2024年高考数学仿真模拟卷(五)（新高考专用）

解析

(时间：120 分钟　满分：150 分)

一、选择题(本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的)

1.答案　D

解析　由 $z+2\mathrm{i}=\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}$，得 $z=\dfrac{1}{1-\mathrm{i}}-2\mathrm{i}=\dfrac{1+\mathrm{i}}{2}-2\mathrm{i}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}\mathrm{i}$，所以 $\overline{z}\cdot(1+3\mathrm{i})=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2}\mathrm{i}\right)\cdot(1+3\mathrm{i})=\dfrac{-8+6\mathrm{i}}{2}=-4+3\mathrm{i}$，

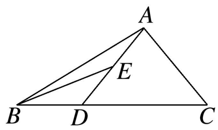
所以 $|\overline{z}\cdot(1+3\mathrm{i})|=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$.

2.答案　C

解析　由题意，可得 $\log_2x<1=\log_22$，$\therefore A=\{x|0<x<2\}$；又 $x^2+x-2\leqslant0$，$\therefore B=\{x|-2\leqslant x\leqslant1\}$，则 $A\cap B=\{x|0<x\leqslant1\}$.

3.答案　B

解析　由题设 $\overrightarrow{BE}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BD})=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)=\dfrac{1}{2}\left[\overrightarrow{BA}+\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\right]=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$，



所以 $\overrightarrow{BE}=-\dfrac{2}{3}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{6}\boldsymbol{b}$.

4.答案　B

解析　由图可知，讲座前 10 位居民问卷答题的正确率分别为 65%,60%,70%,60%,65%,75%,90%,85%,80%,95%，

讲座后 10 位居民问卷答题的正确率分别为 90%,85%,80%,90%,85%,85%,95%,100%,85%,100%.

讲座前 10 位居民问卷答题的正确率按从小到大排列为 60%,60%,65%,65%,70%,75%,80%,85%,90%,95%，

其中位数为 $\dfrac{70\%+75\%}{2}=72.5\%<75\%$，故 A 错误；

讲座后 10 位居民问卷答题的正确率的众数为 85%，故 B 正确；

由图可知，讲座前 10 位居民问卷答题的正确率波动比讲座后的大，

所以讲座前 10 位居民问卷答题的正确率的方差大于讲座后正确率的方差，故 C 错误；

讲座前 10 位居民问卷答题的正确率的极差为 95%－60%＝35%，

讲座后 10 位居民问卷答题的正确率的极差为 100%－80%＝20%，20%<35%，故 D 错误．

5.答案　D

解析　因为 $\cos2\theta-3\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，所以 $2\cos^2\theta-1+3\cos\theta=1$，所以 $(2\cos\theta-1)(\cos\theta+2)=0$，

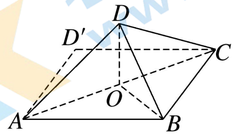
因为 $\theta\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$，所以 $\cos\theta\in(0,1)$，所以 $2\cos\theta-1=0$，则 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\tan\theta=-\sqrt{3}$，

所以 $\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=-2-\sqrt{3}$.

6.答案　A

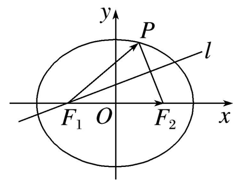
解析　由图所示，易知三棱锥 $D-ABC$ 的外接球球心为 AC 的中点 O，易得 $OB=OC=OD=1$，且 $OC\perp OB$，$DO\perp$ 平面 OBC，计算可得 $BC=CD=BD=\sqrt{2}$，设球心到平面 BCD 的距离为 d，



则 $V_{D-OBC}=V_{O-BCD}\Rightarrow\frac{1}{3}\times1\times\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{3}\times d\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{2})^2\Rightarrow d=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

7.答案　C

解析　设 $\angle PF_1F_2=\theta$，由已知可得 $|PF_1|=|F_1F_2|=2c$，



根据椭圆的定义有 $|PF_2|=2a-|PF_1|=2a-2c$. 又 $\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_1F_2}=\frac{1}{2}a^2$，

所以 $|\overrightarrow{F_1P}|\cdot|\overrightarrow{F_1F_2}|\cdot\cos\theta=\frac{1}{2}a^2$，即 $4c^2\cos\theta=\frac{1}{2}a^2$.

在 $\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理可得 $|PF_2|^2=|PF_1|^2+|F_1F_2|^2-2|PF_1|\cdot|F_1F_2|\cos\theta$，

即 $(2a-2c)^2=8c^2-8c^2\cos\theta=8c^2-a^2$，整理可得 $4c^2+8ac-5a^2=0$，

等式两边同时除以 a^2 可得 $4e^2+8e-5=0$，解得 $e=\frac{1}{2}$ 或 $e=-\frac{5}{2}$(舍去)，

所以 $e=\frac{1}{2}$.

8.答案　A

解析　由题意可得 $f(2+x)=-f(x)$，$f(4+x)=-f(x+2)=f(x)$，即 $f(x)$ 是周期为 4 的函数，且图象关于直线 $x=1$ 对称.

令 $g(x)=f(x)-\pi x$，则 $g'(x)=f'(x)-\pi$，

∵当 $x\in[0,1]$ 时，$f'(x)>\pi$，∴当 $x\in[0,1]$ 时，$g'(x)>0$，∴函数 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，

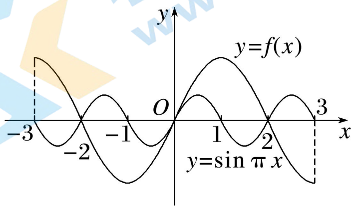
∴当 $x\in[0,1]$ 时，$g(x)\geqslant g(0)=f(0)-\pi\times0=0$，即 $f(x)-\pi x\geqslant0$，

设 $h(x)=\sin\pi x-\pi x$，$x\in[0,1]$，$h'(x)=\pi\cos\pi x-\pi=\pi(\cos\pi x-1)\leqslant0$，

即函数 $h(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，则 $h(x)\leqslant h(0)=0$，

即 $\sin\pi x\leqslant\pi x$，故 $f(x)\geqslant\sin\pi x$ 在 $[0,1]$ 上恒成立，

结合对称性可画出函数 $f(x)$ 和 $y=\sin\pi x$ 在 $[-3,3]$ 上的简图，如图所示.



由图象可知，不等式 $f(x)\leqslant\sin\pi x$ 在 $[-3,3]$ 上的解集为 $[-2,0]\cup[2,3]$.

二、选择题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求的. 全部选对得 5 分，部分选对得 2 分，有选错的得 0 分)

9. 答案　AC

解析　从两个盒子中取出的两个数字之和只有两种结果：偶数和奇数. 而“数字之和为 9”是结果为奇数的其中一种情况，所以事件 A 与 B 是互斥事件，选项 A 正确；

从两个盒子各取 1 个小球，共有 $4\times4=16$(种)结果，其中数字之和为偶数的有 8 种；数字之和等于 9 的有 $5+4,6+3,7+2,8+1$ 这 4 种；数字之和大于 9 的有 $6+4,7+3,7+4,8+2,8+3,8+4$ 这 6 种.

所以 $P(A)=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$，$P(C)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$.因为 $P(B)+P(C)=\frac{5}{8}\neq1$，所以 B 与 C 不是对立事件，选项 B 错误；

事件 AC 为“取出的数字之和为偶数且大于 9”，其结果有 4 种：6+4,7+3,8+2,8+4.所以 $P(AC)=\frac{4}{16}=\frac{1}{4}$，显然

$P(AC)\neq P(A)P(C)$，所以 A 与 C 不是相互独立事件，选项 C 正确；

因为当取出的数字之和为偶数时，不可能出现取出的数字之和等于 9 这种情况，

所以 $P(AB)=0$，而 $P(A)P(B)=\frac{1}{8}\neq0$，所以 A 与 B 不是相互独立事件，选项 D 错误.

10.答案　ABD

解析　由题意，d 的最大值为 5.2，最小值为 −0.8，则 $A+K=5.2$，$-A+K=-0.8$，所以 $A=3$，$K=2.2$，故 A 正确；

由旋转一周需要 60 s，得函数的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=60$，所以 $\omega=\frac{\pi}{30}$，故 B 正确；

故 $d=3\sin\left(\frac{\pi}{30}t+\varphi\right)+2.2\left(-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$，当 $t=0$ 时，$d=0$，则 $3\sin\varphi+2.2=0$，所以 $\sin\varphi=-\frac{2.2}{3}$，故 C 错误；

由 $\sin\varphi=-\frac{2.2}{3}$，$-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$，得 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$，因为 $t\in[0,60]$，所以 $\frac{\pi}{30}t+\varphi\in[\varphi,2\pi+\varphi]$，

由 $-\frac{\pi}{2}<\varphi<0$，得 $\frac{3\pi}{2}<2\pi+\varphi<2\pi$，

令 $d=3\sin\left(\frac{\pi}{30}t+\varphi\right)+2.2\geqslant3.7$，得 $\sin\left(\frac{\pi}{30}t+\varphi\right)\geqslant\frac{1}{2}$，所以 $\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{\pi}{30}t+\varphi\leqslant\frac{5\pi}{6}$，故 $5-\frac{30}{\pi}\varphi\leqslant t\leqslant25-\frac{30}{\pi}\varphi$，

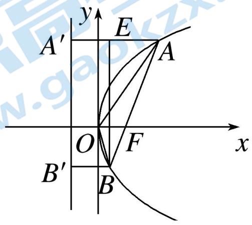
所以 P 离水面的距离不小于 3.7 m 的时长为 $25-\frac{30}{\pi}\varphi-\left(5-\frac{30}{\pi}\varphi\right)=20(\mathrm{s})$，故 D 正确.

11.答案　ABD

解析　如图，过点 A，B 分别作抛物线的准线 $x=-1$ 的垂线，垂足为 A'，B'.过点 B 作 AA' 的垂线，垂足为 E，

设 $|BF|=m$，则 $|AF|=3m$，

由抛物线定义得 $|AE|=|AA'|-|BB'|=|AF|-|BF|=3m-m=2m$，$|AB|=4m$，



在 Rt△ABE 中，$\cos\angle BAE=\frac{2m}{4m}=\frac{1}{2}$，所以 $\angle BAE=\frac{\pi}{3}$，所以直线 l 的斜率为 $\sqrt{3}$，故 A 项正确；

则直线 l 的方程为 $y=\sqrt{3}(x-1)$，联立 $\begin{cases}y=\sqrt{3}(x-1),\\y^2=4x,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x_1=3,\\y_1=2\sqrt{3}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_2=\frac{1}{3},\\y_2=-\frac{2\sqrt{3}}{3},\end{cases}$

即 $A(3,2\sqrt{3})$，$B\left(\frac{1}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$，所以 $|AB|=\sqrt{\left(3-\frac{1}{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{16}{3}$，故 B 项正确；

连接 OA，OB，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1-4=-3\neq0$，故 C 项错误；

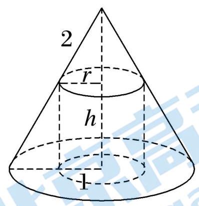
线段 AF 的中点坐标为 $(2,\sqrt{3})$，它到 y 轴的距离为 2，因为 $|AF|=4$，所以 $r=2$，所以以 AF 为直径的圆与 y 轴相切，故 D 项正确.

12.答案　ABC

解析　因为圆锥的轴截面是边长为 2 的正三角形，所以圆锥的母线长为 2，底面圆的半径为 1，

圆锥的高为 $\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，所以圆锥的表面积为 $S=\pi\times1\times2+\pi\times1^2=2\pi+\pi=3\pi$，故选项 A 正确；

设圆柱的高为 h，如图，则 $\frac{r}{1}=\frac{\sqrt{3}-h}{\sqrt{3}}$，解得 $h=\sqrt{3}(1-r)$，



则圆柱的体积为 $V(r)=\pi r^2\cdot h=\sqrt{3}\pi r^2(1-r)$，

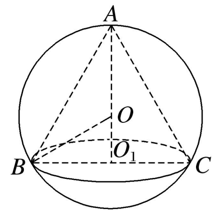
令 $f(r)=r^2(1-r)(0<r<1)$，则 $f'(r)=r(2-3r)$，

当 $0<r<\frac{2}{3}$ 时，$f'(r)>0$，$f(r)$ 单调递增，当 $\frac{2}{3}<r<1$ 时，$f'(r)<0$，$f(r)$ 单调递减，

所以 $f(r)_{\max}=\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\frac{1}{3}=\frac{4}{27}$，所以圆柱的体积最大值为 $V(r)_{\max}=\sqrt{3}\pi\times\frac{4}{27}=\frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$，故选项 B 正确；

如图，设圆锥的外接球球 O 的半径为 R，则由 $\triangle ABC$ 是正三角形可得 $BO_1=1$，$AO_1=\sqrt{3}$，

在 $Rt\triangle BO_1O$ 中，$R^2=(\sqrt{3}-R)^2+1^2$，解得 $R=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，



所以圆锥的外接球体积为 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3=\frac{32\sqrt{3}\pi}{27}$，故选项 C 正确；

因为 $V(r)=\sqrt{3}\pi r^2(1-r)$，

所以 $\frac{V(r_1)+V(r_2)}{2}=\frac{\sqrt{3}\pi r_1^2(1-r_1)+\sqrt{3}\pi r_2^2(1-r_2)}{2}=\frac{\sqrt{3}\pi(r_1^2-r_1^3+r_2^2-r_2^3)}{2}$，

$V\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)=\sqrt{3}\pi\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2\left(1-\frac{r_1+r_2}{2}\right)=\sqrt{3}\pi\left[\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2-\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^3\right]$，

所以 $V(r_1)+V(r_2)-2V\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)=\sqrt{3}\pi\left[r_1^2-r_1^3+r_2^2-r_2^3-2\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^2+2\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)^3\right]=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}(r_1-r_2)^2\left[1-\frac{3}{2}(r_1+r_2)\right]$，

由于 $\frac{3}{2}(r_1+r_2)$ 与 1 的关系无法判断，所以 $\frac{V(r_1)+V(r_2)}{2}$ 与 $V\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)$ 的大小关系不确定，故选项 D 错误.

三、填空题(本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

13．答案　$\frac{11}{4}$

解析　$\because a_1+a_5=3a_2$，$\therefore 2a_1+4d=3a_1+3d$，$\therefore a_1=d$，$\frac{S_{10}}{a_{20}}=\frac{10a_1+45d}{a_1+19d}=\frac{55d}{20d}=\frac{11}{4}$.

14.答案　42

解析　若这两名同学选自同一个学校，则有 $C_3^1C_2^1=6$(种)安排方法；

若这两名同学选自两所不同学校有 $C_3^2C_2^1C_2^1$ 种选法，

比如 1,2 分别选自甲、乙两所学校，则 1 去乙，2 可去甲或丙校，若 1 去丙校，则 2 只能去甲校，

即此时有 3 种方法安排学生，故有 $C_3^2C_2^1C_2^1\times(2+1)=36$(种)安排方法.

综上，有 $36+6=42$(种)不同的安排方法.

15.答案　$x^2+y^2+x-y-2=0$

解析　联立 $\begin{cases}x^2+y^2-4=0,\\x^2+y^2-4x+4y-12=0,\end{cases}$　整理得 $y=x+2$，

代入 $x^2+y^2-4=0$，得 $x^2+2x=0$，解得 $x=0$ 或 $x=-2$，

则圆 $x^2+y^2-4=0$ 与圆 $x^2+y^2-4x+4y-12=0$ 的交点坐标为 $(0,2)$，$(-2,0)$，

设经过点 $P(1,1)$ 以及 $(0,2)$，$(-2,0)$ 的圆的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，

则$\begin{cases}2+D+E+F=0,\\4+2E+F=0,\\4-2D+F=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}D=1,\\E=-1,\\F=-2,\end{cases}$

故经过点 $P(1,1)$以及圆 $x^2+y^2-4=0$ 与圆 $x^2+y^2-4x+4y-12=0$ 交点的圆的方程为 $x^2+y^2+x-y-2=0$.

16.答案 -1

解析 令 $x=y=1$，则 $f(2)=f(1)f(0)+f(0)f(1)=2f(0)=0$，$\therefore f(0)=0$；

令 $x=2$，$y=-1$，则 $f(1)=f^2(2)+f^2(-1)=f^2(-1)=1$，又 $f(-1)<0$，$\therefore f(-1)=-1$，

令 $y=1$，则 $f(x+1)=f(x)f(0)+f(1-x)f(1)=f(1-x)$，$\therefore f(x)$关于直线 $x=1$ 对称；

令 $y=-x$，则 $f(0)=f(x)f(1+x)+f(1-x)f(-x)=[f(x)+f(-x)]f(1+x)=0$，

$\because f(1+x)=0$ 不恒成立，$\therefore f(x)+f(-x)=0$ 恒成立，$\therefore f(x)$为奇函数，

$\because f(x+2)=f(-x)=-f(x)$，$\therefore f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，

$\therefore f(x)$是周期为 4 的周期函数，$\therefore f(55)=f(4\times14-1)=f(-1)=-1$.

四、解答题(本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17．**证明** (1)由已知，$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$，$\therefore a_{n+2}-2a_{n+1}=5a_{n+1}-6a_n-2a_{n+1}$，

$\therefore a_{n+2}-2a_{n+1}=3a_{n+1}-6a_n=3(a_{n+1}-2a_n)$，

显然 $a_{n+1}-2a_n=0$ 与 $a_1=1$，$a_2=5$ 矛盾，

$\therefore a_{n+1}-2a_n\neq0$，$\therefore \dfrac{a_{n+2}-2a_{n+1}}{a_{n+1}-2a_n}=3$，

$\therefore$数列$\{a_{n+1}-2a_n\}$是首项为 $a_2-2a_1=5-2=3$，公比为 3 的等比数列.

(2)$\because a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$，$\therefore a_{n+2}-3a_{n+1}=5a_{n+1}-6a_n-3a_{n+1}$，

$\therefore a_{n+2}-3a_{n+1}=2a_{n+1}-6a_n=2(a_{n+1}-3a_n)$，

显然 $a_{n+1}-3a_n=0$ 与 $a_1=1$，$a_2=5$ 矛盾，

$\therefore a_{n+1}-3a_n\neq0$，$\therefore \dfrac{a_{n+2}-3a_{n+1}}{a_{n+1}-3a_n}=2$，

$\therefore$数列$\{a_{n+1}-3a_n\}$是首项为 $a_2-3a_1=5-3=2$，公比为 2 的等比数列，

$\therefore a_{n+1}-3a_n=2^n$，①

又 $a_{n+1}-2a_n=3^n$，②

②−①得 $a_n=3^n-2^n$，

$\therefore$存在 $b_n=3^n$，$c_n=-2^n$，两个等比数列$\{b_n\}$，$\{c_n\}$，使得 $a_n=b_n+c_n$ 成立.

18．**解** (1)样本中爱好飞盘运动的年轻人中男性有 16 人，女性有 24 人，比例为 4∶6，

按照性别采用比例分配的分层随机抽样的方法抽取 10 人，则抽取男性 4 人，女性 6 人.

随机变量 X 的取值为 0,1,2,3.

$P(X=0)=\dfrac{C_6^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{6}$，　$P(X=1)=\dfrac{C_4^1C_6^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{2}$，　$P(X=2)=\dfrac{C_4^2C_6^1}{C_{10}^3}=\dfrac{3}{10}$，　$P(X=3)=\dfrac{C_4^3}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{30}$，

随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

随机变量 X 的数学期望 $E(X)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$.

(2)零假设为 H_0：爱好飞盘运动与性别无关联.

根据列联表中的数据，经计算得到 $\chi^2=\frac{50\times(6\times24-4\times16)^2}{10\times40\times22\times28}\approx1.299<6.635=x_{0.01}$，

根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，没有充分证据推断 H_0 不成立，因此可以认为 H_0 成立，即认为爱好飞盘运动与性别无关联.

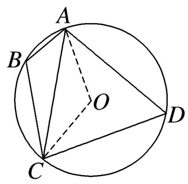
列联表中所有数据都扩大到原来的 10 倍后，$\chi^2=\frac{500\times(60\times240-40\times160)^2}{100\times400\times220\times280}\approx12.99>6.635=x_{0.01}$，

根据小概率值 $\alpha=0.01$ 的独立性检验，推断 H_0 不成立，即认为爱好飞盘运动与性别有关联，此推断犯错误的概率不大于 0.01.

所以结论不一样，原因是每个数据都扩大为原来的 10 倍，相当于样本量变大为原来的 10 倍，导致推断结论发生了变化.

19．**解** (1)如图所示，连接 OA，OC，

在△AOC 中，$OA=OC=\frac{7\sqrt{3}}{3}$，$AC=7$，∴$\cos\angle AOC=\frac{OA^2+OC^2-AC^2}{2OA\cdot OC}=\frac{\frac{49}{3}+\frac{49}{3}-49}{2\times\frac{49}{3}}=-\frac{1}{2}$，



∵$0<\angle AOC<\pi$，∴$\angle AOC=\frac{2\pi}{3}$，则 $\angle ADC=\frac{\pi}{3}$，

∵$AD=CD$，∴△ACD 为等边三角形，∴$S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AC^2\cdot\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\times49\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{49\sqrt{3}}{4}$，

∵ $\angle ABC+\angle ADC=\pi$，∴ $\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，

在△ABC 中，$AC^2=BC^2+AB^2-2BC\cdot AB\cos\frac{2\pi}{3}$，即 $49=25+AB^2+5AB$，

又∵$AB>0$，∴$AB=3$，∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\angle ABC=\frac{1}{2}\times3\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$，

∴$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ACD}=16\sqrt{3}$.

(2)设 $BC=a$，$AB=c$，在△ABC 中，由题意可知，$\angle ABC=\frac{2\pi}{3}$，$AC=7$，则 $\frac{a^2+c^2-49}{2ac}=-\frac{1}{2}$，

即 $a^2+c^2+ac=49$，故 $(a+c)^2=49+ac$，

∵$a>0$，$c>0$，∴$ac\leqslant\left(\frac{a+c}{2}\right)^2$，当且仅当 $a=c$ 时，等号成立，

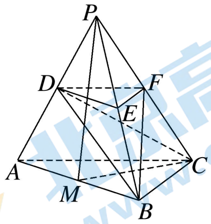
∴$(a+c)^2=49+ac\leqslant49+\left(\frac{a+c}{2}\right)^2$，当且仅当 $a=c$ 时，等号成立，

∴$\frac{3}{4}(a+c)^2\leqslant49$，则 $(a+c)^2\leqslant\frac{4\times49}{3}$，

∵$a+c>0$，故 $7<a+c\leqslant\frac{14\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $a=c$ 时，等号成立，∴$14<a+c+AC\leqslant\frac{14\sqrt{3}}{3}+7$，

即△ABC 周长的最大值为 $\frac{14\sqrt{3}}{3}+7$.

20．(1)**证明**　如图，延长三条侧棱交于点 P.因为 $BC=2$，$EF=1$，所以 D，E，F 分别为 AP，BP，CP 的中点，且 $AB=2DE=2\sqrt{5}$.



因为 $AD=BE$，所以 $AP=BP$.

取 AB 的中点 M，连接 PM，CM，则 $PM\perp AB$.

因为 $AC=4$，$BC=2$，$AB=2\sqrt{5}$，所以 $AC^2+BC^2=AB^2$，所以 $CA\perp CB$.

因为 $AM=CM$，则$\triangle PAM\cong\triangle PCM$，故$\angle PMC=\angle PMA=90°$，

即 $PM\perp MC$.

因为 $PM\perp AB$，$AB\cap MC=M$，$AB\subset$平面 ABC，$MC\subset$平面 ABC，所以 $PM\perp$平面 ABC.

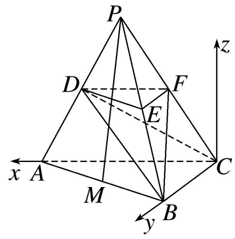
又 $PM\subset$平面 $ABED$，故平面 $ABED\perp$平面 ABC.

(2)**解**　因为 $V_{D-BCF}=\frac{1}{2}V_{D-BCP}=\frac{1}{4}V_{A-BCP}=\frac{1}{4}V_{P-ABC}=2$，所以 $V_{P-ABC}=8$.

而 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times4\times2=4$，

所以 $V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}\times PM=\frac{1}{3}\times4\times PM=8$，解得 $PM=6$.

以 C 为坐标原点，CA，CB 所在直线分别为 x 轴、y 轴，作 Cz 垂直于平面 ABC，以 Cz 为 z 轴，建立空间直角坐标系，如图所示，



则 $A(4,0,0)$，$P(2,1,6)$，$B(0,2,0)$，$D\left(3,\frac{1}{2},3\right)$，$F\left(1,\frac{1}{2},3\right)$，

设 $\boldsymbol{n}_1=(x,y,z)$为平面 EBD 的法向量，即 $\boldsymbol{n}_1$ 为平面 ABP 的法向量，

因为$\overrightarrow{AB}=(-4,2,0)$，$\overrightarrow{AP}=(-2,1,6)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AB}=-4x+2y+0=0,\\ \boldsymbol{n}_1\cdot\overrightarrow{AP}=-2x+y+6z=0,\end{cases}$　不妨设 $x=1$，则平面 EBD 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_1=(1,2,0)$.

同理可求得平面 BDF 的一个法向量 $\boldsymbol{n}_2=(0,2,1)$．所以$|\cos\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle|=\frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}=\frac{0+4+0}{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$，

所以平面 EBD 与平面 BDF 夹角的余弦值为$\frac{4}{5}$.

21．(1)**解**　由已知可得 $A(-1,0)$，$B(1,0)$.

因为点 $M(2,\sqrt{3})$，直线 BM 的斜率为 $k_{MB}=\frac{\sqrt{3}-0}{2-1}=\sqrt{3}$，所以直线 BM 的垂线 l 的方程为 $y-0=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$，

整理可得 $x=-\sqrt{3}y+2$.

设点 $S(x_1,y_1)$，$T(x_2,y_2)$，

联立直线 l 与双曲线的方程$\begin{cases}x=-\sqrt{3}y+2,\\ x^2-y^2=1\end{cases}$　可得 $2y^2-4\sqrt{3}y+3=0$，

则$\Delta=(-4\sqrt{3})^2-4\times2\times3=24>0$，则$\begin{cases}y_1+y_2=2\sqrt{3},\\ y_1y_2=\frac{3}{2},\end{cases}$

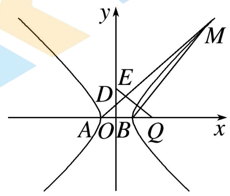
所以$|ST|=\sqrt{1+(-\sqrt{3})^2}\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=2\sqrt{(2\sqrt{3})^2-4\times\frac{3}{2}}=2\sqrt{6}$.原点 O 到直线 l 的距离为 $d=1$，

所以$\triangle OST$ 的面积为$\frac{1}{2}\times|ST|\times d=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{6}\times 1=\sqrt{6}$.

(2)**证明**　①②为条件，③为结论．

令点 $D(0，y_D)$，$M(x_0，y_0)(x_0>1)$，且 $x_0^2-y_0^2=1$，

因为 A，D，M 三点共线，所以$\frac{y_0}{x_0+1}=y_D$.



又$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DE}$，所以点 E 的坐标为 $E\left(0，\frac{2y_0}{x_0+1}\right)$，

因为直线 BM 的斜率为 $k_{BM}=\frac{y_0}{x_0-1}$.又 $BM\perp EQ$，所以 $k_{EQ}=-\frac{1}{k_{BM}}=\frac{1-x_0}{y_0}$.

设点 $Q(x_Q,0)$，

因为直线 EQ 的斜率 $k_{EQ}=\frac{\frac{2y_0}{x_0+1}}{-x_Q}$，所以 $x_Q=\frac{2y_0^2}{x_0^2-1}=\frac{2y_0^2}{y_0^2}=2$，所以$|OQ|=2$.

①③为条件，②为结论．

令点 $D(0，y_D)$，$M(x_0，y_0)(x_0>1)$，且 $x_0^2-y_0^2=1$，

因为 A，D，M 三点共线，所以$\frac{y_0}{x_0+1}=y_D$.又$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DE}$，所以点 E 的坐标为 $E\left(0，\frac{2y_0}{x_0+1}\right)$，

又$|OQ|=2$，点 Q 在 x 轴正半轴上，所以 $Q(2,0)$，所以 $k_{EQ}=\frac{\frac{2y_0}{x_0+1}}{-2}=-\frac{y_0}{x_0+1}$.

又 $k_{BM}=\frac{y_0}{x_0-1}$，所以 $k_{BM}\cdot k_{EQ}=\frac{y_0}{x_0-1}\cdot\left(-\frac{y_0}{x_0+1}\right)=-\frac{y_0^2}{x_0^2-1}=-\frac{x_0^2-1}{x_0^2-1}=-1$，

所以 $BM\perp EQ$.

②③为条件，①为结论．

令点 $D(0，y_D)$，$M(x_0，y_0)(x_0>1)$，且 $x_0^2-y_0^2=1$，不妨设 $y_0>0$.

因为 A，D，M 三点共线，所以 $y_D=\frac{y_0}{x_0+1}>0$，且 $y_D^2=\frac{y_0^2}{(x_0+1)^2}=\frac{x_0^2-1}{(x_0+1)^2}=\frac{x_0-1}{x_0+1}$.

因为$|OQ|=2$，点 Q 在 x 轴正半轴上，所以 $Q(2,0)$.

因为直线 BM 的斜率为 $k_{BM}=\frac{y_0}{x_0-1}$，又 $BM\perp EQ$，所以 $k_{EQ}=-\frac{1}{k_{BM}}=\frac{1-x_0}{y_0}$.

设点 $E(0，y_E)$，则 $k_{EQ}=\frac{y_E-0}{0-2}$，所以 $y_E=\frac{2(x_0-1)}{y_0}>0$，且 $y_E^2=\frac{4(x_0-1)^2}{y_0^2}=\frac{4(x_0-1)^2}{x_0^2-1}=\frac{4(x_0-1)}{x_0+1}$，

所以 $y_E=2y_D$，即$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{DE}$.

22．(1)**解**　$f'(x)=(x+1)e^{x-a}-\frac{1}{x}(x>0)$，

因为切线 l 与直线 $x+y+1=0$ 垂直，所以 $f'(1)=2e^{1-a}-1=1$，即 $a=1$，

又 $f(1)=1$，所以直线 l 的方程为 $x-y=0$.

(2)**证明** $f'(x)=(x+1)e^{x-a}-\frac{1}{x}=(x+1)\left[e^{x-a}-\frac{1}{x(x+1)}\right](x>0)$,

设 $h(x)=e^{x-a}-\frac{1}{x(x+1)}$，则 $h'(x)=e^{x-a}+\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}>0$,

即 $h(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数，

因为 $0<a<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，所以 $h(a)=1-\frac{1}{a(a+1)}=\frac{a^2+a-1}{a(a+1)}<0$,

又 $h(1)=e^{1-a}-\frac{1}{2}>0$，所以存在 $x_0\in(a,1)$，使得 $h(x_0)=e^{x_0-a}-\frac{1}{x_0(x_0+1)}=0$,

当 $x\in(0,x_0)$时，$h(x)<0$，则 $f'(x)<0$，即 $f(x)$在$(0,x_0)$上单调递减，

当 $x\in(x_0,+\infty)$时，$h(x)>0$，则 $f'(x)>0$，即 $f(x)$在$(x_0,+\infty)$上单调递增，

故 $x=x_0$是函数 $f(x)=xe^{x-a}-\ln x-\ln a(a>0)$的极小值点，也是最小值点，

则 $f(x)\geqslant f(x_0)=x_0e^{x_0-a}-\ln x_0-\ln a$.

又因为 $e^{x_0-a}=\frac{1}{x_0(x_0+1)}$，所以 $f(x_0)=\frac{1}{x_0+1}-\ln x_0-\ln a$,

要证 $f(x)>\frac{a}{a+1}$，只需证 $\frac{1}{x_0+1}-\ln x_0-\ln a>\frac{a}{a+1}$,

即证 $\frac{1}{x_0+1}-\ln x_0>\frac{a}{a+1}+\ln a$.

设 $g(x)=\frac{1}{x+1}-\ln x$，则 $g(x)=\frac{1}{x+1}-\ln x$ 在$(0,+\infty)$上为减函数，

因为 $x_0\in(a,1)$，所以 $x_0<\frac{1}{a}$，则 $g(x_0)>g\left(\frac{1}{a}\right)$,

故 $\frac{1}{x_0+1}-\ln x_0>\frac{1}{\frac{1}{a}+1}-\ln\frac{1}{a}$,

即 $\frac{1}{x_0+1}-\ln x_0>\frac{a}{a+1}+\ln a$.

故当 $0<a<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$时，$f(x)>\frac{a}{a+1}$.