

## 参考答案

一、选择题（每题5分，共10题。在每题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。）

1. 【答案】C

【分析】根据元素与集合的关系，结合元素的互异性，即可求解。

【详解】由于 $1 \in A$ ，若 $x=1$ ，则 $x^2=1$ ，不合题意；

$$\text{所以 } \begin{cases} x \neq x^2 \\ x^2 = 1 \end{cases}, \text{ 解得 } x = -1,$$

故选：C

2. 【答案】B

【分析】根据基本函数的奇偶性，以及单调性即可逐一判断。

【详解】对于A， $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $\mathbb{R}$ 上单调递减，故不符合题意，

对于B， $f(x) = -\frac{1}{x}$ 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ ，

且 $f(-x) = \frac{1}{-x} = -f(x)$ ，故 $f(x) = -\frac{1}{x}$ 为奇函数，

且 $f(x) = -\frac{1}{x}$ 为 $(0, +\infty)$ 上的单调递增函数，故B正确，

对于C， $y = \lg x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ，定义域不关于原点对称，所以不是奇函数，不符合要求，

对于D， $g(x) = x^2 + 1$ 定义域为 $\mathbb{R}$ ，且 $g(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = g(x)$ ，

故 $g(x) = x^2 + 1$ 为偶函数，不符合要求，

故选：B

3. 【答案】B

【分析】逐个代入判定是否相等即可。

【详解】对于A： $f(x^2) = 2^{x^2}$ ， $2f(x) = 2^{x+1}$ ，显然 $2^{x^2} = 2^{x+1}$ 不恒成立，A错误；

对于B： $f(x^2) = \lg x^2 = 2\lg x$ ， $2f(x) = 2\lg x$ ，所以 $f(x^2) = 2f(x)$ 恒成立，B正确；

对于C： $f(x^2) = (x^2)^2 = x^4$ ， $2f(x) = 2x^2$ ，显然 $x^4 = 2x^2$ 不恒成立，C错误；

对于D： $f(x^2) = x^2$ ， $2f(x) = 2x$ ，显然 $x^2 = 2x$ 不恒成立，D错误，

故选：B

4. 【答案】C

【分析】根据函数奇偶性的定义判断函数奇偶性，根据单调性的性质判断单调性。

【详解】要使函数  $f(x) = x^2 + \log_2 x$ ，则  $x > 0$ ，所以函数  $f(x) = x^2 + \log_2 x$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ，

其定义域不关于原点对称，故函数  $f(x)$  不具有奇偶性；

又函数  $y = x^2$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增，函数  $y = \log_2 x$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增，

根据单调性的性质（增函数加增函数为增函数）知，函数  $f(x) = x^2 + \log_2 x$  在  $(0, +\infty)$  上单调递增。

故选：C。

5. 【答案】A

【分析】利用不等式的性质和举反例逐一判断即可。

【详解】对于 A，因为  $c > d$ ，所有  $-d > -c$ ，

又因  $a > b$ ，所以  $a - d > b - c$ ，故 A 正确；

对于 B，当  $a = 2, b = 0, c = -1, d = 0$  时， $ac = -2 < 0 = bd$ ，故 B 错误；

对于 C，当  $a = 0, b = -1, c = -1, d = -2$  时， $\frac{a}{d} = 0 < 1 = \frac{b}{c}$ ，故 C 错误；

对于 D，当  $a = 0, b = -1, c = -1, d = -2$  时， $a^2 + c^2 = 1 < 5 = b^2 + d^2$ ，故 D 错误。

故选：A。

6. 【答案】D

【分析】应用指数运算和对数运算，求出  $a, c$  的值，再应用指数函数的单调性，估计出  $b = 4^{2.1} > 4^2 = 16$ ，

即可判断

【详解】 $a = 2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$ ，

$b = 4^{2.1} > 4^2 = 16$ ，

$c = \log_4 0.125 = \log_4 \frac{1}{8} = -\frac{3}{2}$ ，则  $c < a < b$ 。

故选：D

7. 【答案】A

【分析】根据二次函数的单调性，即可作差比较  $f(1) < f(5)$  判断充分性；由  $f(1) < f(5)$  得  $-\frac{b}{2a} < 3$ ，

根据对称轴与二次函数的单调性的关系即可判断必要性。

【详解】 $f(x) = ax^2 + bx + c (a > 0)$  为开口向上的二次函数，

且  $f(5) = 25a + 5b + c, f(1) = a + b + c$ 。

①若  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上单调递增，则  $-\frac{b}{2a} \leq 1$ ，

由  $a > 0$  得， $b \geq -2a$ ，

此时  $f(5) - f(1) = 24a + 4b \geq 24a - 8a = 16a > 0$ ，

所以  $f(1) < f(5)$ ,

即  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上单调递增  $\Rightarrow f(1) < f(5)$ ;

②若  $f(1) < f(5)$ , 则  $f(5) - f(1) = 24a + 4b > 0$ ,

则  $b > -6a$ , 所以  $-\frac{b}{2a} < 3$ ,

当  $1 < -\frac{b}{2a} < 3$  时,  $f(x)$  在  $\left[1, -\frac{b}{2a}\right)$  单调递减,

故  $f(1) < f(5) \Rightarrow f(x)$  在  $[1, +\infty)$  单调递增,

综上所述, “函数  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上单调递增”是“ $f(1) < f(5)$ ”的充分不必要条件,

故选: A

8. 【答案】D

【分析】先判断函数的奇偶性和单调性, 再根据函数的奇偶性和单调性解不等式即可.

【详解】当  $x \in [0, +\infty)$  时,  $f(x) = x^2 \geq 0$  且函数  $f(x)$  为增函数,

当  $x > 0$  时, 则  $-x < 0$ , 则  $f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 = -f(x)$ ,

当  $x \in (-\infty, 0)$  时,  $f(x) = -x^2 < 0$  且函数  $f(x)$  为增函数,

此时  $-x > 0$ , 则  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = -f(x)$ ,

所以函数  $f(x)$  是  $\mathbb{R}$  上的增函数, 且  $f(x)$  为奇函数,

则  $f(x+m) \leq -f(x)$ , 即为  $f(x+m) \leq f(-x)$ ,

所以  $x+m \leq -x$  对  $\forall x \in (-\infty, 1]$  恒成立,

即  $m \leq -2x$  对  $\forall x \in (-\infty, 1]$  恒成立,

当  $x \in (-\infty, 1]$  时,  $(-2x)_{\min} = -2$ ,

所以  $m \leq -2$ ,

所以实数  $m$  的取值范围是  $(-\infty, -2]$ .

故选: D.

9. 【答案】B

【分析】先根据函数的奇偶性求出函数的单调区间, 从而求出  $f(x) > 0$  和  $f(x) < 0$  时,  $x$  的范围, 再由

$f(x)f(x+5) < 0$  可得  $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x+5) < 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x+5) > 0 \end{cases}$ , 进而可得出答案.

【详解】因为函数  $f(x)$  是定义在  $\mathbb{R}$  上的奇函数, 所以  $f(0) = 0$ ,

又函数  $f(x)$  在区间  $(-\infty, -1]$  上单调递增,

所以函数  $f(x)$  在区间  $[1, +\infty)$  上单调递增,

又  $f(3)=0$ , 所以  $f(-3)=0$ ,

又因函数  $f(x)$  在区间  $[-1, 1]$  上单调递减,

所以当  $f(x) > 0$  时,  $-3 < x < 0$  或  $x > 3$ ,

当  $f(x) < 0$  时,  $0 < x < 3$  或  $x < -3$ ,

由  $f(x)f(x+5) < 0$ , 得  $\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x+5) < 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x+5) > 0 \end{cases}$ ,

即  $\begin{cases} -3 < x < 0 \text{ 或 } x < 3 \\ 0 < x+5 < 3 \text{ 或 } x+5 < -3 \end{cases}$  或  $\begin{cases} 0 < x < 3 \text{ 或 } x < -3 \\ -3 < x+5 < 0 \text{ 或 } x+5 > 3 \end{cases}$ ,

解得  $-3 < x < -2$  或  $-8 < x < -5$  或  $0 < x < 3$ ,

所以不等式  $f(x)f(x+5) < 0$  的解集是  $(-8, -5) \cup (-3, -2) \cup (0, 3)$ .

故选: B.

10. 【答案】A

【分析】根据特征函数的定义, 结合集合的运算以及特殊值, 即可判断和选择.

【详解】若  $x \in A \cap B$ , 则  $f_A(x) = f_B(x)$ , 若  $x \in A \cap \complement_U B$ , 则  $f_A(x) > f_B(x)$ ,

若  $x \in B \cap \complement_U A$ , 则  $f_A(x) < f_B(x)$ , 若  $x \in \complement_U (A \cup B)$ , 则  $f_A(x) = f_B(x)$ .

对①,  $\forall x \in U$ , 都有  $f_A(x) \leq f_B(x)$ , 则不能存在  $x \in A \cap \complement_U B$  的情形, 所以得  $A \subseteq B$ , ①正确;

对②若  $\forall x \in U$ , 都有  $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x)$ , 当  $x \in A \cap B$  时,  $x \in A \cup B$ , 则  $f_{A \cup B}(x) = 1$ ,

$f_A(x) + f_B(x) = 1 + 1 = 2$ ,

故其不能含有  $x \in A \cap B$ , 即  $A \cap B = \emptyset$ , ②正确;

对③若  $A \cup B = U$ , 则  $\forall x \in U$ , 当  $A \cap B \neq \emptyset$  时, 若  $x \in A \cap B$ , 则  $f_A(x) + f_B(x) = 1 + 1 = 2$ , ③错误;

对④, 设  $A = \{1, 2, 3, \dots, (n-1)\}$ ,  $B = \{1\}$ , 则  $|A| + |B| = n$ , 但  $A \cup B \neq U$ , ④错误.

故选: A

二、填空题 (每题 5 分, 共 8 题)

11. 【答案】(0, 1]

【分析】根据开偶数次方根号里的数大于等于零和对数的真数大于零即可得解.

【详解】由  $f(x) = \sqrt{1-x} + \log_2 x$ ,

得  $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x > 0 \end{cases}$ ，解得  $0 < x \leq 1$ ，

所以函数  $f(x) = \sqrt{1-x} + \log_2 x$  的定义域是  $(0,1]$ 。

故答案为： $(0,1]$ 。

12. 【答案】  $\exists x \in [-1,3], x^2 - a < 0$

【分析】根据全称量词命题的否定为存在量词命题即可得解。

【详解】因为全称量词命题的否定为存在量词命题，

所以命题  $P$  的否定形式为  $\exists x \in [-1,3], x^2 - a < 0$ 。

故答案为： $\exists x \in [-1,3], x^2 - a < 0$ 。

13. 【答案】  $-3$

【分析】根据幂函数的定义求出  $a, b$  即可得解。

【详解】由幂函数  $f(x) = (b+2)x^a$ ，

得  $b+2=1$ ，所以  $b=-1$ ，

故  $f(x) = x^a$ ，

又函数  $f(x)$  的图象经过点  $(2,8)$ ，

所以  $2^a = 8$ ，所以  $a=3$ ，

所以  $a \cdot b = -3$ 。

故答案为： $-3$ 。

14. 【答案】  $4$

【分析】根据对数运算法则进行计算得出结果。

【详解】原式  $= \log_{\sqrt{6}} 45 + \log_{\sqrt{6}} 4 - \log_{\sqrt{6}} 5 = \log_{\sqrt{6}} \left( \frac{45 \times 4}{5} \right) = \log_{\sqrt{6}} 36 = \log_{\sqrt{6}} (\sqrt{6})^4 = 4$ 。

故答案为： $4$ 。

15. 【答案】 ①.  $\frac{1}{2}$  ②.  $\frac{16}{3}$

【分析】应用指数幂的运算性质及根式和指数式的互化即可。

【详解】依题： $a^{-\frac{m}{2}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{a^m}} = \frac{1}{2}$ ，

$$a^{2m-n} = a^{2m} \div a^n = (a^m)^2 \div a^n = \frac{16}{3}$$

故答案为： $\frac{1}{2}$ ； $\frac{16}{3}$

16. 【答案】  $f(x) = 2^x - 1$  (答案不唯一, 满足条件即可)

【分析】取  $f(x) = 2^x - 1$ , 利用  $y = 2^x$  的定义域为  $\mathbf{R}$ , 值域为  $(0, +\infty)$ , 即可得出结果.

【详解】易知,  $f(x) = 2^x - 1$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ,

因为函数  $y = 2^x$  是定义域上的增函数, 值域为  $(0, +\infty)$ , 所以  $f(x) = 2^x - 1 > -1$  恒成立,

但函数  $f(x) = 2^x - 1$  没有最小值,

故答案为:  $f(x) = 2^x - 1$  (答案不唯一, 满足条件即可)

17. 【答案】  $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

【分析】首先求解集合  $A, B$ , 再根据集合的运算结果求实数  $m$  的取值范围.

【详解】当  $x > 2$  时,  $y = \log_2 x$  为单调递增函数, 所以  $y > 1$ , 即  $A = \{y | y > 1\}$ ,

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$  为单调递减函数, 当  $y \geq m$  时, 即  $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq m$  时, 解得  $x \leq \log_{\frac{1}{2}} m$ , 即  $B = \left\{x \mid x \leq \log_{\frac{1}{2}} m\right\}$ ,

若  $A \cup B = \mathbf{U}$ ,

则  $\log_{\frac{1}{2}} m \geq 1$ , 解得:  $0 < m \leq \frac{1}{2}$ ,

所以实数  $m$  的取值范围是  $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ .

故答案为:  $\left(0, \frac{1}{2}\right]$

18. 【答案】 ①. 0 ②.  $\frac{1}{2} < a \leq \frac{3}{4}$

【分析】(1) 当  $a = \frac{1}{4}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^x + \frac{1}{4}, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ , 分别求出  $x < 1$  和  $x \geq 1$  时, 函数值的范围, 即可求出

结果;

(2) 因为  $x \geq 1$  时,  $y = \ln x$  的值域为  $[0, +\infty)$ , 从而得出  $(-\infty, 0)$  是函数  $y = (2 - 4a)a^x + a (x < 1)$  值域的子集, 即可求出结果.

【详解】(1) 当  $a = \frac{1}{4}$ ,  $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}\right)^x + \frac{1}{4}, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$ ,

由解析式易知, 当  $x < 1$  时,  $f(x)$  单调递减,  $x \geq 1$  时,  $f(x)$  单调递增,

所以, 当  $x < 1$  时,  $f(x) > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ , 当  $x \geq 1$  时,  $f(x) \geq \ln 1 = 0$ ,

故  $a = \frac{1}{4}$  时, 函数  $f(x)$  的最小值为 0.

(2) 因为  $x \geq 1$  时,  $y = \ln x$  的值域为  $[0, +\infty)$ ,

所以  $(-\infty, 0)$  是函数  $y = (2-4a)a^x + a (x < 1)$  值域的子集,

$$\text{故 } \begin{cases} 2-4a < 0 \\ 0 < a < 1 \\ (2-4a)a + a \geq 0 \end{cases}, \text{ 解得 } \frac{1}{2} < a \leq \frac{3}{4},$$

所以实数  $a$  的取值范围是  $\frac{1}{2} < a \leq \frac{3}{4}$ ,

故答案为: (1) 0; (2)  $\frac{1}{2} < a \leq \frac{3}{4}$ .

三、解答题 (共四小题, 共 60 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程.)

19. 【答案】(1)  $B \cap (\complement_U A) = \{x | 2 < x < 3\}$

(2)  $(-\infty, -2) \cup (6, +\infty)$

(3) -1

【分析】(1) 根据绝对值不等式求解集合  $A$ , 进而求出  $A$  的补集, 再根据交集运算求解即可;

(2) 根据元素与集合的关系列不等式求解即可;

(3) 根据并集结果, 对集合  $B$  分类讨论求解即可.

【小问 1 详解】

集合  $A = \{x | |x| \leq 2\} = \{x | -2 \leq x \leq 2\}$ , 所以  $\complement_U A = \{x | x < -2 \text{ 或 } x > 2\}$ ,

当  $a = 1$  时,  $B = \{x | x^2 - 2x - 3 < 0\} = \{x | -1 < x < 3\}$ ,

所以  $B \cap (\complement_U A) = \{x | 2 < x < 3\}$ ;

【小问 2 详解】

因为  $-6 \in B$ , 所以  $(-6)^2 - 2a \cdot (-6) - 3a^2 < 0$ , 化简得  $a^2 - 4a - 12 > 0$ ,

所以  $(a-6) \cdot (a+2) > 0$ , 所以  $a > 6$  或  $a < -2$ , 经检验符合题意,

所以实数  $a$  的取值范围为  $(-\infty, -2) \cup (6, +\infty)$ ;

【小问 3 详解】

由 (1) 知  $A = \{x | -2 \leq x \leq 2\} = [-2, 2]$ ,

因为  $A \cup B = (-3, 2]$ , 所以  $-3$  是集合  $B$  中的一个端点, 即  $-3$  是方程  $x^2 - 2ax - 3a^2$  的一个根,

所以  $(-3)^2 - 2a \times (-3) - 3a^2 = 0$ , 即  $a^2 - 2a - 3 = 0$ , 解得  $a = -1$  或  $a = 3$ ,

当  $a = -1$  时,  $B = \{x | x^2 + 2x - 3 < 0\} = \{x | -3 < x < 1\} = (-3, 1)$ ,

此时  $A \cup B = (-3, 2]$ , 符合题意,

当  $a = 3$  时,  $B = \{x | x^2 - 6x - 27 < 0\} = \{x | -3 < x < 9\} = (-3, 9)$ ,

此时  $A \cup B = (-3, 9)$ , 不合题意,

综上, 实数  $a$  的值为  $-1$ .

20. 【答案】(1) 奇函数, 证明见解析;

(2) 单调递减, 证明见解析

(3)  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

【分析】(1) 根据函数奇偶性的定义判断与证明即可;

(2) 根据单调性的定义, 取值、作差(变形)、定号、下结论等步骤进行证明即可;

(3) 分  $x > 0$  和  $x < 0$  讨论, 运用基本不等式可求得值域.

【小问 1 详解】

$f(x)$  为奇函数, 理由如下:

函数  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ , 定义域为  $\mathbf{R}$ , 所以  $x \in \mathbf{R}$ ,  $-x \in \mathbf{R}$

$$\text{则 } f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 + 1} = -\frac{x}{x^2 + 1} = -f(x),$$

所以  $f(x)$  为奇函数.

【小问 2 详解】

$f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 证明如下:

证明: 任取  $x_1, x_2 \in (1, +\infty)$ , 且  $x_1 < x_2$ , 则

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{x_1^2 + 1} - \frac{x_2}{x_2^2 + 1} = \frac{x_1 x_2^2 + x_1 - x_2 x_1^2 - x_2}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} = \frac{(x_1 x_2 - 1)(x_2 - x_1)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)},$$

因为  $x_2 > x_1 > 1$ , 所以  $x_2 - x_1 > 0, x_1 x_2 - 1 > 0$

所以  $f(x_1) - f(x_2) > 0$ , 即  $f(x_1) > f(x_2)$ ,

故函数  $f(x)$  在  $(1, +\infty)$  上是减函数.

【小问 3 详解】

因为  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ , 所以  $f(0) = 0$ .

$$\text{当 } x > 0 \text{ 时, } f(x) > 0, f(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} + x} \leq \frac{1}{2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}}} = \frac{1}{2},$$



当且仅当  $\frac{1}{x} = x$ , 即  $x = 1$  时, 等号成立,

所以  $0 < f(x) \leq \frac{1}{2}$ .

当  $x < 0$  时,  $f(x) < 0$ ,  $f(x) = \frac{-1}{\frac{1}{(-x)} + (-x)} \geq \frac{-1}{2\sqrt{(-x) \cdot \frac{1}{(-x)}}} = -\frac{1}{2}$ ,

当且仅当  $\frac{1}{-x} = (-x)$ , 即  $x = -1$  时, 等号成立,

所以  $-\frac{1}{2} \leq f(x) < 0$ .

所以函数  $f(x)$  的值域为  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

21. 【答案】(1)  $b = 2400$ ,  $C(10) = 8$  (万元)

$$(2) F = \frac{1800}{x+5} + 0.5x, x \geq 0$$

(3) 当  $x = 55$  时,  $F$  取最小值, 最小值是 57.5

【分析】(1) 将  $x = 0$  代入  $C(x) = \frac{b}{20x+100}$  即可算出  $b$ , 进而可求得  $C(10)$ ;

(2) 由题意  $F$  就是  $C$  与安装费用之和, 再结合 (1) 即可得解;

(3) 运用基本不等式求最小值即可.

【小问 1 详解】

将  $x = 0$  代入  $C(x) = \frac{b}{20x+100}$  得:  $C = \frac{b}{100} = 24$ , 解得  $b = 2400$ ,

$$\text{所以 } C(x) = \frac{2400}{20x+100},$$

$$\text{则 } C(10) = \frac{2400}{200+100} = 8 \text{ (万元);}$$

【小问 2 详解】

由 (1) 得:

$$F \text{ 与 } x \text{ 的函数关系式为: } F = 15 \times \frac{2400}{20x+100} + 0.5x = \frac{1800}{x+5} + 0.5x, x \geq 0;$$

【小问 3 详解】

$$F = \frac{1800}{x+5} + 0.5x = \frac{900}{0.5x+2.5} + (0.5x+2.5) - 2.5 \geq 2\sqrt{900} - 2.5 = 57.5,$$

当且仅当  $\frac{900}{0.5x+2.5} = 0.5x+2.5$ , 即  $x = 55$  时等号成立,

所以当  $x=55$  时,  $F$  取最小值, 最小值是 57.5.

22. 【答案】(1) 3, 5, 7, 9

$$(2) a_i = i (i=1, 2, \dots, n), S_n = n^2$$

(3) 证明见解析

【分析】(1) 根据定义计算即可;

(2) 令  $a_i = i (i=1, 2, \dots, n)$ , 再根据定义计算即可;

(3) 交换每一列中两个数的位置, 所得的  $S_n$  的值不变, 不妨设  $a_i > b_i$ , 记  $A = \sum_{i=1}^n a_i$ ,  $B = \sum_{i=1}^n b_i$ , 求出

$S_n = A - B$  即可得证.

【小问 1 详解】

因为  $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5$ ,

所以  $b_1, b_2, b_3$  的值都可为 2, 4, 6,

$$\text{则 } S_3 = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + |a_3 - b_3| = |1 - b_1| + |3 - b_2| + |5 - b_3|,$$

所以  $S_3$  的所有可能的取值为 3, 5, 7, 9;

【小问 2 详解】

令  $a_i = i (i=1, 2, \dots, n)$ ,

则无论  $b_1, b_2, \dots, b_n$  填写的顺序如何, 都有  $S_n = n^2$ ,

$\because a_i = i, \therefore b_i \in \{n+1, n+2, \dots, 2n\} (i=1, 2, \dots, n)$ ,

$\because a_i < b_i (i=1, 2, \dots, n)$ ,

$$\begin{aligned} \text{所以 } S_n &= \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i) = \sum_{i=1}^n b_i - \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=n+1}^{2n} i - \sum_{i=1}^n i \\ &= \frac{(n+1+2n)n}{2} - \frac{(1+n)n}{2} = n^2; \end{aligned}$$

注:  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{1, 2, \dots, n\}$  或  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \{n+1, n+2, \dots, 2n\}$  均满足条件.

【小问 3 详解】

显然, 交换每一列中两个数的位置, 所得的  $S_n$  的值不变,

不妨设  $a_i > b_i$ , 记  $A = \sum_{i=1}^n a_i$ ,  $B = \sum_{i=1}^n b_i$ , 其中  $i=1, 2, \dots, n$ ,

$$\text{则 } S_n = \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| = \sum_{i=1}^n (a_i - b_i) = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n b_i = A - B,$$

$$\text{因为 } A + B = \sum_{i=1}^{2n} i = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1),$$

所以  $A+B$  与  $n$  具有相同的奇偶性,

又因为  $A+B$  与  $A-B$  具有相同的奇偶性,

所以  $S_n = A-B$  与  $n$  的奇偶性相同,

所以  $S_n$  的所有可能取值的奇偶性相同.

**【点睛】** 关键点点睛: 本题考查了新定义问题, 解决问题的关键是把新定义理解透彻.



# 北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023年10-11月北京各区各年级期中试题 & 答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！

