北京师大附中 2023—2024 学年（上）初三期中考试

数 学 试 卷

2023.11

数学教学班：__________ 姓名：__________ 学号：__________

考生须知	
	1、本试卷有三道大题，共 7 页。考试时长 120 分钟，满分 100 分。
	2、考生务必将答案填写在机读卡和答题纸上，在试卷上作答无效。
	3、考试结束后，考生应将机读卡和答题纸交回。

第一部分　选择题

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

第 1-8 题均有四个选项，符合题意的选项均只有一个.

1．二次函数 $y=(x-2)^2+3$ 的顶点坐标是（　　）

（A）$(-2,3)$　　（B）$(2,3)$　　（C）$(-2,-3)$　　（D）$(2,-3)$

2．将抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 向左平移 1 个单位长度，得到的抛物线是（　　）

（A）$y=\frac{1}{2}x^2-1$　　（B）$y=\frac{1}{2}x^2+1$　　（C）$y=\frac{1}{2}(x-1)^2$　　（D）$y=\frac{1}{2}(x+1)^2$

3．用配方法解方程 $x^2+2x-3=0$，下列变形正确的是（　　）

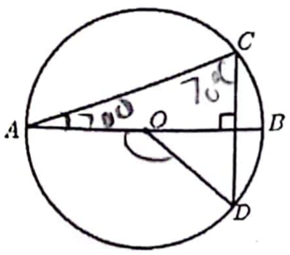
（A）$(x+1)^2=-2$　　（B）$(x+1)^2=2$　　（C）$(x+1)^2=-4$　　（D）$(x+1)^2=4$

4．若点 $(-2,a)$，$(3,b)$ 都在二次函数 $y=(x-1)^2-1$ 的图象上，则 a 与 b 的大小关系是（　　）

（A）$a<b$　　（B）$a=b$　　（C）$a>b$　　（D）不确定

5．如图，线段 AB 是⊙O 的直径，弦 $CD\perp AB$，$\angle CAB=20°$，则 $\angle AOD$ 等于（　　）

（A）120°　　（B）140°　　（C）150°　　（D）160°



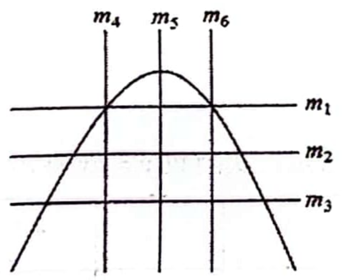
6. 某区为发展教育事业，加强了对教育经费的投入，2021 年投入 3000 万元，预计 2023 年投入 5000 万元．设教育经费的年平均增长率为 x，根据题意，下面所列方程正确的是（　　）

（A）$3000(1+x^2)=5000$　　（B）$3000x^2=5000$

（C）$3000(1+x)^2=5000$　　（D）$3000(1+x\%)^2=5000$

7. 某同学将如图所示的三条水平直线 m_1，m_2，m_3 的其中一条记为 x 轴（向右为正方向），三条竖直直线 m_4，m_5，m_6 的其中一条记为 y 轴（向上为正方向），并在此坐标平面内画出了二次函数 $y=ax^2-2ax+1(a<0)$ 的图象，那么她所选择的 x 轴和 y 轴分别为直线（　　）

（A）m_1，m_4　　（B）m_2，m_5　　（C）m_3，m_6　　（D）m_2，m_4



8. 已知抛物线 $y=x^2-1$，直线 $l:x=a$，将抛物线在直线 l 左侧的部分沿 x 轴翻折，其余部分保持不变，组成图形 G．如果对于任意的实数 n，都存在实数 m，使得点 $P(m,n)$ 在 G 上，则 a 的取值范围是（　　）

（A）$-\sqrt{2}\le a\le\sqrt{2}$　（B）$a\le-\sqrt{2}$或$a\ge\sqrt{2}$　（C）$a\le\sqrt{2}$　（D）$a\ge-\sqrt{2}$

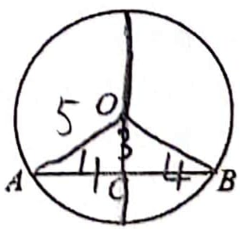
第二部分　非选择题

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

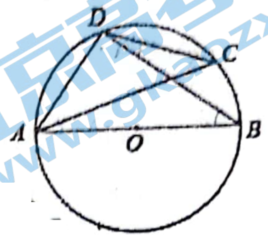
9. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x+a-1=0$ 有一个实数根为 0，则 a 的值为______．

10. 一个二次函数满足过点 $(0,1)$，且开口向上，该二次函数可以为__________．

11. 如图，⊙O 的直径为 10，AB 为弦，$OC\perp AB$，垂足为 C，若 $OC=3$，则弦 AB 的长为__________．

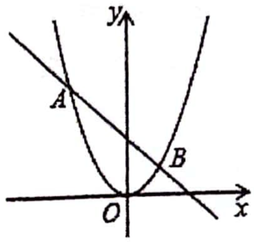


12. 如图，AB 是⊙O 的直径，CD 是⊙O 的弦，如果 $\angle ACD=36°$，那么 $\angle BAD=$______.



13. 已知抛物线 $y=x^2-mx$ 与 x 轴的一个交点的横坐标大于 1 且小于 2，则 m 的取值范围是________.

14. 如图，抛物线 $y=ax^2$ 与直线 $y=bx+c$ 的两个交点坐标分别为 $A(-2,4)$，$B(1,1)$，则关于 x 的方程 $ax^2=bx+c$ 的解为________.



15. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的 y 与 x 的部分对应值如下表：

x	…	-1	0	1	3	…
y	…	0	-1.5	-2	0	…

根据表格中的信息，得到了如下的结论：

① 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 可改写为 $y=a(x-1)^2-2$ 的形式；

② 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象开口向下；

③ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2+bx+c=-1.5$ 的两个根为 0 或 2；

④ 若 $y>0$，则 $x>3$.

其中所有正确的结论为________.

16. 某旅店的客房有两人间和三人间两种，两人间每间 200 元，三人间每间 250 元，某学校 50 人的研学团到该旅店住宿，租住了若干客房．其中男生 27 人，女生 23 人．若要求男女不能混住，且所有租住房间必须住满．

（1）要想使花费最少，需要________间两人间；

（2）现旅店对两人间打八折优惠，且仅剩 15 间两人间，此时要想花费最少，需要________间三人间.

三、解答题（共 68 分，第 17 题 8 分，第 18-19 题每题 4 分，第 20-22 题每题 5 分，第 23-24 题每题 6 分，第 25 题 5 分，第 26 题 6 分，第 27-28 题每题 7 分）

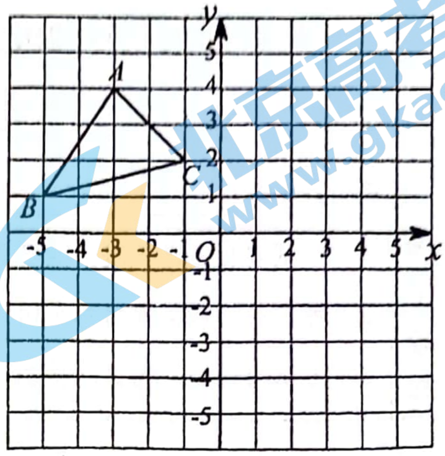
17. 解方程：

（1）$x(x+2)=0$；　　　　（2）$x^2-2x-3=0$.

18. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，$\triangle ABC$ 的三个顶点分别为 $A(-3，4)$，$B(-5，1)$，$C(-1，2)$.

（1）画出$\triangle ABC$ 关于原点对称的$\triangle A_1B_1C_1$，并写出点 A_1 的坐标；

（2）画出$\triangle ABC$ 绕原点逆时针旋转 90°后的$\triangle A_2B_2C_2$，并写出点 C_2 的坐标.



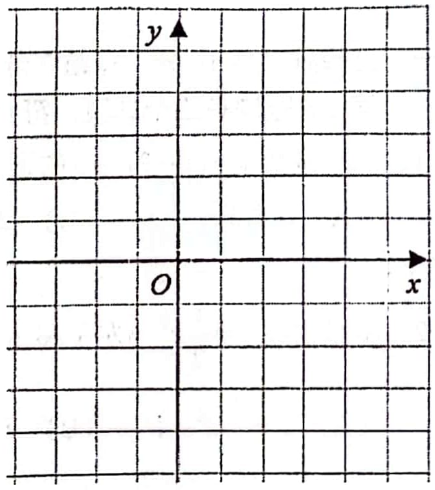
19. 已知二次函数 $C: y=x^2-4x+3$.

（1）将 $y=x^2-4x+3$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式；

（2）在右图中画出二次函数 C 的图象；

（3）当 $0\le x\le 3$ 时，利用图象直接写出 y 的取值范围；

（4）当 $y<3$ 时，利用图象直接写出 x 的取值范围.



20. 已知关于 x 的一元二次方程 $x^2+(2m+1)x+m-2=0$.

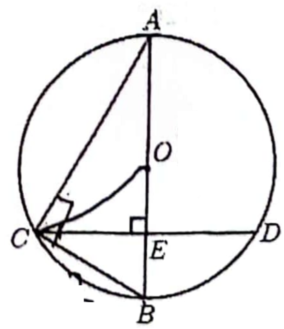
（1）求证：无论 m 取何值，此方程总有两个不相等的实数根；

（2）当该方程的判别式的值最小时，写出 m 的值，并求出此时方程的解.

21. 如图，AB 为$\odot O$ 的直径，弦 $CD\perp AB$ 于点 E，连接 AC，BC.

（1）求证：$\angle CAB=\angle BCD$；

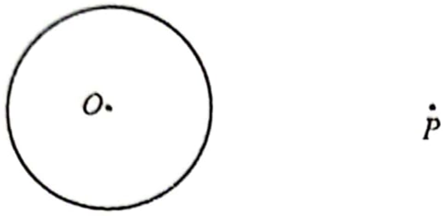
（2）若 $AB=4$，$BC=2$，求 CD 的长.



22．下面是小东设计的“过圆外一点作圆的切线”的尺规作图过程．

已知：如图，⊙O及⊙O外一点P．

求作：过点P的⊙O的切线．



作法：① 连接OP，分别以点O、点P为圆心，大于$\frac{1}{2}OP$的长为半径作弧，两弧交于点M、点N，作直线MN交OP于点T；

② 以点T为圆心，TP的长为半径作圆，交⊙O于点A、点B；

③ 作直线PA，PB．

所以直线PA，PB就是所求作的⊙O的切线．

根据小东设计的尺规作图过程，

（1）使用直尺和圆规，补全图形（保留作图痕迹）；

（2）完成下面的证明．

证明：连接OA．

∵ OP是⊙T的直径，

∴ $\angle OAP=$________°（____________________）（填推理的依据）．

∴ $OA\perp AP$．

又∵ OA为⊙O的半径，

∴直线PA是⊙O的切线（____________________）（填推理的依据）．

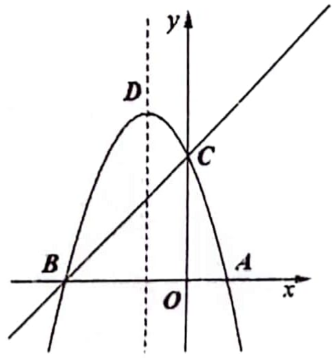
同理可证，直线PB也是⊙O的切线．

23．如图，已知抛物线$y=-x^2+bx+c$与x轴交于A，B两点，与y轴交于C点，顶点为D，其中$A(1,0)$，$C(0,3)$．直线$y=mx+n$经过B，C两点．

（1）求直线BC和抛物线的解析式；

（2）在抛物线对称轴上找一点M，使$MA+MC$最小，直接写出点M的坐标；

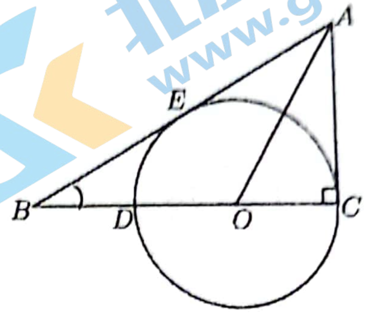
（3）连接BD，CD，求△BCD的面积．



24. 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，点 D 在 BC 边上，以 CD 为直径的$\odot O$ 与直线 AB 相切于点 E，连接 OA，$OA=OB$．

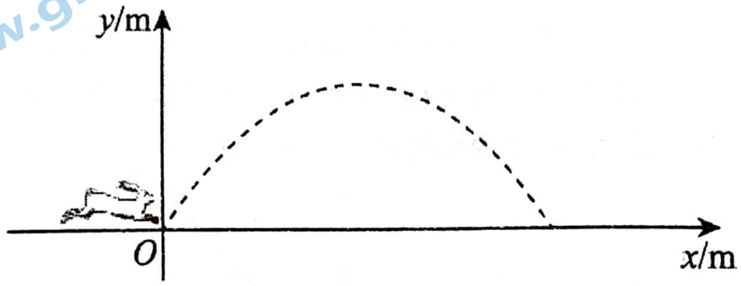
（1）求证：$\angle ABC=30^\circ$；

（2）连接 AD，若 $AD=\sqrt{14}$，求$\odot O$ 的半径．



25．野兔跳跃时的空中运动路线可以看作是抛物线的一部分．

（1）建立如图所示的平面直角坐标系．



对某只野兔一次跳跃中水平距离 x（单位：m）与竖直高度 y（单位：m）进行测量，得到以下数据：

水平距离 x	0	0.4	1	1.4	2	2.4
竖直高度 y	0	0.48	0.9	0.98	0.8	0.48

根据上述数据，回答下列问题：

① 野兔本次跳跃的最大竖直高度为________m；

② 求满足条件的抛物线的解析式．

（2）在满足（1）的条件下，在野兔起跳点前方 1.8m 处有宽为 0.8m 的小溪，则野兔此次跳跃______（填“能”或“不能”）跃过小溪．

26．已知关于 x 的二次函数 $y=x^2+ax+\frac{a^2}{4}$，点 $M(-1,m)$，$N(5,n)$ 在二次函数图象上．

（1）① 若 $m=n$，求二次函数的对称轴；

② 若 $a<-4$，比较 m，n 的大小，并说明理由．

（2）当 $a\le x\le a+1$ 时，函数的最小值为 9，求 a 的值．

27. 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$\angle B=\alpha$（$0°<\alpha<45°$），P 是线段 BC 上的动点（不与点 B，C 重合），将线段 PC 绕点 P 顺时针旋转 2α 得到线段 PD.

（1）如图 1，当 $\alpha=30°$，且点 D 在线段 AB 上时，求证 $PD=BP$；

（2）如图 2，点 D 在 Rt$\triangle ABC$ 内部，过点 D 作 AD 的垂线，与直线 BC 交于点 Q.

① 请根据题意，将图形补充完整；

② 判断 PQ 与 PB 的数量关系，并证明.

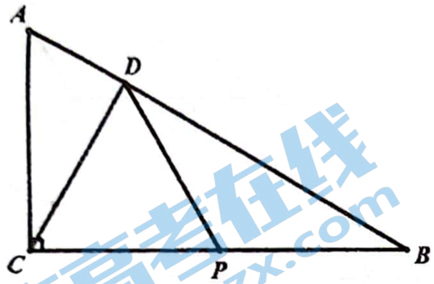


图 1

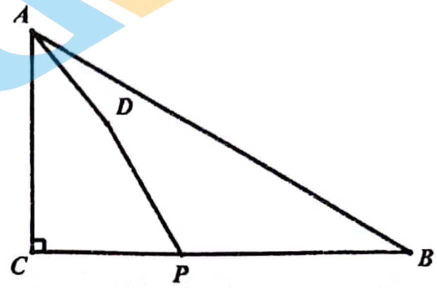


图 2

28. 已知⊙C 的半径为 r，点 P 是与圆心 C 不重合的点，点 P 关于⊙C 的反演点的定义如下：若点 P' 在射线 CP 上，满足 $CP'\cdot CP=r^2$，则称点 P' 是点 P 关于⊙C 的反演点．图 1 为点 P 及其关于⊙C 的反演点 P' 的示意图.

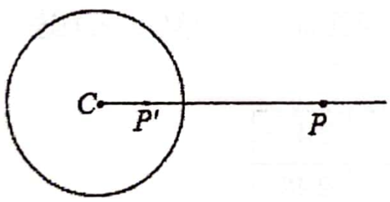


图1

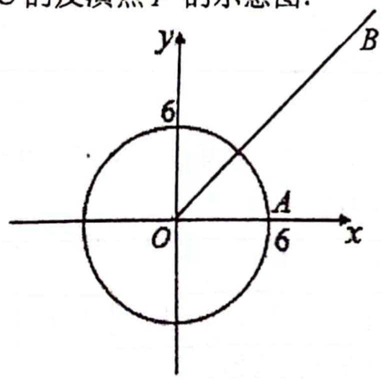


图2

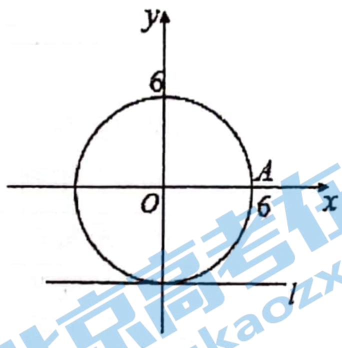


图3

在平面直角坐标系 xOy 中，⊙O 的半径为 6，⊙O 与 x 轴的正半轴交于点 A.

（1）如图 2，$\angle AOB=45°$，$OB=18$．若点 A'，B' 分别是点 A，B 关于⊙O 的反演点．则点 A' 的坐标是________，点 B' 的坐标是________；

（2）已知点 Q 在 x 轴下方，且 $2\le OQ\le 9$，直线 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+m$ 上存在点 Q 关于⊙O 的反演点 Q'，求 m 的取值范围；

（3）如图 3，已知直线 l: $y=-6$，点 K 是直线 l 上的动点，点 K' 是点 K 关于⊙O 的反演点．请直接写出线段 AK' 的长度 k 的取值范围.

北京师大附中 2023—2024 学年（上）初三期中考试

数学答案及评分标准

2023. 11

一、选择题（共 16 分，每题 2 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	D	D	C	B	C	D	A

二、填空题（共 16 分，每题 2 分）

题号	答案	题号	答案
9	1	10	$y=x^2+1$（答案不唯一）
11	8	12	54°
13	$1<m<2$	14	$x_1=-2$，$x_2=1$
15	① ③	16(1)	1
16(2)	8		

三、解答题（共 68 分，第 17 题 8 分，第 18-19 题每题 4 分，第 20-22 题每题 5 分，第 23-24 题每题 6 分，第 25 题 5 分，第 26 题 6 分，第 27-28 题每题 7 分）

17．解：（1）$x_1=0$，$x_2=-2$．

（2）$\because a=1$，$b=-2$，$c=-3$

$\therefore \Delta=b^2-4ac=16$．

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{2\pm\sqrt{16}}{2}$，

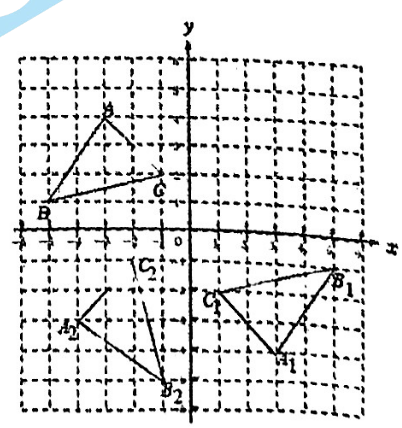
$\therefore x_1=-1$，$x_2=3$．

18．解：（1）$\triangle A_1B_1C_1$ 为所作，

点 A_1 的坐标为（3,-4）；

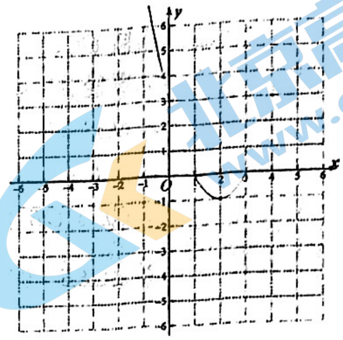
（2）$\triangle A_2B_2C_2$ 为所作，

点 C_2 的坐标为（-2,-1）.



19．解：（1）抛物线解析式为 $y=(x-2)^2-1$．

（2）如图所示．



（2）$-1\le y\le 3$．

（3）$0<x<4$．

20．解：（1）$\Delta=(2m+1)^2-4\times(m-2)=4m^2+9$．

∵ $m^2\ge 0$，

∴ $\Delta=4m^2+9>0$．

∴无论 m 取何值，方程总有两个不相等的实数根．

（2）由题意可知，当 m=0 时，$\Delta=4m^2+9$ 的值最小．

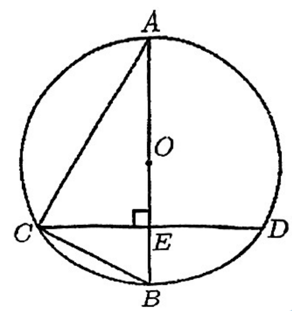
将 m=0 代入 $x^2+(2m+1)x+m-2=0$，得 $x^2+x-2=0$．

解方程可得 $x_1=-2$，$x_2=1$．

21．解法一：（1）∵直径 $AB\perp CD$，

∴ $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$，

∴ $\angle CAB=\angle BCD$．



（2）∵AB 为⊙O 的直径，

∴ $\angle ACB=90°$．

又∵AB=4，BC=2，

∴在 Rt△ACB 中，$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=2\sqrt{3}$．

∵ $CE\perp AB$ 于点 E，

∴ $\frac{1}{2}AC\cdot BC=\frac{1}{2}AB\cdot CE$，

∴ $CE=\sqrt{3}$．

∵直径 $AB\perp CD$，

∴ $CD=2CE=2\sqrt{3}$．

解法二：（1）∵AB 为⊙O 的直径，

∴ $\angle ACB=90°$，

∴ $\angle BCD+\angle ACE=90°$．

又∵ $CD\perp AB$，

∴ $\angle CEA=90°$，

∴ $\angle CAB+\angle ACE=90°$．

∴ $\angle CAB=\angle BCD$．

（2）连接 OC.

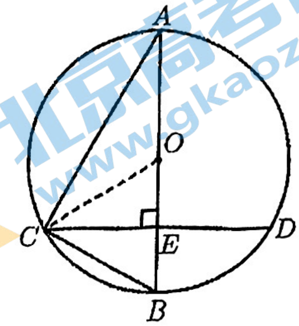
∵直径 $AB=4$，$BC=2$，

∴ $OB=OC=BC=2$，

∴△BOC 为等边三角形.

∵ $CE\perp OB$ 于点 E，

∴ $\angle CEB=90°$， $BE=\frac{1}{2}OB=1$.

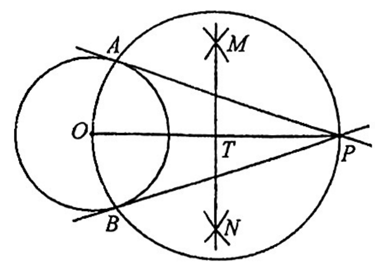


∴在 Rt△BEC 中，$CE=\sqrt{BC^2-BE^2}=\sqrt{3}$.

∵直径 $AB\perp CD$，

∴ $CD=2CE=2\sqrt{3}$.

22．解：（1）如图所示



（2）证明：连接 OA.

∵ OP 是⊙T 的直径，

∴ $\angle OAP=$ <u>90</u> °

（<u>直径所对的圆周角是直角</u>）.

∴ $OA\perp AP$.

又∵ OA 为⊙O 的半径，

∴直线 PA 是⊙O 的切线

（<u>经过半径外端且垂直于这条半径的直线是圆的切线</u>）.

同理可证，直线 PB 也是⊙O 的切线.

23．解：（1）将点 $A(1，0)$，C$(0，3)$ 代入 $y=-x^2+bx+c$，

得 $\begin{cases}-1+b+c=0,\\c=3.\end{cases}$

解这个方程组，得 $\begin{cases}b=-2,\\c=3.\end{cases}$

∴抛物线的解析式为 $y=-x^2-2x+3$.

∴抛物线的对称轴为直线 $x=-1$.

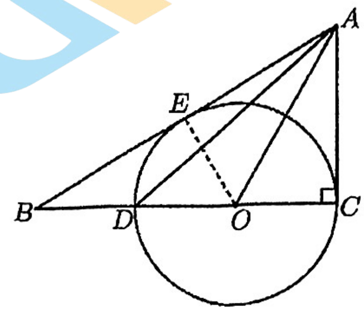
∵抛物线与 x 轴交于 A，B 两点，点 $A(1，0)$，

∴ $B(-3,0)$.

可求直线 BC 解析式为 $y=x+3$.

（2）点 M 的坐标为 $(-1,2)$.

（3） $S_{\triangle BCD}=S_{\triangle DMB}+S_{\triangle DMC}=2+1=3$.



24. 解：（1）连接 OE.

∵直线 AB 与⊙O 相切于点 E,

∴$OE\perp AB$.

∵ $\angle ACB$=90°,

∴ $\angle OAE$=$\angle OAC$.

∵OA=OB,

∴$\angle B$=$\angle OAE$=$\angle OAC$.

∵$\angle B$+$\angle OAE$+$\angle OAC$=90°,

∴$\angle B$=30°.

（2）设⊙O 的半径为 r，则 CD=2r.

∵ $\angle ACB$=90°，$\angle OAC$=$\angle B$=30°,

∴AO=2OC=2r.

∴ $AC=\sqrt{AO^2-OC^2}=\sqrt{3}r$.

∴在 Rt$\triangle ACD$ 中，$AC^2+CD^2=AD^2$,

即 $(\sqrt{3}r)^2+(2r)^2=(\sqrt{14})^2$,

解得：$r=\sqrt{2}$.

25. 解：（1）① 0.98.

② 由题意可知，抛物线的顶点为（1.4，0.98）.

∴ 设抛物线解析式为 $y=a(x-1.4)^2+0.98$.

∵ 当 x=0 时，y=0,

∴ $0=a(0-1.4)^2+0.98$，解得 $a=-0.5$.

∴ 抛物线的解析式为 $y=-0.5(x-1.4)^2+0.98$.

（2）能.

26. 解：（1）∵点 $M(-1,m)$，$N(5,n)$ 在二次函数图象上，且 $m=n$,

∴ $x=\dfrac{-1+5}{2}=2$.

（2）∵ $a<-4$,

∴抛物线的对称轴 $x=-\dfrac{a}{2}>2$.

（1）抛物线解析式为 $y=(x-2)^2-1$.

$\therefore \left|-\frac{a}{2}-(-1)\right|>\left|-\frac{a}{2}-5\right|$,

$\therefore m>n$.

（3）①当 $a+1<-\frac{a}{2}$，即 $a<-\frac{2}{3}$ 时，

当 $x=a+1$ 时，函数取得最小值 9.

$\therefore (a+1+\frac{a}{2})^2=9$，解得 $a=\frac{4}{3}, a=-\frac{8}{3}$.

$\because a<-\frac{2}{3}$，$\therefore a=-\frac{8}{3}$.

②当 $a>-\frac{a}{2}$，即 $a>0$ 时，

当 $x=a$ 时，函数取得最小值 9.

$\therefore (a+\frac{a}{2})^2=9$，解得 $a=2, a=-2$.

$\because a>0$，$\therefore a=2$.

③当 $a\le -\frac{a}{2}\le a+1$ 时，函数的最小值为 0，不符合题意.

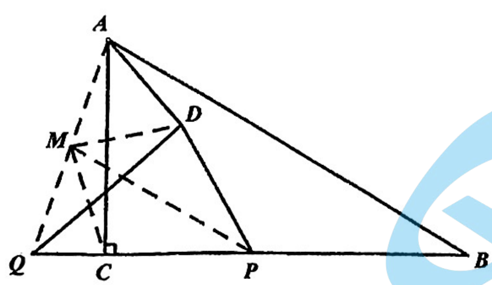
综上所述：$a=-\frac{8}{3}$ 或 $a=2$.

27．解：（1）$\because \angle CPD=2\alpha=60^\circ=\angle B+\angle PDB$，$\angle B=\alpha=30^\circ$，

$\therefore \angle PDB=\angle B$.

$\therefore BP=DP$.

（2）① 如图所示.



② $QP=BP$.

证明：连接 AQ，取 AQ 中点 M，连接 MC，MD.

$\because \angle ACQ=90^\circ$，$AD\perp QD$，

$\therefore MC=MD=\frac{1}{2}AQ$.

又$\because CP=DP$，$MP=MP$，

$\therefore \triangle CMP\cong\triangle DMP$（SSS）.

$\therefore \angle CPM=\angle DPM=\frac{1}{2}\angle CPD=\alpha=\angle B$,

∴$MP//AB$.

∵$AM=QM$,

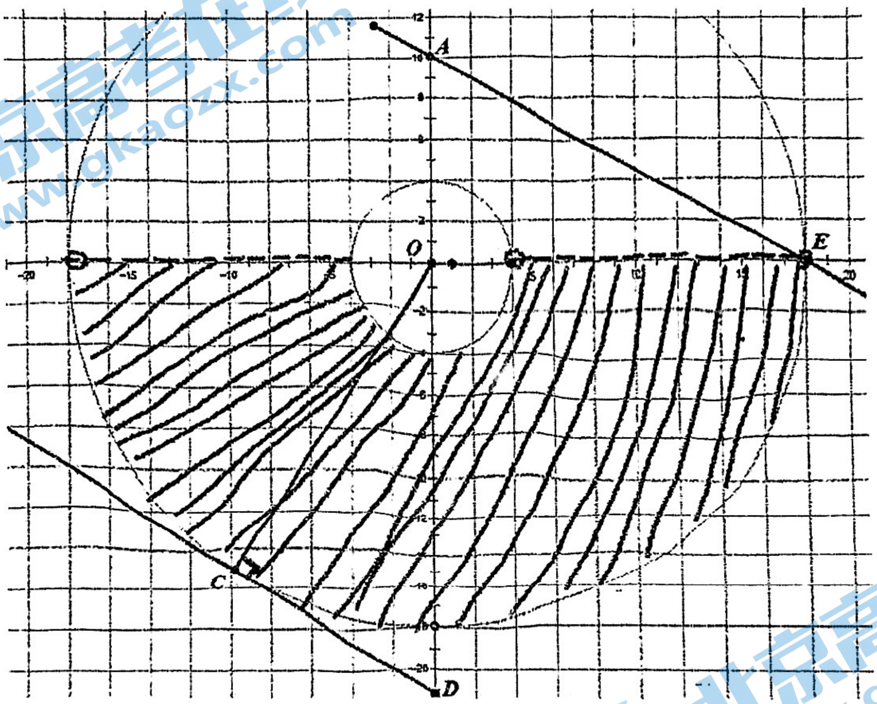
∴$QP=BP$.

28. 解：（1）$(6,0)$；$(\sqrt{2},\sqrt{2})$.

（2）由题意可知$OQ\cdot OQ'=36$，$2\le OQ\le 9$，

∴$4\le OQ'\le 18$，且Q在x轴下方.

因此Q'形成的区域为在x轴下方的一个半圆环区域（不包含x轴）.



考虑$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+m$过$E(18,0)$和与圆相切（切点为C）两个临界情形.

连接OC.

$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+m$与x轴，y轴所成的锐角分别为30°，60°，

即图中$\angle AEO=30°$，$\angle ODC=60°$，$\angle OCD=90°$.

又∵$OE=OC=18$,

∴$OA=6\sqrt{3}$，$CD=6\sqrt{3}$，$OD=12\sqrt{3}$.

∵$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+m$要与阴影区域有交点,

∴结合图形可知，$-12\sqrt{3}\le m<6\sqrt{3}$

（3）$3\sqrt{5}-3\le k\le 3\sqrt{5}+3$

北京初三高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！