顺义区 2023—2024 学年第一学期期末质量监测

高一数学试卷

考生须知	
	1. 本试卷共 6 页，共两部分，21 道小题，满分 150 分。考试时间 120 分钟。 2. 在答题卡上准确填写学校、姓名、班级和教育 ID 号。 3. 试题答案一律填涂或书写在答题卡上，在试卷上作答无效。 4. 在答题卡上，选择题用 2B 铅笔作答，其他试题用黑色字迹签字笔作答。 5. 考试结束后，请将答题卡上交。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

(1) 已知集合 $M=\{x\mid -2\leqslant x<2\}$，$N=\{x\mid x+1\geqslant 0\}$，则 $M\cap N=$

(A) $\{x\mid -1\leqslant x<2\}$　(B) $\{x\mid -1<x<2\}$　(C) $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant -1\}$　(D) $\{x\mid 1\leqslant x<2\}$

(2) 函数 $y=\log_{\frac{1}{2}}(2x+1)$ 的定义域为

(A) $(0,+\infty)$　(B) $[-\frac{1}{2},+\infty)$　(C) $(-\frac{1}{2},+\infty)$　(D) $(-\infty,-\frac{1}{2})$

(3) 命题"$\exists x\in\mathbf{R}$，使得 $|x-2|\leqslant 3$"的否定为

(A) $\exists x\in\mathbf{R}$，$|x-2|\geqslant 3$　(B) $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $|x-2|\geqslant 3$

(C) $\exists x\in\mathbf{R}$，$|x-2|>3$　(D) $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $|x-2|>3$

(4) 下列函数中，在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的是

(A) $y=x^{-2}$　(B) $y=-\ln x$　(C) $y=\frac{1}{2^x}$　(D) $y=e^{|x|}$

(5) 已知 $a=2^{-\pi}$，$b=\log_{0.3}2$，$c=\log_2 3$，则 a,b,c 的大小关系是

(A) $c>a>b$　(B) $b>c>a$　(C) $a>c>b$　(D) $c>b>a$

(6) 已知 a,b,c 是任意实数，且 $a>b>c$．则下列不等式一定成立的是

(A) $\frac{c}{a}<\frac{c}{b}$　(B) $a+b>2c$　(C) $a|c|<b|c|$　(D) $a+b>c$

(7) 已知函数 $f(x)=x^2-2ax+1$，则"$a<0$"是"函数 $f(x)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增"的

(A) 充分不必要条件　(B) 必要不充分条件

(C) 充要条件　(D) 既不充分又不必要条件

(8)燕子每年秋天都要从北方飞向南方过冬．专家发现两岁燕子的飞行速度 v(单位:m/s)可以表示为$v=5\log_2\frac{Q}{10}$,其中 Q 表示燕子耗氧量的单位数．某只两岁燕子耗氧量的单位数为 Q_1 时的飞行速度为 v_1,耗氧量的单位数为 Q_2 时的飞行速度为 v_2,若 $v_2-v_1=7.5$(m/s),则$\frac{Q_2}{Q_1}$的值为

(A)$\sqrt{2}$　　(B)$\sqrt[3]{4}$　　(C)$2\sqrt{2}$　　(D)$\frac{\sqrt{2}}{4}$

(9)已知函数$f(x)=\begin{cases}2^x, & x\leqslant 1\\ \log_2 x, & x>1\end{cases}$,若方程 $f(x)=-x+k$ 有两个不相等的实数根,则实数 k 的取值范围是

(A)$(1,3)$　　B. $(1,3]$　　(C)$(1,+\infty)$　　(D)$(1,2]$

(10)悬链线指的是一种曲线,如铁塔之间悬垂的电线,横跨深涧的观光索道的电缆等等,这些现象中都有相似的曲线形态,这些曲线在数学上被称为悬链线,悬链线的方程为 $y=\frac{c}{2}(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}})$,其中 c 为参数．当 $c=1$ 时,该方程就是双曲余弦函数 $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$,类似的我们有双曲正弦函数$g(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$,下列说法错误的是

(A) $[f(x)]^2-[g(x)]^2=1$　　B. 函数 $y=\frac{g(x)}{f(x)}$的值域$(-1,1)$

(C) $\forall x\in\mathbf{R}$, $f(x)>x^2$ 恒成立　　D. 方程$\frac{g(x)}{f(x)}=-x+1$ 有且只有一个实根

第二部分(非选择题　共 110 分)

二、填空题共 5 道小题,每题 5 分,共 25 分,把答案填在答题卡上．

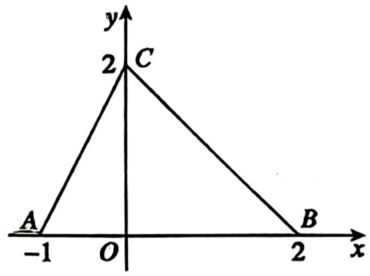
(11)已知幂函数 $f(x)=x^\alpha$ 的图象经过点$(2,\sqrt{2})$,那么 $f(4)=$ ________．

(12)若圆心角为$\frac{2\pi}{3}$的扇形的弧长为 π,则该扇形面积为________．

(13)已知函数$f(x)=1-x-\frac{2}{x}(x>0)$,则当 $x=$ ________时,函数 $f(x)$ 取到最大值且最大值为________．

(14) 若点 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 关于 x 轴的对称点为 $B(\cos(\alpha-\frac{\pi}{3}),\sin(\alpha-\frac{\pi}{3}))$，则角 α 的一个取值为________.

(15) 如图，函数 $f(x)$ 的图象为折线 ACB，函数 $g(x)$ 是定义域为 R 的奇函数，满足 $g(4-x)+g(x)=0$，且当 $x\in(0,2]$ 时，$g(x)=f(x)$，给出下列四个结论：



① $g(0)=0$；

② 函数 $g(x)$ 在 $(-4,8)$ 内有且仅有 3 个零点；

③ $g(-\frac{7}{2})>g(2024)>g(3)$；

④ 不等式 $f(x)\leq|\log_2(x+1)|$ 的解集 $(-1,-\frac{1}{2}]\cup[1,2]$.

其中正确结论的序号是________

三、解答题共 6 道题，共 85 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

(16)（本小题 13 分）

已知不等式 $x^2-x-6\leq0$ 的解集为 A，非空集合 $B=\{x|m-1<x<2m+1\}$.

（Ⅰ）求集合 A；

（Ⅱ）当 $m=2$ 时，求 $A\cup B$；

（Ⅲ）若 $B\subseteq A$，求实数 m 的取值范围.

(17)（本小题 14 分）

在平面直角坐标系 xoy 中，角 α 的顶点与原点 O 重合，始边与 x 轴的非负半轴重合，终边与单位圆交于第三象限点 $P(-\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2\sqrt{5}}{5})$.

（Ⅰ）求 $\sin\alpha-\cos\alpha$ 的值；

（Ⅱ）若角 α 的终边绕原点 O 按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$，与单位圆交于点 Q，求点 Q 的坐标.

(18)(本小题 14 分)

已知 $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$,且 α 的范围是________.

从① $(0,\frac{\pi}{2})$,② $(\frac{\pi}{2},\pi)$,③ $(\pi,\frac{3\pi}{2})$,④ $(\frac{3\pi}{2},2\pi)$,这四个选项中选择一个你认为恰当的选项填在上面的横线上,并根据你的选择,解答以下问题:

(Ⅰ)求 $\sin\alpha,\tan\alpha$ 的值;

(Ⅱ)化简求值:$\frac{\sin(-\alpha)\cos(\pi+\alpha)}{\sin(2024\pi+\alpha)\tan(\pi-\alpha)}$.

(19)(本小题 15 分)

已知函数 $f(x)=\frac{x+a}{x^2+4}$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

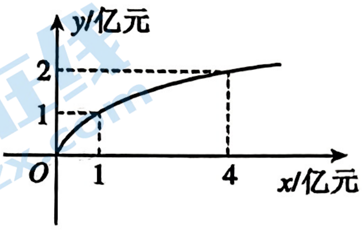
(Ⅰ)求实数 a 的值;

(Ⅱ)判断函数 $f(x)$ 在区间 $[2,+\infty)$ 上的单调性,并用定义证明;

(Ⅲ)若 $g(x)=f(x)-k(k\in\mathrm{R})$ 有两个零点,请写出 k 的范围(直接写出结论即可).

(20)(本小题 14 分)

某公司已成功研发 A,B 两种产品．该公司研发已经耗费资金 2 亿元，现在准备投入资金进行生产．经市场调查与预测，生产 A 产品的毛收入与投入的资金成正比，已知每投入 1 亿元，公司获得毛收入 0.25 亿元；生产 B 产品的毛收入 y(亿元)与投入的资金 x(亿元)的函数关系为 $y=kx^{a}(x>0)$，其图象如图所示．



(Ⅰ)试分别求出生产 A,B 两种产品的毛收入 y(亿元)与投入资金 x(亿元)的函数关系式；

(Ⅱ)如果公司只生产一种产品，那么生产哪种产品毛收入更大?

(Ⅲ)现在公司准备投入 40 亿元资金同时生产 A,B 两种产品，设投入 x 亿元生产 B 产品，用 $f(x)$ 表示公司所获净利润，当 x 为多少时，可以获得最大净利润? 并求出最大净利润．(净利润=A 产品毛收入+B 产品毛收入-研发耗费资金)

(21)(本小题15分)

对于定义域为I的函数$f(x)$,如果存在区间$[m,n]\subseteq I$,使得$f(x)$在区间$[m,n]$上是单调函数.且函数$y=f(x)$.$x\in[m,n]$的值域是$[m,n]$,则称区间$[m,n]$是函数$f(x)$的一个"优美区间".

(Ⅰ)判断函数$y=x^2(x\in\mathbf{R})$和函数$y=3-\dfrac{4}{x}(x>0)$是否存在"优美区间"?

(直接写出结论,不要求证明)

(Ⅱ)如果函数$f(x)=x^2+a$在$\mathbf{R}$上存在"优美区间",求实数a的取值范围.

顺义区 2023—2024 学年第一学期期末质量监测

数学试卷参考答案

一、ACDD ABAC BC

二、11. 2　　12. $\frac{3\pi}{4}$　　13. $\sqrt{2}$, $1-2\sqrt{2}$

14. $\alpha=\frac{\pi}{6}$ $\left(\alpha=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in Z\right)$　　15. ①③④

16.（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）集合 $A=\{x\mid -2\le x\le 3\}$.　　------------------3 分

（Ⅱ） 当 $m=2$ 时，$B=\{x\mid 1<x<5\}$,　　------------------5 分

$\therefore A\cup B=\{x\mid -2\le x<5\}$　　------------------7 分

（Ⅲ）若 $B\subseteq A$ 则 $\begin{cases}2m+1\le 3\\ m-1\ge -2\\ m-1<2m+1\end{cases}$，　　------------------10 分

所以 $\begin{cases}m\le 1\\ m\ge -1\\ m>-2\end{cases}$，　　------------------12 分

综上：$-1\le m\le 1$.　　------------------13 分

17.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）根据三角函数的定义得：

$\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ---------------------4 分

$\therefore \sin\alpha-\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ------------6 分

（Ⅱ）由已知可得：$Q\left(\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right),\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

因为 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$

所以$Q\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$------------------------14 分

18.（本小题 14 分）

解：选②$\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

（Ⅰ）∵ $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$，$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

∴ $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13}$ ------------------------3 分

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{12}{5}$. --6 分

（Ⅱ）$\frac{\sin(-\alpha)\bullet\cos(\pi+\alpha)}{\sin(2024\pi+\alpha)\bullet\tan(\pi-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha\bullet(-\cos\alpha)}{\sin\alpha\bullet(-\tan\alpha)}=-\frac{25}{156}$. ---14 分

选③$\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$

（Ⅰ）∵ $\cos\alpha=-\frac{5}{13}$， $\alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$

所以$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2}=-\frac{12}{13}$. --------3 分

$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{12}{5}$. ------------------------6 分

（Ⅱ）$\frac{\sin(-\alpha)\bullet\cos(\pi+\alpha)}{\sin(2024\pi+\alpha)\bullet\tan(\pi-\alpha)}=\frac{-\sin\alpha\bullet(-\cos\alpha)}{\sin\alpha\bullet(-\tan\alpha)}=\frac{25}{156}$. ----------14 分

19.（本小题 15 分）

解：（Ⅰ）因为函数 $f(x)=\dfrac{x+a}{x^2+4}$ 是定义在 R 上的奇函数，

所以 $f(-x)+f(x)=0$. ——————————————2 分

即 $\dfrac{-x+a}{(-x)^2+4}+\dfrac{x+a}{x^2+4}=\dfrac{-x+a+x+a}{x^2+4}=0$

亦即 $\dfrac{2a}{x^2+4}=0$

所以 $a=0$. ——————————————4 分

（Ⅱ）函数 f(x) 在区间 $[2,+\infty)$ 上单调递减，——————————————5 分

证明如下：

由（Ⅰ）可知 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$

任取 $x_2>x_1\geq 2$ 则

$f(x_2)-f(x_1)$

$=\dfrac{x_2}{x_2^2+4}-\dfrac{x_1}{x_1^2+4}$ ——————————————6 分

$=\dfrac{x_2(x_1^2+4)-x_1(x_2^2+4)}{(x_2^2+4)(x_1^2+4)}=\dfrac{(x_2x_1^2-x_1x_2^2)+4(x_2-x_1)}{(x_2^2+4)(x_1^2+4)}$

$=\dfrac{x_2x_1(x_1-x_2)+4(x_2-x_1)}{(x_2^2+4)(x_1^2+4)}$ ——————————————8 分

$=\dfrac{(x_1x_2-4)(x_1-x_2)}{(x_2^2+4)(x_1^2+4)}$. ——————————————9 分

由 $x_2>x_1\geq 2$，得 $x_1x_2>4, x_1-x_2<0$， ——————————————10 分

所以 $f(x_2)-f(x_1)<0$，即 $f(x_2)<f(x_1)$ ——————————————11 分

所以函数 f(x) 在区间 $[2,+\infty)$ 上单调递减. ——————————————12 分

（Ⅲ）$k\in(-\dfrac{1}{4},0)\cup(0,\dfrac{1}{4})$. ——————————————15 分

20.　（本小题 14 分）

解（Ⅰ）

设投入资金x亿元，则生产 A 产品的毛收入$y=\frac{x}{4}(x>0)$. …………2 分

由题意可知，函数$y=kx^a$的图象过点（1,1），（4,2），

将$(1,1),(4,2)$代入$y=kx^a$，

得$\begin{cases}k=1\\kx^a=2\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=1\\a=\frac{1}{2}\end{cases}$，

$\therefore$生产 B 产品的毛收入

$y=\sqrt{x}(x>0)$. …………5 分

（Ⅱ）由$\frac{x}{4}>\sqrt{x}$，得$x>16$；

由$\frac{x}{4}=\sqrt{x}$，得$x=16$；

由$\frac{x}{4}<\sqrt{x}$，得$0<x<16$. …………8 分

$\therefore$当投入资金大于 16 亿元时，生产A产品的毛收入更大；

当投入资金等于 16 亿元时，生产A,B产品的毛收入相等；

当投入资金小于 16 亿元时，生产 B 产品的毛收入更大. ………9 分

（Ⅲ）由题意知投入x亿元生产B产品，则投入$(40-x)$亿元资金生产 A 产品，

公司所获净利润$f(x)=\frac{40-x}{4}+\sqrt{x}-2$， …………11 分

令$\sqrt{x}=t$，则$t^2=x$，

$\therefore f(x)=\frac{40-t^2}{4}+t-2=-\frac{1}{4}(t-2)^2+9$，

故当$t=2$，即$x=4$亿时，公司所获净利润最大，最大净利润为 9 亿元. …………14 分

21.　　（本小题 15 分）

解（Ⅰ）$y=x^2\geq 0$，$y=x^2$在$[0,+\infty)$上单调递增，

由$x^2=x$得$x=0$或 1，存在优美区间是$[0,1]$；　　…………2 分

$y=3-\frac{4}{x}(x>0)$是增函数，若存在优美区间$[m,n]$，

则$\begin{cases}3-\frac{4}{m}=m\\3-\frac{4}{n}=n\end{cases}$，无解，不合题意，不存在优美区间；　　…………4 分

（Ⅱ）函数$f(x)=x^2+a$在R上存在“优美区间”，设$[m,n]$是其一个优美区间，

$f(x)$在$(-\infty,0)$上递减，在$(0,+\infty)$上递增，

若$m\geq 0$，则$\begin{cases}f(m)=m\\f(n)=n\end{cases}$，即$f(x)=x$有两个不等的非负根$x_1,x_2$，　……6 分

所以，方程$x^2+a=x$，即$x^2-x+a=0$，$\Delta=1-4a>0$，$a<\frac{1}{4}$，$\begin{cases}x_1+x_2=1\\x_1x_2=a\end{cases}$，则$a\geq 0$，

所以$0\leq a<\frac{1}{4}$；　　…………9 分

若$n\leq 0$，则$\begin{cases}f(m)=n\\f(n)=m\end{cases}$，　　…………10 分

即$\begin{cases}m^2+a=n\\n^2+a=m\end{cases}$，

两式相减得$(m+n)(m-n)=n-m$，$m+n=-1$，　　…………11 分

亦即$\begin{cases}m^2+a=-1-m\\n^2+a=-1-n\end{cases}$，

所以方程$x^2+a=-1-x$，即$x^2+x+a+1=0$，有两个不等的非正根x_1,x_2，

$\Delta=1-4(a+1)>0$，$a<-\frac{3}{4}$，$x_1+x_2=-1<0$满足题意，$x_1x_2=a+1\geq 0$，$a\geq -1$，

所以$-1\leq a<-\frac{3}{4}$；　　…………14 分

综上，a的取值范围是$-1\leq a<-\frac{3}{4}$或$0\leq a<\frac{1}{4}$.　　…………15 分