$，

所以 $2(a+2)^{w-v}(a+1)^{v-u}=(a+2)^{w-u}+(a+1)^{w-u}$，

当 a 为偶数时，$2(a+2)^{w-v}(a+1)^{v-u}$ 是偶数，

而 $(a+2)^{w-u}$ 是偶数，$(a+1)^{w-u}$ 是奇数，

故 $2(a+2)^{w-v}(a+1)^{v-u}=(a+2)^{w-u}+(a+1)^{w-u}$ 不能成立；

当 a 为奇数时，$2(a+2)^{w-v}(a+1)^{v-u}$ 是偶数，而 $(a+2)^{w-u}$ 是奇数，$(a+1)^{w-u}$ 是偶数，

故 $2(a+2)^{w-v}(a+1)^{v-u}=(a+2)^{w-u}+(a+1)^{w-u}$ 也不能成立.

所以，对任意 $a\in\mathrm{N}^*$，$2(a+2)^{w-v}(a+1)^{v-u}=(a+2)^{w-u}+(a+1)^{w-u}$ 不能成立，

即数列 $\{a_n\}$ 的任意三项都不成构成等差数列.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 “ 精益求精、专业严谨 ” 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。