理科数学参考解答及评分参考

1.A 2.C 3.C 4.A 5.D 6.A 7.D 8.C 9.B 10.C 11.B 12.D

13.2 14.$\frac{1}{2}$ 15.$\sqrt{10}$ 16.$3\sqrt{3}$

17.解析：(1)由题，

得 $K^2=\frac{200\times(20\times50-30\times100)^2}{50\times150\times120\times80}=\frac{100}{9}\approx11.11>6.635$，…… 2分

因此，有99%的把握认为客户对该产品的评价结果与性别有关系. …… 4分

(2)顾客甲若想采用方案二的方式购买一件产品，设可能支付的金额为X，X的值可能为180，220. …… 5分

由题 $P(X=180)=\frac{4}{10}=0.4$；$P(X=220)=\frac{6}{10}=0.6$， …… 7分

则 $E(X)=180\times0.4+220\times0.6=204$(元)，

顾客甲若采用方案二的方式购买一件产品，需支付金额的估计值为204(元). …… 9分

顾客甲若采用方案一的方式购买一件产品，需支付金额为$260\times0.8=208$(元). …… 11分

所以，该顾客采用方案二的方式购买较为合理. …… 12分

18.解析：(1)由已知 $a_1+a_1=4$，$a_3=6$，所以 $a_1=2$，

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=2n$. …… 2分

设等比数列$\{b_n\}$的公比为q，由 $b_1=3$，$b_3-b_2=18$

则 $3q^2-3q=18$，即 $q^2-q-6=0$，

解得 $q=3$，$q=-2$(舍去)，

所以数列$\{b_n\}$的通项公式为 $b_n=3^n$. …… 5分

(2)由(1)得 $c_n=2n\cdot3^n$，

所以 $T_n=2\times3+4\times3^2+6\times3^3+\cdots+2n\cdot3^n$ ① …… 7分

$3T_n=2\times3^2+4\times3^3+6\times3^4+\cdots+2(n-1)3^n+2n\cdot3^{n+1}$ ② …… 8分

①−②得 $-2T_n=2\times3+2\times3^2+2\times3^3+\cdots+2\times3^n-2n\cdot3^{n+1}$，

所以 $-T_n=3+3^2+3^3+\cdots+3^n-n\cdot3^{n+1}=\frac{3(1-3^n)}{1-3}-n\cdot3^{n+1}$， …… 10分

即 $-T_n=-\frac{3}{2}+\frac{3^{n+1}}{2}-n\cdot3^{n+1}$，

所以 $T_n=\frac{3}{2}+\frac{2n-1}{2}\cdot3^{n+1}$. …… 12分

19. 解析：(Ⅰ)证明：设 $PN\perp$ 平面 ABC 于点 N，

过 N 作 $NE\perp AB$ 于 E，$NF\perp AC$ 于 F，连接 PE、PF.

因为 $PN\perp$ 平面 ABC，$AB\subset$ 平面 ABC，所以 $PN\perp AB$.

又因为 $NE\perp AB$，所以 $AB\perp$ 平面 PNE，所以 $AB\perp PE$，同理 $AC\perp PF$. ………………… 2 分

在 $Rt\triangle PAE$，$Rt\triangle PAF$ 中，$\angle PAE=\angle PAF$，$PA=PA$，

故 $\triangle PAE\cong\triangle PAF$，所以 $AF=AE$.

在 $Rt\triangle ANE$，$Rt\triangle ANF$ 中，$AF=AE$，$AN=AN$，

故 $\triangle ANE\cong\triangle ANF$，所以 $NE=NF$. ……………………………………………………… 4 分

即 N 到 AB，AC 的距离相等，同理 N 到 BC，AC 的距离相等，

故 N 为 $\triangle ABC$ 的内心，N 与 H 重合.

所以 $PH\perp$ 平面 ABC.

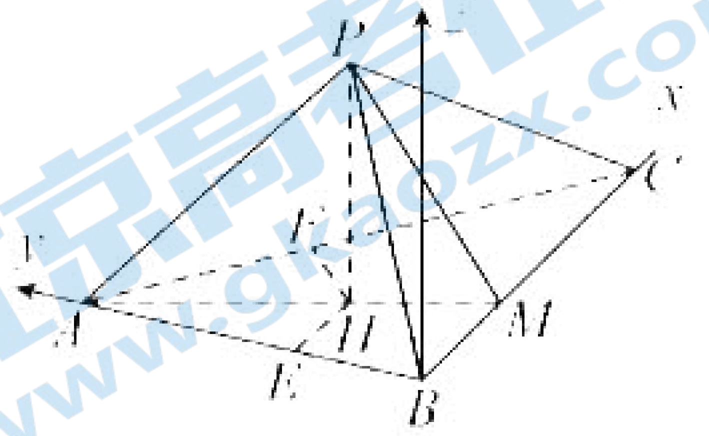
又因为 $PH\subset$ 平面 APM，所以平面 $PAM\perp$ 平面 ABC. ……………………………………… 6 分

(2)由于 $AB\perp BC$，故可以以 B 为坐标原点，BC 为 x 轴，BA 为 y 轴建立如图所示空间直角坐标系，则 $B(0,0,0)$，$C(4,0,0)$，$A(0,3,0)$. ……………………………………………… 7 分

设 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r，则 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times4\times3=\frac{1}{2}r(3+4+5)$，故 $r=1$.

所以 $H(1,1,0)$，$AH=\sqrt{r^2+AE^2}=\sqrt{5}$，$PH=\sqrt{AP^2-AH^2}=2$，故 $P(1,1,2)$.

所以 $\overrightarrow{HP}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{HA}=(-1,2,0)$，



设平面 AHP 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=(x_1,y_1,z_1)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{HP}=2z_1=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{HA}=-x_1+2y_1=0.\end{cases}$ 令 $y_1=1$，

故平面 AHP 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(2,1,0)$. ……………………………………………… 9 分

同理 $\overrightarrow{AP}=(1,-2,2)$，$\overrightarrow{AC}=(4,-3,0)$，

设平面 ACP 的法向量 $\boldsymbol{n}_2=(x_2,y_2,z_2)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AP}=x_2-2y_2+2z_2=0,\\ \boldsymbol{n}_2\cdot\overrightarrow{AC}=4x_2-3y_2=0.\end{cases}$ 令 $x_2=6$，

故平面 ACP 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}_2=(6,8,5)$. ……………………………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle=\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1|\cdot|\boldsymbol{n}_2|}=\frac{4}{5}$，

故二面角 $M-PA-C$ 的余弦值为 $\frac{4}{5}$. ……………………………………………………… 12 分

20. 解析：(1)椭圆经过点 A,T，代入椭圆 E 的方程，得$\begin{cases} b^2=1, \\ \dfrac{64}{25a^2}+\dfrac{9}{25b^2}=1, \end{cases}$ 解得$\begin{cases} a^2=4, \\ b^2=1. \end{cases}$

所以椭圆 E 的方程为：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$. …………………………………………………… 2 分

由$\angle MAT=\angle NAT$ 知 AM 与 AN 关于直线 $AT: y=x+1$ 对称，

在 AM 上任取一点 $P_0(x_0,y_0)$，

则 P_0 关于直线 $y=x+1$ 对称的点为 $P'_0(y_0-1,x_0+1)$，…………………………………… 3 分

从而 $k_1=k_{AP_0}=\dfrac{y_0-1}{x_0}$，$k_2=k_{AP'_0}=\dfrac{(x_0+1)-1}{y_0-1}$，

于是 $k_1k_2=1$. …………………………………………………………………………………… 4 分

(2)设点 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$AM: y=k_1x+1$，

由$\begin{cases} y=k_1x+1, \\ \dfrac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases}$ 得$(4k_1^2+1)x^2+8k_1x=0$，所以 $x_1=-\dfrac{8k_1}{4k_1^2+1}$，

同理 $x_2=-\dfrac{8k_2}{4k_2^2+1}$，

由(1)有 $k_1k_2=1$，故 $x_2=-\dfrac{8k_1}{4+k_1^2}$. ………………………………………………… 6 分

为方便，记 $k_1=k$，并不妨设 $k>1$，则

于是 $S_{\triangle AMN}=\dfrac{1}{2}|AM|\cdot|AN|\sin\angle MAN=\dfrac{1}{2}|AM|\cdot|AN|\sqrt{1-\cos^2\angle MAN}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{|AM|^2|AN|^2-(\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN})^2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{(x_1^2+k_1^2x_1^2)(x_2^2+k_2^2x_2^2)-(x_1x_2+k_1x_1k_2x_2)^2}$

$=\dfrac{1}{2}|x_1k_2x_2-x_2k_1x_1|$ ………………………………………………………………… 8 分

$=\dfrac{1}{2}|k_2-k_1|\cdot|x_1x_2|=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{1}{k}-k\right|\cdot\dfrac{-8k}{4k^2+1}\cdot\dfrac{-8k}{4+k^2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{k^2-1}{k}\cdot\dfrac{64k^2}{(4k^2+1)(4+k^2)}$

$=\dfrac{32k(k^2-1)}{(4k^2+1)(4+k^2)}=\dfrac{32k(k^2-1)}{4k^4+17k^2+4}$ ………………………………………… 10 分

$=\dfrac{32\left(k-\dfrac{1}{k}\right)}{4k^2+\dfrac{4}{k^2}+17}=\dfrac{32t}{4t^2+25}\leqslant\dfrac{32}{2\sqrt{4\times25}}=\dfrac{32}{2\times10}=\dfrac{8}{5}$（其中 $t=k-\dfrac{1}{k}>0$），

当且仅当 $t=\frac{5}{2}$，即 $k+\frac{1}{k}=\frac{5}{2}$ 时取等.

所以，$\triangle AMN$ 面积的最大值为 $\frac{\text{[illegible]}}{5}$. ………………………………………………………… 12 分

21. 解析：(Ⅰ)由题 $f(x)=ae^x-x^2$ 得 $f'(x)=ae^x-2x$，

因为函数 $f(x)$ 有两个极值点，

所以方程 $f'(x)=0$ 有两个不同实数根，即方程 $a=\frac{2x}{e^x}$ 有两个不同实数根， ……………… 2 分

设 $u(x)=\frac{2x}{e^x}$，则 $u'(x)=\frac{2-2x}{e^x}$，

知 $x<1$ 时，$u'(x)>0$，则 $u(x)$ 单调递增，$x>1$ 时，$u'(x)<0$，则 $u(x)$ 单调递减，

所以，$x=1$ 时，$u(x)$ 取得极大值 $u(1)=\frac{2}{e}$，

又 $x<0$ 时，$u(x)<0$；$x>0$ 时，$u(x)>0$，且 $x\to+\infty$ 时，$u(x)\to 0$，

所以，方程 $a=\frac{2x}{e^x}$ 有两个不同实数根时，有 $0<a<\frac{2}{e}$.

即 $f(x)$ 有两个极值点时，a 的取值范围是 $\left(0,\frac{2}{e}\right)$ ………………………………………… 5 分

(2)由(Ⅰ)可知，$f(x)$ 的两个极值点 x_1，x_2 是方程 $ae^x-2x=0$ 的两根，

且 $0<a<\frac{2}{e}$，$0<x_1<1<x_2$，则有 $ae^{x_1}-2x_1=0$，$ae^{x_2}-2x_2=0$，

两式相除，得 $e^{x_2-x_1}=\frac{x_2}{x_1}$，则有 $x_2-x_1=\ln\frac{x_2}{x_1}>0$. ………………………………………… 6 分

由 $ex_1+(e-2)x_2\geqslant\lambda x_1x_2$ 得 $(x_2-x_1)[ex_1+(e-2)x_2]\geqslant\lambda x_1x_2\ln\frac{x_2}{x_1}$，

所以 $\lambda\leqslant\dfrac{2+(e-2)\frac{x_2}{x_1}-e\cdot\frac{x_1}{x_2}}{\ln\frac{x_2}{x_1}}$，令 $t=\frac{x_2}{x_1}>1$， ………………………………………… 7 分

令 $h(t)=\dfrac{2+(e-2)t-e\cdot\frac{1}{t}}{\ln t}$ $(t>1)$，则需 $\lambda\leqslant h(t)$ 恒成立，

$h'(t)=\dfrac{[(e-2)t^2+e]\ln t-2t-(e-2)t^2+e}{t^2\ln^2 t}$，

令 $\varphi(t)=[(e-2)t^2+e]\ln t-2t-(e-2)t^2+e$，

则 $\varphi'(t)=2(e-2)t\ln t-2-(e-2)t+e\cdot\frac{1}{t}$， ………………………………………… 8 分

令 $p(t)=\varphi'(t)=2(e-2)t\ln t-2-(e-2)t+e\cdot\frac{1}{t}$,

$p'(t)=2(e-2)\ln t+2(e-2)-e\cdot\frac{1}{t^2}-e+2$ 在 $(1,+\infty)$ 上递增,

可知 $p'(1)<0$,$p'(e)>0$,则存在 $t_0\in(1,e)$,使得 $p'(t_0)=0$,

当 $t\in(1,t_0)$ 时,$p'(t)<0$,则 $p(t)$ 即 $\varphi'(t)$ 单调递减,当 $t\in(t_0,+\infty)$ 时,$p'(t)>0$,$p(t)$ 即 $\varphi'(t)$ 单调递增,

又 $\varphi'(1)=0$,$\varphi'(e)>0$,所以存在 $t_1\in(1,e)$,使得 $\varphi'(t_1)=0$, ………………………… 10 分

当 $t\in(1,t_1)$ 时,$\varphi'(t)<0$,$\varphi(t)$ 单调递减,$t\in(t_1,+\infty)$ 时,$\varphi'(t)>0$,$\varphi(t)$ 单调递增,

又 $\varphi(1)=\varphi(e)=0$,所以 $t\in(1,e)$ 时,$\varphi(t)<0$,则 $h'(t)<0$,$h(t)$ 单调递减,$t\in(e,+\infty)$ 时,$\varphi(t)>0$,$h'(t)>0$,$h(t)$ 单调递增,

所以 $t=e$ 时,$h(t)_{\min}=h(e)=(e-1)^2$,λ 的取值范围是 $\lambda\leqslant(e-1)^2$. ………………………… 12 分

22. 解析:(Ⅰ)将 $\begin{cases}x=\rho\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ 代入 $4\rho^2\sin^2\theta=3(\rho^2-1)$,得

$4y^2=3(x^2+y^2)-3$,

即曲线 C 的直角坐标方程为:$3x^2-y^2-3=0$. ………………………… 5 分

(2)直线 l 的参数方程可改写为 $\begin{cases}x=2+\frac{\sqrt{3}}{2}t,\\ y=\frac{1}{2}t\end{cases}$ (t 为参数), ………………………… 6 分

代入曲线 C 的方程,有 $3\left(2+\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)^2-\left(\frac{1}{2}t\right)^2=3$,

整理得 $2t^2+6\sqrt{3}t+9=0$. ………………………… 7 分

从而 $t_1+t_2=-3\sqrt{3}$,$t_1t_2=\frac{9}{2}$, ………………………… 8 分

所以 $|AB|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}=3$. ………………………… 10 分

23. 解析:(Ⅰ)当 $x<-\frac{1}{2}$ 时,$f(x)=-2x+3-2x-1\leqslant 6-x$,解得 $-\frac{4}{3}\leqslant x<-\frac{1}{2}$;

当 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$ 时,$f(x)=-2x+3+2x+1\leqslant 6-x$,解得 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}$;

当 $x>\frac{3}{2}$ 时,$f(x)=2x-3+2x+1\leqslant 6-x$,解得 $\frac{3}{2}<x\leqslant\frac{8}{5}$,

综上所述,原不等式的解集为 $\left\{x\,\middle|\,-\frac{4}{3}\leqslant x\leqslant\frac{8}{5}\right\}$. ………………………… 5 分

(2)由题 $f(x)=|2x-3|+|2x+1|\geq|2x-3-(2x+1)|=4$，当且仅当$(2x-3)(2x+1)\leq0$

即 $-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}$ 时取"等号"，故 $f(x)$的最小值 $T=4$，即 $x+y+2z=4$.

证法1：

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{z+2}=\frac{1}{10}[(x+1)+(y+1)+2(z+2)]\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{z+2}\right)$$

$$\geq\frac{1}{10}\left[\sqrt{(x+1)\cdot\frac{1}{x+1}}+\sqrt{(y+1)\cdot\frac{1}{y+1}}+\sqrt{2(z+2)\cdot\frac{2}{z+2}}\right]^2=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$$

当且仅当$(x+1)^2=(y+1)^2=(z+2)^2$，即 $x=y=\frac{3}{2}$，$z=\frac{1}{2}$ 时取等号.

所以，$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{z+2}\geq\frac{8}{5}$. …………………………………………………………………… 10 分

证法2：

$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{z+2}=\frac{1}{10}[(x+1)+(y+1)+2(z+2)]\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{z+2}\right)$$

$$=\frac{1}{10}\left[6+\frac{y+1}{x+1}+\frac{x+1}{y+1}+\frac{2(z+2)}{x+1}+\frac{2(x+1)}{z+2}+\frac{2(z+2)}{y+1}+\frac{2(y+1)}{z+2}\right]$$

$$\geq\frac{1}{10}\left[6+2\sqrt{\frac{y+1}{x+1}\cdot\frac{x+1}{y+1}}+2\sqrt{\frac{2(z+2)}{x+1}\cdot\frac{2(x+1)}{z+2}}+2\sqrt{\frac{2(z+2)}{y+1}\cdot\frac{2(y+1)}{z+2}}\right]=\frac{8}{5}.$$

当且仅当$\frac{y+1}{x+1}=\frac{x+1}{y+1}$，$\frac{2(z+2)}{x+1}=\frac{2(x+1)}{z+2}$，$\frac{2(z+2)}{y+1}=\frac{2(y+1)}{z+2}$取等号，

即 $x=y=\frac{3}{2}$，$z=\frac{1}{2}$ 时取等号.

所以，$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{2}{z+2}\geq\frac{8}{5}$. …………………………………………………………………… 10 分