2024年新高考改革适应性练习（3）（九省联考题型）

数学试题卷

（2024.2.6）

考生须知

1. 本卷共4页，四大题19小题，满分150分，答题时间120分钟；
2. 答题时须在答题卡上填涂所选答案（选择题），或用黑色字迹的签字笔规范书写答案与步骤（非选择题），答在本试题卷上或草稿纸上的答案均属无效；
3. 考试结束时，考生须一并上交本试题卷，答题卡与草稿纸.

一、单项选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1. 设样本空间 $\Omega=\{1,2,\dots,6\}$ 包含等可能的样本点，且 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，则 $P(AB)=$

A．$\frac{1}{3}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{5}$　　D．$\frac{1}{6}$

2. 若复数 z 满足 z^2 是纯虚数，则 $|z-2|$ 的最小值是

A．1　　B．$\sqrt{2}$　　C．2　　D．$2\sqrt{2}$

3. 算术基本定理告诉我们，任何一个大于1的自然数 N，如果 N 不为质数，那么 N 可以唯一分解成有限个素因数的乘积的形式．如，60可被分解为 $2^2\times3^1\times5^1$，45可被分解为 $3^2\times5^1$．任何整除 N 的正整数 d 都叫作 N 的正因数．如，20的正因数有1，2，4，5，10，20．则4200的正因数个数是

A．4　　B．7　　C．42　　D．48

4. 已知点 (a,b) 在直线 $2x+y-1=0$ 第一象限的图像上，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 的最小值是

A．$3+2\sqrt{2}$　　B．$2+2\sqrt{2}$

C．$1+2\sqrt{2}$　　D．$2\sqrt{2}$

5. 已知函数 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\cos x$，则 $f\left(g(x)\right)$ 和 $g\left(f(x)\right)$ 都单调递增的一个区间是

A．$\left(\frac{2\pi}{5},\frac{4\pi}{5}\right)$　　B．$\left(\frac{4\pi}{5},\frac{6\pi}{5}\right)$　　C．$\left(\frac{6\pi}{5},\frac{8\pi}{5}\right)$　　D．$\left(\frac{8\pi}{5},2\pi\right)$

6. 已知直线 l 过点 $(2,1)$，且与两坐标轴围成的三角形的面积是 6，则满足条件的直线 l 共有

A. 1 条　　B. 2 条　　C. 3 条　　D. 4 条

7. 我们记 $f^{(n)}(x)$ 为函数 $f(x)$ 的 n 次迭代，即 $f^{(1)}(x)=f(x)$，$f^{(2)}(x)=f(f(x))$，…，$f^{(n)}=f\left(f^{(n-1)}(x)\right)$．已知函数 $g(x)=x|x|$，则 $g^{(2024)}(x)=$

A. $x^3|x|^{2021}$　　B. $x^4|x|^{2020}$　　C. $x^2|x|^{2022}$　　D. x^{2024}

8. 若一四面体恰有一条长度大于 1 的棱，则这个四面体体积的最大值是

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

二、**多项选择题**（本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，有选错的得 0 分，若只有 2 个正确选项，每选对一个得 3 分；若只有 3 个正确选项，每选对一个得 2 分.）

9. 已知函数 $f(x)=x^3-2x$，下列说法正确的是

A. 函数 $g(x)=f(x)+f'(x)$ 无零点

B. 直线 $2x+y=0$ 与 $y=f(x)$ 相切

C. 存在无数个 $a>0$，$f(x)$ 在区间 $(-a,a)$ 上不单调

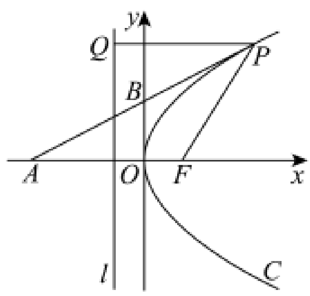
D. 存在 $m>0$，使得对于任意 n，$f(n)\leq f(n+m)$

10. 若一个人一次仅能爬 1 级或 2 级台阶，记 a_n 为爬 n 级台阶时不同的爬法数 $(n\in N^*)$．关于数列 $\{a_n\}$，下列说法正确的是

A. 函数 $f(n)=a_n$ 单调递增　　B. $a_1+a_3+a_5$ 的值为 12

C. $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=232$　　D. $2a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{10}^2=89\times144$

11. 如右图，已知抛物线 C 的焦点为 F，准线方程为 $l{:}\,x=-1$，点 P 是 C 上的一动点．过点 P 作 l 的垂线，垂足为 Q．过点 P 作 C 的切线，该切线与 x,y 轴分别交于 A,B 两个不同的点．下列说法正确的是



A. 抛物线 C 的标准方程为 $y^2=2x$

B. Q,B,F 三点共线当且仅当 $|PF|=4$

C. 当 $|PF|\neq1$ 时，都有 $PA\perp QF$

D. 当 $|PF|\neq1$ 时，$\triangle PAF$ 恒为等腰三角形

三、填空题（本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.）

12. 在棱长为1的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，三棱锥 $C-AB_1D_1$ 的体积是________.

13. 从集合 $\{x|-4\le x\le 2024\}$ 中任选 2 个不同的非零整数作为二次函数 $f(x)=ax^2+bx$ 的系数，则所有满足 $f(x)$ 的顶点在第一象限或第三象限的有序数对 (a,b) 共有________组.

14. 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})$，$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|=3$，则 $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|$ 的最大值是________.

四、解答题（本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

15.（13 分）

已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$．

（1）证明：$AD_1\perp A_1C$；

（2）求二面角 $B-A_1C-D$．

16.（15 分）

已知定义在 R 上的函数 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx\ (a\neq 0)$.

（1）若原点是 $f(x)$ 的一个极值点，证明：$f(x)$ 的所有零点也是其所有极值点；

（2）若 $f(x)$ 的 4 个零点成公差为 2 的等差数列，求 $f'(x)$ 的最大零点与最小零点之差.

17.（15 分）

设点 $S(1,1)$ 在椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 内，直线 $l:b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$．

（1）求 l 与 C 的交点个数；

（2）设 P 为 l 上的动点，直线 PS 与 C 相交于 M,N 两点．给出下列命题：

①存在点 P，使得 $\frac{1}{|PM|},\frac{1}{|PS|},\frac{1}{|PN|}$ 成等差数列；

②存在点 P，使得 $|PM|,|PS|,|PN|$ 成等差数列；

③存在点 P，使得 $|PM|,|PS|,|PN|$ 成等比数列；

请从以上三个命题中选择一个，证明该命题为假命题.（若选择多个命题分别作答，则按所做的第一个计分.）

18.（17 分）

2024 部分省市的高考数学推行 8 道单选，3 道多选的新题型政策. 单选题每题 5 分，选错不得分，多选题每题完全选对 6 分，部分选对部分分（此处直接视作 3 分），不选得 0 分. 现有小李和小周参与一场新高考数学题，小李的试卷正常，而小周的试卷选择题是被打乱的，所以他 11 题均认为是单选题来做. 假设两人选对一个单选题的概率都是 $\frac{1}{4}$，且已知这四个多选题都只有两个正确答案.

（1）记小周选择题最终得分为 X，求 $E(X)$.

（2）假设小李遇到三个多选题时，每个题他只能判断有一个选项是正确的，且小李也只会再选 1 个选项，假设他选对剩下 1 个选项的概率是 $p_0\left(p_0 \geq \frac{1}{3}\right)$，请你帮小李制定回答 4 个多选题的策略，使得分最高.

19.（17 分）

信息论之父香农（Shannon）在 1948 年发表的论文“通信的数学理论”中指出，任何信息都存在冗余，冗余大小与信息中每个符号（数字、字母或单词）的出现概率或者说不确定性有关.

香农借鉴了热力学的概念，把信息中排除了冗余后的平均信息量称为“信息熵”，并给出了计算信息熵的数学表达式.

设随机变量 X 所有取值为 $1,2,\dots,n$，且 $P(x=i)=P_i>0\ (i=1,2,\dots,n)$，$P_1+P_2+\cdots+P_n=1$，定义 X 的信息熵

$$H(X)=-\sum_{i=1}^{n}P_i\log_2 P_i$$

（1）当 $n=1$ 时，求 $H(X)$ 的值；

（2）当 $n=2$ 时，若 $P_1\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，探究 $H(X)$ 与 P_1 的关系，并说明理由；

（3）若 $P_1=P_2=\frac{1}{2^{n-1}}$，$P_{k+1}=2P_k\ (k=2,3,\cdots,n)$，求此时的信息熵 $H(X)$.