2024届普通高等学校招生全国统一考试
青桐鸣大联考（高三）
数学答案

1. C 【解析】由题意得 $B=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，所以 $A\cap B=\{1,2\}$. 故选 C.

2. B 【解析】由 $(1+\mathrm{i})^2z=1+2\mathrm{i}$，得 $z=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}=\dfrac{1+2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}=1-\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$. 故选 B.

3. D 【解析】由于 c,d 的正负性不确定，由“$a>b>0$，$c>d$”不能推出“$ac>bd$”，故充分性不成立；同时当“$ac>bd$”时也不能推出“$a>b>0,c>d$”，故必要性也不成立. 故选 D.

4. B 【解析】由题意得 $\boldsymbol{a}=(2,-2)$，$\boldsymbol{b}=(4,5)$，则 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量是 $\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}\cdot\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{2\times4-2\times5}{\sqrt{16+25}}\cdot\dfrac{(4,5)}{\sqrt{16+25}}=\left(-\dfrac{8}{41},-\dfrac{10}{41}\right)$，

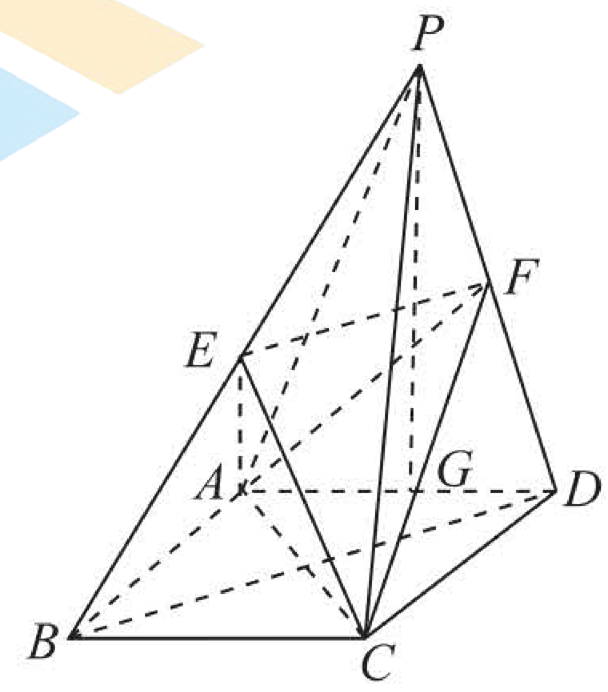
即 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量的坐标为 $\left(-\dfrac{8}{41},-\dfrac{10}{41}\right)$.

故选 B.

5. A 【解析】因为 $\tan\alpha=2$，则 $2\cos^2\alpha+\dfrac{\sin 2\alpha}{\tan\alpha}=2\cos^2\alpha+\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=4\cos^2\alpha=\dfrac{4\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{4}{\tan^2\alpha+1}=\dfrac{4}{5}$. 故选 A.

6. D 【解析】设 $g(x)=x\log_2 x$，则 $g'(x)=\log_2 x+\dfrac{1}{\ln 2}$，令 $g'(x)=0$，解得 $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$，当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 时，$g'(x)<0$，函数 $g(x)$ 单调递减. 又 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}>\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{4}$，所以 $g\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}\log_2\dfrac{1}{3}<g\left(\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{4}\log_2\dfrac{1}{4}<0$，又 $a=3^{-2\,024}>0$，综上可得 $a>c>b$. 故选 D.

7. B 【解析】如图，连接 BD，过点 P 作 $PG\perp AD$，垂足为 G，



因为 $PA=PD=\sqrt{10}$，所以 $PG=\sqrt{PD^2-\left(\dfrac{AD}{2}\right)^2}=3$，又侧面 $PAD\perp$ 底面 $ABCD$，且侧面 $PAD\cap$ 底面 $ABCD=AD$，所以 $PG\perp$ 底面 $ABCD$. 又底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，且 $\angle ABC=\dfrac{\pi}{3}$，所以 $S_{菱形ABCD}=2\times2\times\sin\dfrac{\pi}{3}=2\sqrt{3}$，所以 $V_{P\text{-}ABCD}=\dfrac{1}{3}S_{菱形ABCD}\cdot PG=\dfrac{1}{3}\times2\sqrt{3}\times3=2\sqrt{3}$. 又 $V_{四面体ACFE}=V_{P\text{-}ABCD}-V_{A\text{-}PEF}-V_{C\text{-}PEF}-V_{E\text{-}ABC}-V_{F\text{-}ACD}$，因为点 E,F 分别是 PB,PD 的中点，所以 $V_{A\text{-}PEF}=\dfrac{1}{4}V_{A\text{-}PBD}=\dfrac{1}{8}V_{P\text{-}ABCD}$，同理，$V_{C\text{-}PEF}=\dfrac{1}{8}V_{P\text{-}ABCD}$. $V_{E\text{-}ABC}=\dfrac{1}{2}V_{P\text{-}ABC}=\dfrac{1}{4}V_{P\text{-}ABCD}$，同理，$V_{F\text{-}ACD}=\dfrac{1}{4}V_{P\text{-}ABCD}$，故 $V_{四面体ACFE}=\left(1-\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\right)V_{P\text{-}ABCD}=\dfrac{1}{4}V_{P\text{-}ABCD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

故选 B.

8. A 【解析】设 $\angle CAO=\alpha$，则 $\angle BOC=\alpha$，$\angle OCA=\dfrac{3\pi}{4}$.

则在 $\triangle CAO$ 中，由正弦定理可得 $\dfrac{OC}{\sin\alpha}=\dfrac{OA}{\sin\dfrac{3}{4}\pi}$.

在 $\triangle CBO$ 中，由正弦定理可得 $\dfrac{OC}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}=$

$\frac{OB}{\sin\frac{\pi}{2}}$,解得 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$\cos\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$,∴ $BC=\frac{\sqrt{3}}{3}$,$OC=\frac{\sqrt{6}}{3}$,且 $\sin\angle COA=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$.

∴ $S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}OC\cdot BC=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{2}}{6}$,

$S_{\triangle COA}=\frac{1}{2}OA\cdot OC\cdot\sin\angle COA=\frac{1}{2}\times1\times\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}=\frac{\sqrt{2}-1}{6}$.

∴ $S_{阴影}=\frac{\frac{\pi}{4}}{2\pi}\times\pi-\frac{\sqrt{2}}{6}-\frac{\sqrt{2}-1}{6}=\frac{\pi}{8}-\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{6}$.

故选 A.

9. AC 【解析】若 $l_1\perp\alpha$,则 l_1 垂直于任一条平行于 α 的直线,又 $l_2/\!/\alpha$,则 $l_1\perp l_2$,故 A 正确;

若 $l_1\subset\alpha$,$l_2/\!/\alpha$ 不能推出 $l_1/\!/l_2$,故 B 错误;

若 $l_1\cap l_2=A$,则 $A\in\alpha$,$A\in\beta$,又 $\alpha\cap\beta=l_3$,故 $A\in l_3$,故 C 正确;

若 $l_1\cap\beta=A$,$l_2\cap\beta=B$,则 AB 为 β 内的一条直线,$AB/\!/\alpha$ 不一定对,故 D 错误. 故选 AC.

10. AD 【解析】由 $T_1>T_2$,$E_a>0$,$R>0$,得 $-\frac{E_a}{RT_1}>-\frac{E_a}{RT_2}$,又 $A>0$,故 $k_1>k_2$,故 A 选项正确,B 选项错误;

$\frac{k_1}{k_2}=e^{-\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)}$,若 $T_2=3T_1$,则 $\ln\frac{k_1}{k_2}=-\frac{2}{3}\frac{E_a}{RT_1}=\frac{2}{3}M$,故 C 选项错误,D 选项正确.

故选 AD.

11. BD 【解析】根据图象可知 $\frac{1}{2}T=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=2\pi$,解得 $T=4\pi$,则 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{1}{2}$,又 $A=1$,由题得 $\sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}+\varphi\right)=0$,$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$,解得 $\varphi=-\frac{\pi}{4}$,A 错误;函数 $f(x)=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$,将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度,得到 $g(x)=\sin\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{4}\right]=\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{12}\right)$ 的图象,B 正确;$f(2\pi)=\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}\neq0$,故 C 错误;

当 $x\in[0,\pi]$ 时,$\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{4}\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$,此时函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$,D 正确. 故选 BD.

12. BC 【解析】令 $f(x)=(x-1)\ln x$,则 $f'(x)=\ln x+1-\frac{1}{x}$,易知 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

又∵ $f'(1)=0$,∴ $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递减,在 $(1,+\infty)$ 上单调递增,∴ $f(1)=0$,且当 $x\to0$ 时,$f(x)\to+\infty$,当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)\to+\infty$,

由题意知,过 $(-1,0)$ 作直线 $y=m(x+1)$ 与 $y=f(x)$ 的图象有 2 个交点,则 $m>0$,A 错误;

令 $g(x)=\frac{x-1}{x+1}\cdot\ln x$,则 $g(x_1)=g(x_2)=m$,

又 $g\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1}\cdot\ln\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x+1}\cdot\ln x=g(x)$,

∴ $x_1=\frac{1}{x_2}$,即 $x_1x_2=1$,B 正确;

由 $\begin{cases}\ln x_1=\frac{m(x_1+1)}{x_1-1},\\ \ln x_2=\frac{m(x_2+1)}{x_2-1},\end{cases}$ 得 $\frac{\ln x_1}{\ln x_2}=\frac{x_1x_2-x_1+x_2-1}{x_1x_2-x_2+x_1-1}=-1=-x_1x_2$,

∴ $\frac{\ln x_1}{x_1}=-x_2\ln x_2=x_2\ln\frac{1}{x_2}$,C 正确;

$(\ln x_1)^2=-\ln x_1\cdot\ln x_2=-\frac{x_1x_2+x_1+x_2+1}{x_1x_2-x_1-x_2+1}\cdot m^2=\frac{2+(x_1+x_2)}{-2+(x_1+x_2)}\cdot m^2$,

∴ $\left(\frac{\ln x_1}{m}\right)^2=\frac{(x_1+x_2)-2+4}{-2+(x_1+x_2)}=\frac{4}{x_1+x_2-2}+1$,

D 错误. 故选 BC.

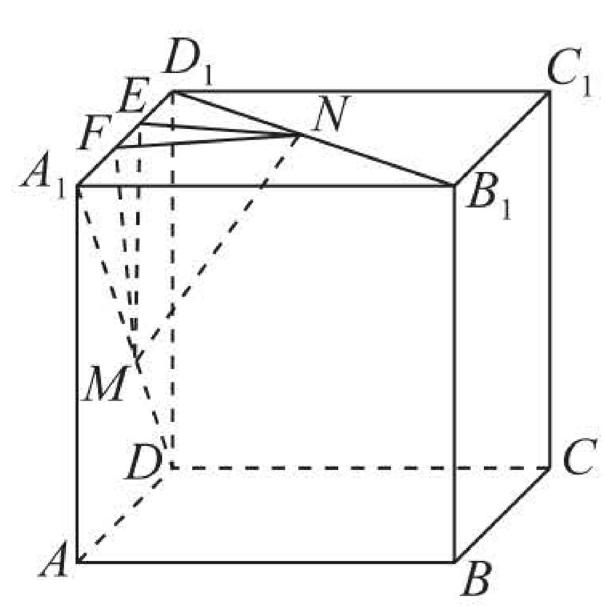
13. -7 【解析】由题可知 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(-3,1+m)$，$\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}=(-2,1)$，则 $(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})=6+(m+1)=0$，解得 $m=-7$.

14. 32 【解析】由题 $a_2a_4=a_3^2=16$，解得 $a_3=4$，由 $a_3-a_2=2$，得 $a_2=2$，则 $a_4=8$.

由 $a_2a_6=a_4^2$，得 $a_6=\dfrac{a_4^2}{a_2}=32$.

15. 0 【解析】因为 $f(x)+g(1-x)=a$，所以 $f(-x)+g(1+x)=a$. 又 $g(1+x)=g(1-x)$，可得 $f(x)=f(-x)$，故 $f(x)$ 为偶函数. 又 $f(x+2)$ 为奇函数，所以 $f(x+2)=-f(-x+2)$，则 $f(x+4)=-f(-x)=-f(x)$，所以 $f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$，故函数 $f(x)$ 的周期为 8，故 $f(10)=f(2)=0$.

16. $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$ 【解析】设 $DM=x$，则 $D_1N=2x$，其中 $x\in\left[0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$，作 $ME\parallel DD_1$，$NF\parallel A_1B_1$，连接 MF，NE，如图所示，



易得 $ME\perp NE$，$NF\perp MF$，$MN^2=MF^2+NF^2$，

由 $DM=x$ 得 $D_1E=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，由 $D_1N=2x$ 得 $D_1F=\sqrt{2}x$，

$\therefore EF=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，$ME=A_1E=1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x$，$\therefore MF^2=EF^2+ME^2=x^2-\sqrt{2}x+1$，

又 $NF=\sqrt{2}x$，$\therefore MN^2=3x^2-\sqrt{2}x+1=3\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{6}\right)^2+\dfrac{5}{6}\geqslant\dfrac{5}{6}$，

$\therefore$ 当 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ 时，MN 取最小值 $\dfrac{\sqrt{30}}{6}$.

17. 解：(1) $f(x)=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)+2\sqrt{3}\sin x\cos x=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x=2\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，（3 分）

则 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\dfrac{2\pi}{2}=\pi$.（5 分）

(2) 令 $t=2x-\dfrac{\pi}{3}$，因为 $x\in\left[0,\dfrac{3}{2}\pi\right)$，所以 $t\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{8}{3}\pi\right)$，（6 分）

由 $y=\cos t$ 的图象可得，当 $t\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{8}{3}\pi\right)$ 时，$y=\cos t$ 即 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{3}{2}\pi\right)$ 上的零点个数为 3，（8 分）

极值点个数为 3.（10 分）

18. 解：(1) 证明：由题意得 $O_1C=O_2G$，$O_1C\parallel O_2G$，

所以四边形 O_1O_2GC 为平行四边形，

所以 $O_1O_2\parallel CG$，（1 分）

而 $O_1O_2\subset$ 平面 O_1O_2FE，$CG\not\subset$ 平面 O_1O_2FE，

所以 $CG\parallel$ 平面 O_1O_2FE.（2 分）

因为 G，H 分别为 O_2B，BF 的中点，

所以 HG 为 $\triangle BO_2F$ 的中位线，所以 $HG\parallel O_2F$.（3 分）

而 $O_2F\subset$ 平面 O_1O_2FE，$HG\not\subset$ 平面 O_1O_2FE，

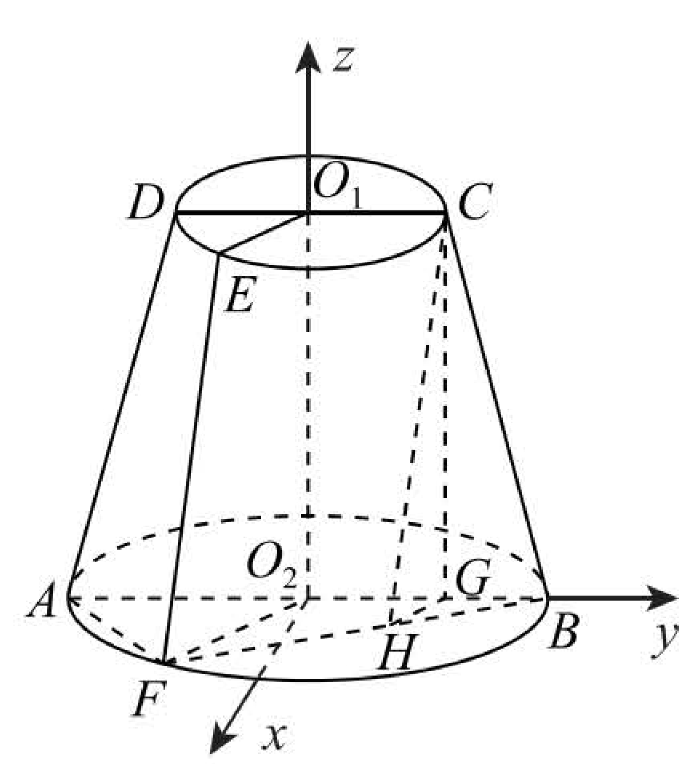
所以 $HG\parallel$ 平面 O_1O_2FE，（4 分）

又 CG，$HG\subset$ 平面 CGH，且 $CG\cap HG=G$，

所以平面 $CGH\parallel$ 平面 O_1O_2FE.（5 分）

(2)（方法一）易知 $O_1O_2\perp O_2B$，以 O_2 为坐标原点，以 O_2B，O_1O_2 所在直线分别为 y 轴、z 轴，在底面圆 O_2 内过 O_2 作 AB 的垂线为 x 轴，建立如图所示的空间直角坐标系 O_2-xyz.

设圆台的高为 $h(h>0)$，



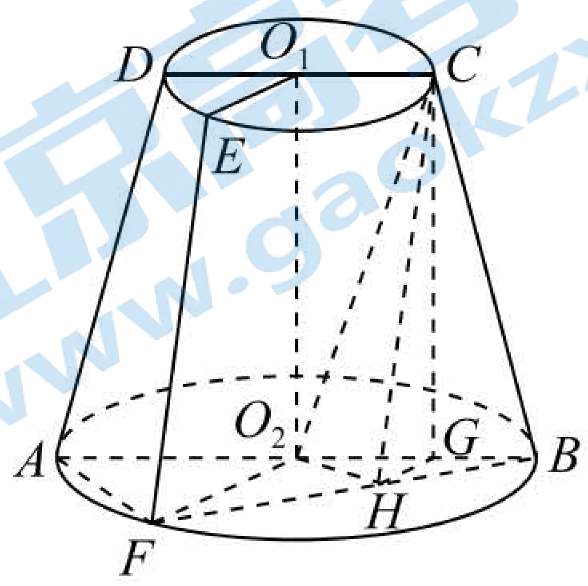
则 $A(0,-4,0)$，$F(2\sqrt{3},-2,0)$，$C(0,2,h)$，$H(\sqrt{3},1,0)$，（6 分）

则 $\overrightarrow{AF}=(2\sqrt{3},2,0)$，$\overrightarrow{CH}=(\sqrt{3},-1,-h)$，（8 分）

由 $|\cos\langle\overrightarrow{AF},\overrightarrow{CH}\rangle|=\dfrac{|\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CH}|}{|\overrightarrow{AF}||\overrightarrow{CH}|}=\dfrac{6-2}{4\sqrt{h^2+4}}=\dfrac{\sqrt{10}}{20}$，（10 分）

解得 $h=6$.（12 分）

（方法二）设圆台的高为 $h(h>0)$，连接 O_2H 和 CO_2，



因为点 O_2 和 H 分别为 AB 和 FB 的中点，

故 O_2H 为 $\triangle ABF$ 的中位线，

所以 $O_2H/\!/AF$，

则 $\angle CHO_2$ 为异面直线 AF 与 CH 所成的角，（6 分）

同理可得 $GH=\dfrac{1}{2}O_2F=2$，则 $O_2G=GH$，（7 分）

由（1）知 $O_1O_2/\!/CG$，则 $CG\perp O_2G$，$CG\perp HG$，

由勾股定理可得 $CH=CO_2=\sqrt{CG^2+HG^2}=\sqrt{h^2+4}$.（8 分）

由 $\angle DO_1E=60°$，EF 为圆台的母线得，$\angle AO_2F=60°$，则 $\triangle AO_2F$ 为等边三角形，则 $AF=4$，

故 $O_2H=\dfrac{1}{2}AF=2$，（9 分）

则在 $\triangle CO_2H$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle CHO_2=\dfrac{O_2H^2+CH^2-CO_2^2}{2O_2H\cdot CH}=\dfrac{4}{4\sqrt{h^2+4}}=\dfrac{\sqrt{10}}{20}$，（10 分）

解得 $h=6$.（12 分）

19. **证明：**（1）由题意可得 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{3}{a_2}+\dfrac{5}{a_3}+\cdots+\dfrac{2n-1}{a_n}=\dfrac{a_n+1}{2}$①，

当 $n\geqslant 2$ 时，$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{3}{a_2}+\dfrac{5}{a_3}+\cdots+\dfrac{2n-3}{a_{n-1}}=\dfrac{a_{n-1}+1}{2}$②，（2 分）

①－②得 $\dfrac{2n-1}{a_n}=\dfrac{a_n-a_{n-1}}{2}$，（3 分）

故 $a_n^2-a_na_{n-1}=4n-2(n\geqslant 2)$.（4 分）

（2）由（1）可得当 $a_n-a_{n-1}=2$ 时，$a_n=2n-1$，（5 分）

此时 $c_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$，（7 分）

故 $T_n=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2n+1}\right)<\dfrac{1}{2}$，（10 分）

易知 $\{T_n\}$ 是一个单调递增的数列，

且当 $n=1$ 时，T_n 取得最小值 $\dfrac{1}{3}$，（11 分）

故 $\dfrac{1}{3}\leqslant T_n<\dfrac{1}{2}$.（12 分）

20. **解：**（1）因为点 E 为 AC 的中点，

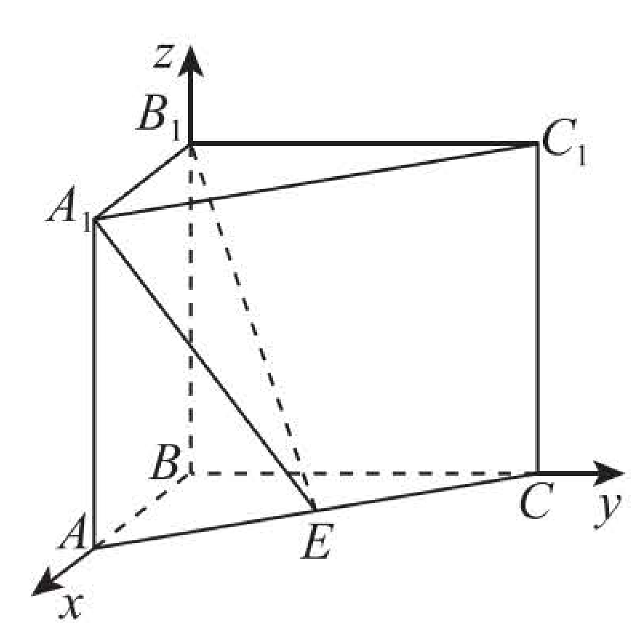
所以 $\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$，（1 分）

两边平方可得 $\overrightarrow{BE}^2=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{BA}^2+\overrightarrow{BC}^2+2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC})=\dfrac{1}{4}\left(1+4+2\times1\times2\cos\dfrac{2}{3}\pi\right)=\dfrac{3}{4}$，（3 分）

故 $BE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.（4 分）

（2）由题意及 $\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$，知 BA，BC，BB_1 两两互相垂直，

所以以 B 为坐标原点，BA，BC，BB_1 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $A_1(1,0,2)$,$B_1(0,0,2)$,$E\left(\frac{1}{2},1,0\right)$,$C(0,2,0)$,

则 $\overrightarrow{B_1A_1}=(1,0,0)$,$\overrightarrow{A_1E}=\left(-\frac{1}{2},1,-2\right)$,$\overrightarrow{EC}=\left(-\frac{1}{2},1,0\right)$, (5 分)

设平面 B_1A_1E 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{A_1E}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{B_1A_1}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\frac{1}{2}x_1+y_1-2z_1=0,\\ x_1=0,\end{cases}$

取 $z_1=1$,可得 $\boldsymbol{m}=(0,2,1)$. (7 分)

设平面 A_1ECC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\overrightarrow{A_1E}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{EC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-\frac{1}{2}x_2+y_2-2z_2=0,\\ -\frac{1}{2}x_2+y_2=0,\end{cases}$

取 $y_2=1$,可得 $\boldsymbol{n}=(2,1,0)$. (9 分)

设 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 的夹角为 α,二面角 B_1-A_1E-C 的平面角为 β,

则 $|\cos\beta|=|\cos\alpha|=\frac{|\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{5}$, (10 分)

由图观察可得该二面角的平面角为锐角,

故 $\cos\beta=\frac{2}{5}$,$\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\frac{\sqrt{21}}{5}$, (11 分)

所以 $\tan\beta=\frac{\sin\beta}{\cos\beta}=\frac{\sqrt{21}}{2}$,

即二面角 B_1-A_1E-C 的平面角的正切值为 $\frac{\sqrt{21}}{2}$. (12 分)

21. **解**:(1)证明:由已知得 $\tan^2C+\tan^2C\cdot\cos B=1-\cos B$,

$\therefore\cos B=\frac{1-\tan^2C}{1+\tan^2C}=\frac{\cos^2C-\sin^2C}{\cos^2C+\sin^2C}=\cos 2C$. (2 分)

又 $B,C\in(0,\pi)$,且 $B+C\in(0,\pi)$,

$\therefore B=2C$. (4 分)

(2)由(1)可得 $\sin B=2\sin C\cos C$,

由正弦定理可得 $b=2c\cos C=2$,

$\therefore\cos C=\frac{1}{c}$,$\sin C=\sqrt{1-\frac{1}{c^2}}$. (5 分)

$\because B+C\in(0,\pi)$,$\therefore 3C\in(0,\pi)$,

$\therefore C\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$,

$\therefore\cos C\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,

$\therefore c\in(1,2)$. (6 分)

又 $\sin A=\sin(\pi-B-C)=\sin 3C=3\sin C-4\sin^3C$, (7 分)

$\therefore a=3c-4c\cdot(1-\cos^2C)=3c-4c\cdot\left(1-\frac{1}{c^2}\right)=\frac{4}{c}-c$, (8 分)

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\left(\frac{4}{c}-c\right)\cdot\sqrt{1-\frac{1}{c^2}}=\left(\frac{4}{c^2}-1\right)\cdot\sqrt{c^2-1}$. (9 分)

令 $t=\frac{1}{c^2}\in\left(\frac{1}{4},1\right)$,则 $t=\cos^2C$,

则 $\cos B=2\cos^2C-1=2t-1$.

设 $S(t)=(4t-1)\cdot\sqrt{\frac{1}{t}-1}$,$t\in\left(\frac{1}{4},1\right)$,

则 $S'(t)=4\sqrt{\frac{1}{t}-1}+\frac{-\frac{1}{t^2}}{2\sqrt{\frac{1}{t}-1}}\cdot(4t-1)=\frac{\frac{1}{t^2}+\frac{4}{t}-8}{2\sqrt{\frac{1}{t}-1}}$,

令 $S'(t)=0$,得 $\frac{1}{t}=2\sqrt{3}-2$,

即 $t=\frac{\sqrt{3}+1}{4}\in\left(\frac{1}{4},1\right)$,

当 $\frac{1}{4}<t<\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ 时,$S'(t)>0$;当 $\frac{\sqrt{3}+1}{4}<t<1$ 时,$S'(t)<0$, (11 分)

则当 $t=\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ 时,$S(t)$ 取得最大值,此时 $S_{\triangle ABC}$ 最大,

则 $\cos B=2t-1=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. (12 分)

22. **证明**:(1)令 $g(t)=t-1-\ln t$,$t\in(0,+\infty)$,

则 $g'(t)=1-\frac{1}{t}$,令 $g'(t)=0$,得 $t=1$, (1 分)

$\therefore g(t)$在$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，

$\therefore$当$t\neq1$时，$g(t)>g(1)=0$.　　（2 分）

令$t=\dfrac{1}{1-x}$，由$x\neq0$得，$t\neq1$，可得$g\left(\dfrac{1}{1-x}\right)>0$，

$\therefore \dfrac{x}{1-x}>\ln\dfrac{1}{1-x}$，

即$\dfrac{x}{1-x}>f(x)$.　　（4 分）

(2)由(1)知$a_n=f(a_{n+1})<\dfrac{a_{n+1}}{1-a_{n+1}}$，

则$\dfrac{1}{a_n}>\dfrac{1-a_{n+1}}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_{n+1}}-1$，

即$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}<1$，　　（5 分）

则当$n\geqslant2$时，$\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n-1}}<1,\cdots,\dfrac{1}{a_2}-\dfrac{1}{a_1}<1$，

则$\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_1}<n-1$，

则$a_n>\dfrac{a_1}{(n-1)a_1+1}(n\geqslant2)$，　　（6 分）

$\therefore$当$n\geqslant2$时，$S_n>a_1\left(1+\dfrac{1}{a_1+1}+\dfrac{1}{2a_1+1}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)a_1+1}\right)>a_1\cdot\left[\dfrac{n-1}{(n-1)a_1+1}+1\right]=\dfrac{(n-1)a_1^2+na_1}{(n-1)a_1+1}$，　　（8 分）

接下来只需证明：$\dfrac{(n-1)a_1^2+na_1}{(n-1)a_1+1}>\dfrac{2na_1}{n+2a_1}$，

即$\dfrac{(n-1)a_1+n}{(n-1)a_1+1}>\dfrac{2n}{n+2a_1}$，

即证$(1-a_1)n^2+(2a_1-1)(a_1+2)n-2a_1^2>0$，

（9 分）

由函数$h(x)=(1-a_1)x^2+(2a_1-1)(a_1+2)x-2a_1^2$中，

$1-a_1>0$，对称轴为$x=\dfrac{(2a_1-1)(a_1+2)}{2(a_1-1)}$，

试证$\dfrac{(2a_1-1)(a_1+2)}{2(a_1-1)}<2$，

即证$2a_1^2+3a_1-2>4a_1-4$，

即证$2a_1^2+2-a_1>0$，显然成立，

$\therefore h(x)$在$[2,+\infty)$上单调递增，　　（11 分）

$\therefore(1-a_1)n^2+(2a_1-1)(a_1+2)n-2a_1^2>4(1-a_1)+2(2a_1-1)(a_1+2)-2a_1^2=2(a_1^2+a_1)>0$成立，

综上，$S_n>\dfrac{2na_1}{n+2a_1}(n\geqslant2)$.　　（12 分）