北京师范大学附属实验中学

2023－2024 学年度第二学期 **高三数学** 开学摸底测试

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1．已知集合 $A=\{1,2,3\}, B=\{x\in \mathbf{Z} \mid x(2-x)\geqslant 0\}$，则 $A\cup \complement_{\mathbf{Z}}B=$

A. $\{1,2\}$　　B. $\{0,1,2,3\}$　　C. $\mathbf{Z}$　　D. $\{x\in\mathbf{Z}\mid x\neq 0\}$

2．在 $(\sqrt{2}-x)^5$ 的展开式中，x^3 的系数为

A. 10　　B. -10　　C. 20　　D. -20

3．已知 $a=\log_9 3$，$b=(\frac{1}{2})^{1.2}$，$c=1.2^{\frac{1}{2}}$，则

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $c>a>b$　　D. $c>b>a$

4．在复平面内，复数 z 满足方程 $z+1=2\mathrm{i}\cdot z$，则 z 所对应的向量的坐标为

A. $(\frac{2}{5},\frac{1}{5})$　　B. $(-\frac{1}{5},-\frac{2}{5})$　　C. $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$　　D. $(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$

5．平面向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 $\frac{\pi}{3}$，且 $|\boldsymbol{a}|=1$，$|\boldsymbol{b}|=2$，如果 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，点 D 是线段 BC 的中点，那么 $|\overrightarrow{AD}|=$

A. $\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. 3　　D. 6

6．在某次数学探究活动中，小明先将一副三角板按照图 1 的方式进行拼接，然后他又将三角板 ABC 折起，使得二面角 $A-BC-D$ 为直二面角，得图 2 所示四面体 $ABCD$．小明对四面体 $ABCD$ 中的直线、平面的位置关系作出了如下的判断，其中**不正确**的是

A. $CD\perp$ 平面 ABC　　B. $AB\perp$ 平面 ACD

C. 平面 $ABD\perp$ 平面 ACD　　D. 平面 $ABD\perp$ 平面 BCD

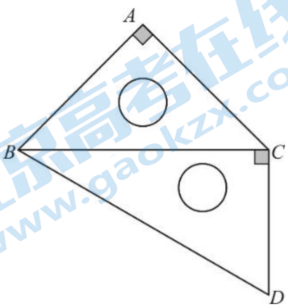


图 1

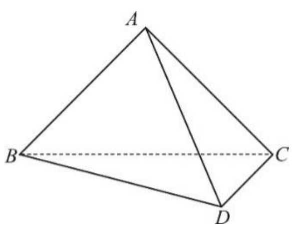


图 2

7．已知圆 $x^2+y^2=a^2+4$ 经过点 $(a-2,b)$，且点 $P(a,b)$ 到点 $Q(1,0)$ 的距离为 3，则

A. $a=-4$　　B. $a=2$　　C. $b=2\sqrt{2}$　　D. $b=4$

8．已知函数 $f(x)=a|x-2|+|x+2|$，则“$a=-1$”是“$f(x)$ 为奇函数”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

9．等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n．已知 $a_3=-1$，$a_5=5$．记 $b_n=\dfrac{S_n}{a_n}$ $(n=1,2,\cdots)$，则数列 $\{b_n\}$ 的

A. 最小项为 b_3　　B. 最大项为 b_3　　C. 最小项为 b_4　　D. 最大项为 b_4

10. 函数 $f(x)$ 及其导数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，记 $g(x)=f'(x)$，若 $f(1-x)$ 和 $g(x+2)$ 都是偶函数，则

A. $f(x)$ 是奇函数　B. $f(x)$ 是偶函数　C. $g(x)$ 是奇函数　D. $g(x)$ 是偶函数

二、填空题（本大题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

11．已知双曲线 $x^2-my^2=1$ 的离心率为 2，则该双曲线的渐近线方程为___.

12．函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin^2 x$ 的单调递增区间为___.

13．已知函数 $f(x)=2x+\varphi$，其中常数 $\varphi>0$，若 $f(-\dfrac{\pi}{6})$ 与 $f(\dfrac{\pi}{2})$ 所对应的角的终边关于 x 轴对称，则 φ 的最小值为___.

14．设定义在 $[-1,3]$ 函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & x\in[-1,a),\\ ax-1, & x\in[a,3].\end{cases}$ 当 $a=0$ 时，$f(x)$ 的值域为___；若 $f(x)$ 的最大值为 1，则实数 a 的所有取值组成的集合为___.

15．已知曲线 $W_1: x^2+y^2=m^2$，$W_2: x^4+y^2=m^4$，其中 $m>0$．

① 当 $m=1$ 时，曲线 W_1 与 W_2 有 4 个公共点；

② 当 $m=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时，第一象限内，曲线 W_1 位于曲线 W_2 的下方；

③ 存在实数 $m\in(0,1)$，使得曲线 W_1 围成的区域面积恰等于 W_2 围成的区域面积；

④ 曲线 W_1 围成的区域内（不含边界）的整点（即横、纵坐标均为整数的点）的个数不多于曲线 W_2 围成的区域内（不含边界）的整点的个数.

其中，所有正确结论的序号是________.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 85 分，解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

16.（13 分）在 $\triangle ABC$ 中，$\cos C=-\frac{1}{4}$，再从条件①、条件②、条件③中选择一个作为已知，使三角形唯一确定，求：

（Ⅰ）$\sin B$ 的值；

（Ⅱ）$\triangle ABC$ 的面积.

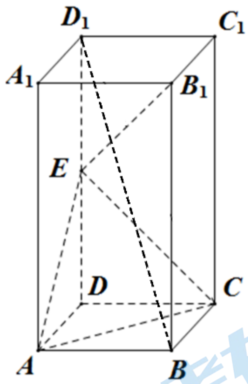
条件①：$a=8\sqrt{2}$，$c=11$；

条件②：$b=6$，$c=2a$；

条件③：$c=8$，$\triangle ABC$ 为等腰三角形.

注：如果选择多个条件解答或选择不符合要求的条件解答，本题得 0 分.

17.（13 分）如图，长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=AD=1$，点 E 为 DD_1 的中点，$EB_1\perp$ 平面 ACE .



（Ⅰ）求证：$BD_1\,//$ 平面 ACE；

（Ⅱ）求 DD_1 的长，及二面角 $A-CE-C_1$ 的余弦值；

（Ⅲ）求点 A_1 到平面 ACE 的距离.

18. （14 分）上学期间，甲每天 7:30 之前到校的概率为 $\frac{2}{3}$，乙每天 7:30 之前到校的概率为 $\frac{1}{3}$. 假定甲、乙两位同学到校情况互不影响，且任一同学每天到校情况相互独立.

（Ⅰ）设 M 为事件“在上学期间随机选择三天，甲在 7:30 之前到校的天数恰为 2 天”，求事件 M 发生的概率.

（Ⅱ）在上学期间随机选择两天，记 X 为甲 7:30 之前到校的天数，记 Y 为乙 7:30 之前到校的天数，$\xi=X-Y$，求 ξ 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）在上学期间随机选择 n 天，若在这 n 天中，甲 7:30 之前到校的天数多于乙，则记 $\eta_n=1$，否则记 $\eta_n=0$，分别比较 $D(\eta_1),D(\eta_2)$ 的大小和 $D(\eta_4),D(\eta_5)$ 的大小，直接写出结论.

19. （15 分）已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 过点 $B(0,1)$，且离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的标准方程；

（Ⅱ）设 A 为椭圆 E 的右顶点，直线 $l:y=\frac{1}{2}x$ 与椭圆交于 C，D 两点（C 在第三象限），P 是椭圆上的动点，直线 AP，BP 分别交直线 l 于点 E，F，记 $\overrightarrow{ED}=\lambda\overrightarrow{EC}$，$\overrightarrow{FD}=\mu\overrightarrow{FC}$，求 $\lambda+\mu$ 的值.

20. （15 分）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}+ax$，$a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=1$ 处的切线与 x 轴平行，求 a 的值；

（Ⅱ）若 $f(x)>0$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（Ⅲ）若实数 α,β,γ 分别满足 $f(\alpha)=\alpha f(1)$ 且 $\alpha\neq1$，$3f(\beta)=\beta f(3)$ 且 $\beta\neq3$，$5f(\gamma)=\gamma f(5)$ 且 $\gamma\neq5$，比较 α,β,γ 的大小.

21. （15 分）

若数列 $\{a_n\}$ 满足：存在 $N_0\in\mathbf{N}^*$ 和 $T\in\mathbf{N}^*$，使得对任意 $n\geqslant N_0$ 和 $k\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=a_{n+kT}$，则称数列 $\{a_n\}$ 为“P 数列”；

如果数列 $\{a_n\}$ 满足：存在 $N_0\in\mathbf{N}^*$，使得对任意 $j>i\geqslant N_0$（$i,j\in\mathbf{N}^*$），都有 $a_i\leqslant a_j$，则称数列 $\{a_n\}$ 为“I 数列”；

（Ⅰ）在下列情况下，分别判断 $\{a_n\}$ 是否“P 数列”，是否“I 数列”？

① $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=-(a_n+a_{n+1})$；　　② $a_1=5$，$a_{n+1}=2|a_n-3|$；

（Ⅱ）若数列 $\{a_n\}$：$a_1>a_2>0$，$a_{n+2}=\frac{k}{2}(a_{n+1}+a_n)$ 是“I 数列”，其中 $k\in\mathbf{Z}$ 且 $k\neq0$，求 k 的所有可能值；

（Ⅲ）设“I 数列”$\{a_n\}$ 和“P 数列”$\{b_n\}$ 的各项均为正数，定义分段函数 $f(x),x\in[1,+\infty)$ 如下：

记 $[x]$ 为“不超过 x 的最大正整数”，$f(x)=f([x])=a_{[x]}b_{[x]}$

证明：若 $f(x)$ 是周期函数，则 $\{a_n\}$ 是“P 数列”.

答案

1~10：DDCBA DBCCD

11. $y=\pm\sqrt{3}x$

12. $(k\pi-\frac{\pi}{3},k\pi+\frac{\pi}{6}),k\in\mathbf{Z}$

13. $\frac{2}{3}\pi$

14. $[0,1)\cup\{-1\}$；$(0,\frac{2}{3}]$

15. ①③④

16. 选条件①：得 0 分。

选条件②：

（Ⅰ）在 $\triangle ABC$ 中，因为 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$， …………2 分

解得 $a=4$， $a=-3$（舍）. …………4 分

由正弦定理得 $\sin B=\frac{b\sin C}{c}$. …………6 分

因为 $\cos C=-\frac{1}{4}$， $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{\sqrt{15}}{4}$. …………8 分

所以 $\sin B=\frac{3\sqrt{15}}{16}$. …………10 分

（Ⅱ）因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$ …………11 分

所以 $S_{\triangle ABC}=3\sqrt{15}$. …………13 分

选条件③：

（Ⅰ）在 $\triangle ABC$ 中，因为 $\cos C=-\frac{1}{4}$，所以 C 为钝角.

所以 C 为顶角，所以 $a=b$. …………1 分

因为 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$， $c=8$， …………3 分

所以 $a=b=\frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$. …………4 分

由正弦定理得 $\sin B=\frac{b\sin C}{c}$. …………6 分

因为 $\cos C=-\frac{1}{4}$， $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\frac{\sqrt{15}}{4}$. …………8 分

所以 $\sin B=\frac{\sqrt{6}}{4}$.　　　　　　　　…………10 分

（Ⅱ）因为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C$　　　　　　　　…………11 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{16\sqrt{15}}{5}$.　　　　　　　　…………13 分

17.（Ⅰ）略　……3 分

（Ⅱ）建系　……4 分；

设 $DD_1=2a$，$\overrightarrow{EB_1}=(1,1,a)$　……5 分；

列垂直方程组　……6 分；

解得 $a=1$，所以 $DD_1=2$　……7 分；

两个法向量 $\overrightarrow{EB_1}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{CB}=(1,0,0)$　……8 分；

余弦值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　……10 分；

（Ⅲ）$\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$　……11 分；

距离为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　……13 分；

18.（Ⅰ）$P(M)=C_3^2(\frac{2}{3})^2(\frac{1}{3})=\frac{4}{9}$　…………3 分

（Ⅱ）$X\in\{0,1,2\}$，$Y\in\{0,1,2\}$，$\xi\in\{-2,-1,0,1,2\}$　…………4 分

分布列　…………9 分

ξ	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

$E\xi=\cdots\cdots=\frac{2}{3}$　　　　　　…………11 分

（Ⅲ）$D(\eta_1)>D(\eta_2)$；$D(\eta_4)>D(\eta_5)$　　　　…………14 分

19.（Ⅰ）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$　…………4 分

（Ⅱ）$C(-\sqrt{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$，$D(\sqrt{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$　…………5 分

设 $P(m,n)$，其中 $\frac{m^2}{4}+n^2=1$，　　…………6 分

则 $l_{PB}: y=\frac{n-1}{m}x+1$, 与 $y=\frac{1}{2}x$ 联立 $\Rightarrow x_F=\frac{m}{\frac{m}{2}-n+1}$，　　…………8 分

$l_{PA}: y=\frac{n}{m-2}(x-2)$, 与 $y=\frac{1}{2}x$ 联立 $\Rightarrow x_E=\frac{2n}{n-\frac{m}{2}+1}$，　　…………10 分

由 $\overrightarrow{ED}=\lambda\overrightarrow{EC}$ 得 $\lambda=\frac{x_E-x_D}{x_E-x_C}=\frac{x_E-\sqrt{2}}{x_E+\sqrt{2}}$，同理 $\mu=\frac{x_F-x_D}{x_F-x_C}=\frac{x_F-\sqrt{2}}{x_F+\sqrt{2}}$　　…………11 分

所以 $\lambda+\mu=\frac{2x_Ex_F-4}{(x_E+\sqrt{2})(x_F+\sqrt{2})}$.　　…………12 分

$\frac{分子}{2}=x_Ex_F-2=\frac{2mn}{1-(\frac{m}{2}-n)^2}-2=\frac{2mn}{mn}-2=0$　　…………14 分

所以 $\lambda+\mu=0$.　　…………15 分

20.　$f'(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+a$　　…………1 分

（Ⅰ）$f'(1)=\frac{1}{2}\sqrt{e}+a=0 \Rightarrow a=-\frac{\sqrt{e}}{2}$，经检验合题意。…………3 分

（Ⅱ）① 若 $a=0$，$f(x)=e^{\frac{x}{2}}$，合题意。　　…………4 分

② 若 $a>0$，$f(-\frac{1}{a})=e^{-\frac{1}{2a}}-1<0$，不合题意。…………5 分

③ 若 $a<0$，$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}+a=0 \Rightarrow x=2\ln(-2a)$. …………6 分

（列表单调性）　　…………7 分

所以 $f(x)_{\min}=f(2\ln(-2a))=-2a+2a\ln(-2a)>0$　…………8 分

所以 $a>-\frac{e}{2}$

综上，$-\frac{e}{2}<a\leqslant 0$　　…………10 分

（Ⅲ）令函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}=\frac{1}{x}e^{\frac{x}{2}}+a$　（$x\neq 0$）　　…………11 分

$g'(x)=\dfrac{x-2}{2x^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ …………12 分

（列表单调性）

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)\searrow$，$(0,2)\searrow$，$(2,+\infty)\nearrow$ …………13 分

注意到当 $x<0$ 时，$g(x)<a$；当 $x>0$ 时，$g(x)>a$，

所以 $g(\alpha)=g(1),\ g(\beta)=g(3),\ g(\gamma)=g(5)$ 可知 $\alpha,\beta,\gamma>0$。…………14 分

再由单调性知 $0<\gamma<\beta<2<\alpha$. …………15 分

21. （Ⅰ）① 是“P 数列”，不是“I 数列”；② 是“P 数列”也是“I 数列”；……4 分

（Ⅱ）① 若 $k\geqslant 2$，则 $a_n>0$ 且 $a_{n+2}\geqslant(a_{n+1}+a_n)>a_{n+1}$，合题意。……6 分

③ 若 $k=1$，则 $a_n>0$ 且 $a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{-1}{2}(a_{n+1}-a_n)$.

因为 $a_2-a_1<0$，所以数列 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 的符号正负交替变化。不合题意。……8 分

④ 若 $k<0$，

首先，数列 $\{a_n\}$ 中不可能出现连续两项为 0

（否则前一项为 0，依此类推，之前各项均为 0，不合条件）

假设 $\{a_n\}$ 是“I 数列”，则存在 $M\in\mathbf{N}^*$，对任意 $n\geqslant M$，都有 $a_n>0$ 或都有 $a_n>0$.

若都有 $a_n>0$，则 $a_M>0, a_{M+1}>0\Rightarrow a_{M+2}<0$，出现矛盾；

若都有 $a_n<0$，则 $a_M<0, a_{M+1}<0\Rightarrow a_{M+2}>0$，也出现矛盾；

故 $\{a_n\}$ 不是“I 数列”。……10 分

综上，$k\in\{k\in\mathbf{N}|k\neq 1\}$.

（Ⅲ）设 $f(x)$ 的周期为 T_0（注意，不能确定 $T_0\in\mathbf{N}^*$，感觉是对的，似乎很难证。）

由题，存在 $N_0\in\mathbf{N}^*$ 和 $T\in\mathbf{N}^*$，对任意 $n\geqslant N_0$ 和 $k\in\mathbf{N}^*$，有 $b_n=b_{n+kT}$，$\{a_n\}$ 单调不减.

假设 $\{a_n\}$ 不是“P 数列”，则存在 $j>i\geqslant N_0+T_0$，使得 $a_j>a_i$.

以下推导矛盾：

对任意 $n\geqslant N_0+T_0$，数列 $\{b_n\}$ 是周期数列，必有最大值，设 b_J 是最大值，其中 $J\geqslant j$.

一方面，因为 $f(x)$ 的周期为 T_0，所以存在 $x_0\in[N_0,N_0+T_0)$，使得 $f(x_0)=f(J)$.

另一方面，$f(x_0)=a_{[x_0]}b_{[x_0]}\leqslant a_ib_J<a_jb_J\leqslant a_Jb_J=f(J)$，与 $f(x_0)=f(J)$ 矛盾。

所以假设不成立，即对任意 $n\geqslant N_0+T_0$，都有 $\{a_n\}$ 为常数列。

所以 $\{a_n\}$ 是“P 数列”。……15 分