洛阳市2019——2020学年高中三年级期中考试

数学试卷(文)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分.第Ⅰ卷1至2页,第Ⅱ卷3至4页.共150分.考试时间120分钟.

第Ⅰ卷(选择题,共60分)

注意事项:

1.答卷前,考生务必将自己的姓名、考号填写在答题卡上.

2.考试结束,将答题卡交回.

一、选择题:本题共12个小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 i 为虚数单位,复数 z 满足 $iz = 1+2i$,则 z 等于

A. $2+i$　　B. $2-i$　　C. $1+2i$　　D. $1-2i$

2. 已知集合 $A=\{x \mid \log_3(x-2)\leqslant 2\}$,$B=\{x \mid x^2>9\}$,则 $A\cup B=$

A. $(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$　　B. $(3,11]$

C. $(2,+\infty)$　　D. $(-\infty,-3)\cup(2,3)$

3. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases} y-x\leqslant 1, \\ x+y\leqslant 3, \\ 4y\geqslant 1, \end{cases}$ 则 $x+3y$ 的最大值为

A. 7　　B. 4

C. 3　　D. 0

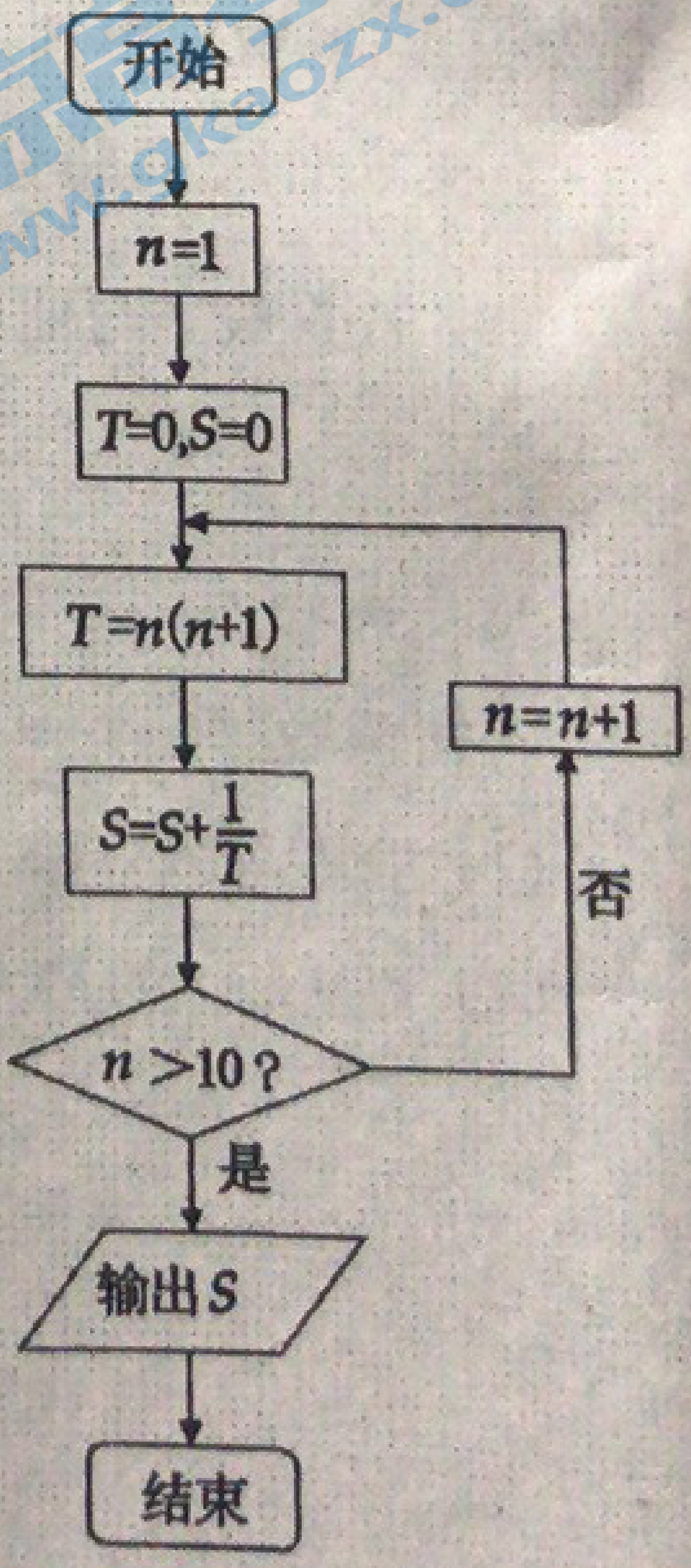
4. 执行右边的程序框图,则输出的结果是

A. $\frac{1}{132}$

B. $\frac{8}{33}$

C. $\frac{11}{12}$

D. $\frac{1}{4}$



5. 已知单位向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}+2\vec{b}|$,则 $\vec{a},\vec{b}$ 夹角为

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{5\pi}{6}$

6. 已知 $a=\frac{3}{5}$，$b=\log_{0.2}0.1$，$c=\log_3 2$，则 a,b,c 的大小关系是

A. $c<b<a$　　B. $c<a<b$　　C. $a<c<b$　　D. $b<c<a$

7. 已知点 P 是圆 $C:(x-3-\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2=1$ 上任意一点，则点 P 到直线 $x+y=1$ 距离的最大值为

A. $\sqrt{2}$　　B. $2\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{2}+1$　　D. $\sqrt{2}+2$

8. 在棱长为2的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P,Q,R 分别为棱 AA_1，BC，C_1D_1 的中点，经过 P,Q,R 三点的平面为 α，平面 α 被此正方体所截得截面图形的周长为

A. $\sqrt{2}$　　B. $6\sqrt{2}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $3\sqrt{3}$

9. 已知 p：函数 $y=\ln(x^2-ax+1)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，q：$e^x>ax$ 对任意实数 x 恒成立，若 $p\wedge q$ 真，则实数 a 的取值范围是

A. $[0,2)$　　B. $[2,e)$　　C. $(-2,e)$　　D. $[0,e)$

10. 双曲线 C 的对称轴与坐标轴重合，两个焦点分别为 F_1,F_2，虚轴的一个端点为 A，若 $\triangle AF_1F_2$ 是顶角为 120° 的等腰三角形，则双曲线 C 的离心率为

A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

11. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，其前 n 项和为 S_n，若 $S_n=S_{9-n}$（$n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n<9$），有以下结论：

①$S_9=0$；②$a_5=0$；③$\{a_n\}$ 为递增数列；④$a_9=0$.

则正确的结论的个数为

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

12. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的侧棱长相等，底面正三角形 ABC 的边长为 $\sqrt{2}$，$PA\perp$ 平面 PBC 时，三棱锥 $P-ABC$ 外接球的表面积为

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$　　C. π　　D. 3π

第 Ⅱ 卷(非选择题,共 90 分)

二、填空题:本题共 4 个小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知 $\tan(x+\frac{\pi}{4})=2$,则 $\tan(x-\frac{\pi}{4})=$ ________.

14. 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$,$f(x)=x^2+2xf'(2)$,则不等式 $f(x)<0$ 的解集为________.

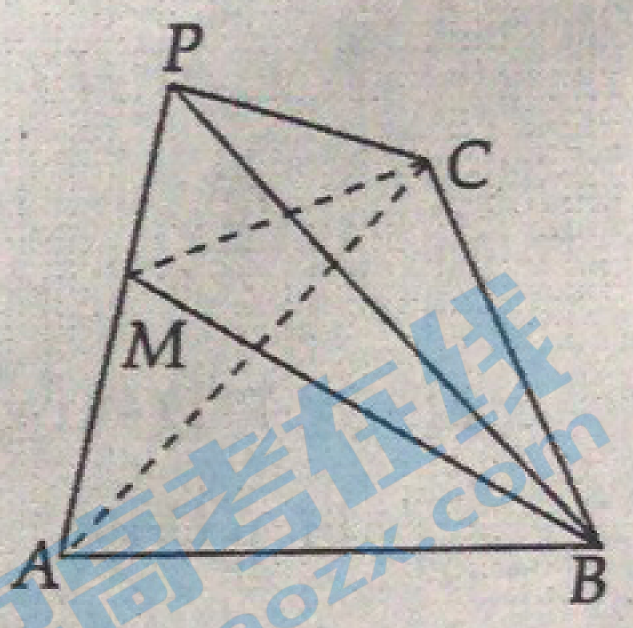
15. 已知函数 $f(x)=\sin x+2\cos x$ 在 x_0 处取得最小值,则 $f(x)$ 的最小值为________,此时 $\cos x_0=$ ________.

16. 若命题:"$\exists x_0\in[0,e]$,使得 $x_0{}^2e^{ax_0-1}>1$ 成立."为假命题,则实数 a 的最大值为________.

三、解答题:本大题共 6 个小题,共 70 分,解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

如图,在三棱锥 $P-ABC$ 中,$\triangle PAC$ 为正三角形,M 为棱 PA 的中点,$AB\perp AC$,$AC=\frac{1}{2}BC$,平面 $PAB\perp$ 平面 PAC.



(1) 求证:$AB\perp$ 平面 PAC;

(2) 若 $AC=2$,求三棱锥 $P-BMC$ 的体积.

18. (本小题满分 12 分)

设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且 $S_n=2^n-1$,数列$\{b_n\}$满足 $b_1=2$,$b_{n+1}-2b_n=8a_n$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2) 求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 T_n.

19. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中,D 是 BC 中点,$AB=3$,$AC=\sqrt{13}$,$AD=\sqrt{7}$.

(1) 求边 BC 的长;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

20.(本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点为 $F(1,0)$,点 $P(1,\frac{3}{2})$ 在椭圆 C 上.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 圆 $x^2+y^2=1$ 的切线 l 与椭圆 C 相交于 M,N 两点,证明:$\angle MON$ 为钝角.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=e^x-\cos x$.

(1) 求 $f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程;

(2) 求证:$f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},+\infty)$ 上仅有 2 个零点.

请考生在第 22、23 题中任选一题做答,如果多做,则按所做的第一题计分. 做答时,用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目对应的题号后的方框涂黑.

22.[选修 4—4:坐标系与参数方程](10 分)

在平面直角坐标系 xOy 中,直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+t,\\ y=1-\sqrt{3}t\end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点为极点,x 轴正半轴为极轴建立极坐标系,曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta-3=0$.

(1) 求曲线 C 的直角坐标方程和直线 l 的普通方程;

(2) 若直线 l 与曲线 C 交于 A,B 两点,设 $M(1,1)$,求 $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}$ 的值.

23.[选修 4—5:不等式选讲](10 分)

已知函数 $f(x)=|x-3|-2|x|$.

(1) 求不等式 $f(x)\geq 2$ 的解集;

(2) 若 $f(x)$ 的最大值为 m,a,b,c 为正数且 $a+b+c=m$,求证:$a^2+b^2+c^2\geq 3$.

洛阳市 2019——2020 学年高中三年级期中考试

数学试卷参考答案(文)

一、选择题

1－5 BAACC　6－10 CDBAA　11－12 BD

二、填空题

13. $-\frac{1}{2}$　14. (0,8)　15. $-\sqrt{5}$，$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$　16. $-\frac{1}{e}$

三、解答题

17. 解：(1) 因为 $\triangle PAC$ 为正三角形，M 为棱 PA 的中点，则 $CM \perp PA$. ……1 分

又 ∵ 平面 $PAB \perp$ 平面 PAC，平面 $PAB \cap$ 平面 $PAC = PA$，

∴ $CM \perp$ 平面 PAB， ……2 分

∴ $CM \perp AB$. ……3 分

又 $CA \perp AB$. ……5 分

且 $CA \subset$ 平面 PAC，$CM \subset$ 平面 PAC，$CA \cap CM = C$，

∴ $AB \perp$ 平面 PAC. ……6 分

(2) 因为 $AC = 2$，$AC = \frac{1}{2}BC$，则 $BC = 4$，$AB = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$， ……7 分

∵ M 为线段 PA 的中点，则 $V_{M-ABC} = \frac{1}{2}V_{P-ABC}$，

∴ $V_{P-BMC} = V_{P-ABC} - V_{M-ABC} = \frac{1}{2}V_{P-ABC} = \frac{1}{2}V_{B-APC}$ ……8 分

由(1)知，$AB \perp$ 平面 PAC，

∴ $V_{B-APC} = \frac{1}{3}S_{\triangle APC} \cdot AB = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times \sin 60^\circ \times 2\sqrt{3} = 2$， ……10 分

∴ $V_{P-BMC} = 1$，即三棱锥 $P-BMC$ 的体积为 1. ……12 分

18. (1) 当 $n \geqslant 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1} = (2^n - 1) - (2^{n-1} - 1) = 2^{n-1}$. ……2 分

$n = 1$ 时，$a_1 = 2^1 - 1 = 1$，显然 a_1 适合上式. ……3 分

综上可得 $a_n = 2^{n-1}$. ……4 分

(2) 由(1)知 $a_n = 2^{n-1}$，代入 $b_{n+1} - 2b_n = 8a_n$ 得 $b_{n+1} - 2b_n = 2^{n+2}$， ……5 分

即 $\frac{b_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{b_n}{2^n} = 2$. ……6 分

又 $\frac{b_1}{2} = 1$， ……7 分

所以数列 $\{\frac{b_n}{2^n}\}$ 是以首项为 1，公差为 2 的等差数列.

所以 $\frac{b_n}{2^n} = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$. ……8 分

所以 $b_n = (2n-1) \cdot 2^n$. ……9 分

$T_n = 1\times 2^1 + 3\times 2^2 + 5\times 2^3 + \cdots + (2n-1)\cdot 2^n$ ①

①×2 得：$2T_n = 1\times 2^2 + 3\times 2^3 + 5\times 2^4 + \cdots + (2n-1)\cdot 2^{n+1}$. ②

②−① 得：$T_n = -2 - 2\times 2^2 - 2\times 2^3 - \cdots - 2\times 2^n + (2n-1)\cdot 2^{n+1}$.

$T_n = -2 - 2\times\dfrac{2^2(1-2^{n-1})}{1-2} + (2n-1)\cdot 2^{n+1}$.

$T_n = (2n-3)\cdot 2^{n+1} + 6$. ……12 分

19.(1) 设 $BD = x$，则 $BC = 2x$，在 $\triangle ABC$ 中由余弦定理得

$\cos\angle ABD = \dfrac{AB^2 + BD^2 - AD^2}{2AB\cdot BD}$. ……2 分

即 $\cos\angle ABD = \dfrac{x^2+9-7}{2\times 3\cdot x}$. ……3 分

在 $\triangle ABC$ 中由余弦定理得 $\cos\angle ABC = \dfrac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC} = \dfrac{4x^2+9-13}{2\times 3\times 2x}$.

……5 分

易知 $\angle ABC = \angle ABD$，所以$\dfrac{x^2+9-7}{2\times 3\cdot x} = \dfrac{4x^2+9-13}{2\times 3\times 2x}$. ……6 分

解得 $x = 2$（-2 舍去），所以 $BC = 4$. ……8 分

(2) 由(1) 可知 $\cos B = \dfrac{1}{2}$， ……9 分

且 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. ……10 分

所以三角形 ABC 的面积由正弦定理得 $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot BC\cdot\sin B$， ……11 分

代入数值得 $S_{\triangle ABC} = 3\sqrt{3}$. ……12 分

20.(1) 由已知 $F(1,0)$，左焦点 $F_1(-1,0)$， ……1 分

由定义得：$2a = |PF_1| + |PF| = \sqrt{2^2+(\frac{3}{2})^2} + \dfrac{3}{2} = \dfrac{5}{2} + \dfrac{3}{2} = 4$，

∴ $a = 2$. ……2 分

$b = \sqrt{a^2-1} = \sqrt{3}$， ……3 分

椭圆 C 的方程是$\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$. ……4 分

(2) 当 l 与 x 轴不垂直时，设 l 的方程为 $y = kx + m$， ……5 分

椭圆 C 的方程与直线 l 的方程联立$\begin{cases}\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1,\\ y = kx + m,\end{cases}$

消去 y 整理得：$(3+4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0$. ……6 分

$\Delta = 64k^2m^2 - 4(3+4k^2)(4m^2-12) = 192k^2 - 48m^2 + 144 > 0$，

即 $4k^2 - m^2 + 3 > 0$， ……7 分

设 $M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，则 $x_1 + x_2 = \dfrac{-8km}{3+4k^2}$，$x_1x_2 = \dfrac{4m^2-12}{3+4k^2}$. ……8 分

直线 l 与单位圆相切得 $\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，从而 $m^2=1+k^2$. ……9 分

$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)$

$=(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$ ……10 分

$=(1+k^2)\frac{4m^2-12}{3+4k^2}+km\times\frac{-8km}{3+4k^2}+m^2$

$=\frac{7m^2-12k^2-12}{3+4k^2}$

$=\frac{7(1+k^2)-12k^2-12}{3+4k^2}=\frac{-5-5k^2}{3+4k^2}<0.$

当 l 垂直于 x 轴时也成立， ……11 分

又 M,O,N 不共线，故 $\angle MON$ 为钝角. ……12 分

21. 解：(1) $f'(x)=e^x+\sin x$， ……1 分

$f'(0)=1,f(0)=0$

$\therefore$ $f(x)$ 在点处的切线方程为 $y-0=x-0$，即 $y=x$. ……3 分

(2) 令 $g(x)=f'(x)=e^x+\sin x,g'(x)=e^x+\cos x$，

当 $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$g'(x)>0$， $\therefore$ $g(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上单调递增.

……5 分

而 $g(-\frac{\pi}{2})=e^{-\frac{\pi}{2}}-1<0,g(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}+1>0$，

由零点存在性定理知：$g(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上有唯一零点，

$\therefore$ $f'(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上有唯一零点. ……7 分

又 $f'(-\frac{\pi}{2})<0,f'(0)=1>0$，

$\therefore$ $f'(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 上递增且有唯一零点 $\alpha\in(-\frac{\pi}{2},0)$，

$\therefore$ $x\in(-\frac{\pi}{2},\alpha)$ 时，$f'(x)<0$；$x\in(\alpha,\frac{\pi}{2})$ 时 $f'(x)>0$，

$\therefore$ $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\alpha)$ 上单调递减，在 $(\alpha,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增， ……9 分

又 $f(0)=0$， $\therefore$ $f(\alpha)<0$，结合 $f(-\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}>0,f(\frac{\pi}{2})=e^{\frac{\pi}{2}}>0$，

由零点存在性定理知：$f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},\alpha)$ 上有一个零点，

在 $(\alpha,\frac{\pi}{2})$ 上有一个零点 0， ……11 分

$x\geqslant\frac{\pi}{2}$ 时，$e^x>1,\cos x\leqslant 1,e^x-\cos x>0,f(x)>0$，

此时 $f(x)$ 无零点，

综上：$f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},+\infty)$ 上仅有 2 个零点. ……12 分

22.(1) ∵ $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$, ……1 分

曲线 C 的直角坐标方程为：$x^2+y^2-2x-3=0$，

即：$(x-1)^2+y^2=4$. ……3 分

由 $\begin{cases}x=1+t\\ y=1-\sqrt{3}t\end{cases}$，消去 t 可得：$\sqrt{3}x+y=\sqrt{3}+1$，

∴ 直线 l 的普通方程为：$\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}-1=0$. ……5 分

(2) 直线 l 的参数方程可写成：

$\begin{cases}x=1-\frac{1}{2}m\\ y=1+\frac{\sqrt{3}}{2}m\end{cases}$ (m 为参数)，

代入曲线 C 的直角坐标方程可得： ……6 分

$m^2+\sqrt{3}m-3=0$. 显然 $\Delta>0$， ……7 分

∴ $m_1+m_2=-\sqrt{3}$，$m_1\cdot m_2=-3$ ……8 分

∴ $\frac{1}{|MA|}+\frac{1}{|MB|}=\frac{1}{|m_1|}+\frac{1}{|m_2|}=\frac{|m_1|+|m_2|}{|m_1m_2|}=\frac{|m_1-m_2|}{|m_1m_2|}$

$=\frac{\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}}{|m_1m_2|}=\frac{\sqrt{3+12}}{3}=\frac{\sqrt{15}}{3}$. ……10 分

23.(1) $f(x)=|x-3|-2|x|=\begin{cases}x+3, x\leqslant 0,\\ -3x+3, 0<x<3,\\ -x-3, x\geqslant 3.\end{cases}$ ……1 分

∴ 原不等式等价于 $\begin{cases}x\leqslant 0\\ x+3\geqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<x<3\\ -3x+3\geqslant 2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x\geqslant 3\\ -x-3\geqslant 2\end{cases}$， ……3 分

解得 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 或 $0<x\leqslant\frac{1}{3}$. ……4 分

∴ 不等式 $f(x)\geqslant 2$ 的解集为 $\{x\mid -1\leqslant x\leqslant\frac{1}{3}\}$. ……5 分

(2) 由(1)，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递增，在 $[0,+\infty)$ 上单调递减.

∴ $f(x)_{\max}=f(0)=3$. ……6 分

所以 $m=3$，即 $a+b+c=3$. ……7 分

∵ $a^2+b^2\geqslant 2ab$，$a^2+c^2\geqslant 2ac$，$c^2+b^2\geqslant 2cb$，

∴ $2(a^2+b^2+c^2)\geqslant 2(ab+ac+bc)$. ……8 分

∴ $3(a^2+b^2+c^2)\geqslant a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$， ……9 分

∴ $a^2+b^2+c^2\geqslant 3$. 当且仅当 $a=b=c=1$ 时等号成立. ……10 分