2019 年清华大学数学秋令营试题解析

题 1. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=5$, $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$，求 a_{1000} 的十分位和百分位.

解： 需要这样的估计式，用对数函数的单调性可以得到

$$\ln\frac{n}{m-1}=\int_{m-1}^{n}\frac{1}{t}\,dt>\sum_{i=m}^{n}\frac{1}{i}>\int_{m}^{n+1}\frac{1}{t}\,dt=\ln\frac{n+1}{m}.$$

从初始递推方程开始，平方后得到

$$a_{n+1}^2=a_n^2+2+\frac{1}{a_n^2}. \tag{1}$$

因此 $a_n\geq 25+2n$，代入 (1) 得到

$$2+\frac{1}{25+2n}\geq a_{n+1}^2-a_n^2\geq 2.$$

因此求和得到

$$a_n\leq 25+2n+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{25+2i},$$

当 $n\leq 1000$ 时，

$$\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{25+2i}\leq\frac{1}{2}\ln\frac{1011.5}{11.5}<2.5.$$

$25+2n<a_{n+1}^2<27.5+2n$，对 $n\leq 1000$ 成立. 再代入 (1)，求和得到

$$2025+\sum_{i=0}^{999}\frac{1}{27.5+2n}<a_{1000}^2<2025+\sum_{i=0}^{999}\frac{1}{25+2n},$$

左端至少是 $2025+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1013.75}{13.75}>2027$，右端不多于 2027.5.

因为 $45.02^2=2026.8004$，$45.03^2=2027.7009$，因此 a_n 的十分位是 0，百分位是 2. **（解题人：罗 炜）**

题 2. 已知正数集 A，满足 $|A|=n$，求证：存在 $B\subset A$ 且 $\log_2 n\geq|B|$，满足对 $\forall\, b_i,b_j\in B$，

$$b_i+b_j\notin A,\ \text{其中}\ b_j\neq b_i.$$

证明： 按这样的贪心方法选择 B 中元素：从最大的元素开始扫描，能加入 B 中不和已有 B 中元素冲突就加，否则跳过这个数.

下面估计这样能得到多少个 A 中元素.

将 A 中元素从大到小排列 $a_1>a_2>\cdots>a_n$.

用函数 $f(k)$ 表示扫描过 a_k 之后，贪心法加入到 B 中的元素个数，则 $k-f(k)$ 是没有加入 B 中的元素个数.

显然，A 中最大两个元素可以加入 B 中，$f(1)=1, f(2)=2$.

扫描过 a_k 以后不能加入 B 中的元素 $a_j, j\leq k$ 一定是和当时已有的某个 B 中元素 $a_i, i<j$ 求和等于某个

A 中元素 $a_m, m < i$. 而 i, m 唯一决定 j，因此这样的 a_j 个数不超过对应 i, m 对个数，即

$$\sum_{a_i \in B, i<k} (i-1) \geq k - f(k).$$

整理得到（中间要考虑 a_k 是否在 B 中，多减了一个 1）

$$\sum_{a_i \in B, i<k} i \geq k - 1.$$

若用 $t_1 = 1, t_2 = 2, \ldots$ 表示加入 B 中的 a_i 的指标 i 从小到大排列的序列. 对 $k = t_{i+1}$ 应用上式可以得到

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_i \geq t_{i+1} - 1.$$

不难归纳得到 $t_i \leq 2^i$，而最终 $t_1 + t_2 + \cdots + t_{|B|} \geq n - 1$，所以 $|B| \geq \log_2 n$. **（解题人：罗 炜）**

题 3. 若 $a, b, c, n \in N^+$，$(a, b, c) = 1$. 记 $M(n)$ 为 $ax + by + cz = n$ 的非负整数解 (x, y, z) 的组数，求

$$\lim_{n \to \infty} \frac{M(n)}{n^2}.$$

解： 首先证明 $ax + by = m$ 关于 (x, y) 的解数为 $\begin{cases} 0 & ,(a,b) \nmid m, \\ \dfrac{(a,b)m}{ab} + O(1) & ,(a,b) \mid m. \end{cases}$

$(a, b) \nmid m$ 时显然.

设 $d = (a, b) \mid m$，设 $a = da_1, b = db_1, m = dm_1$，所以原式 $\Leftrightarrow a_1x + b_1y = m_1$.

在 $m > ab - a - b$ 时，$a_1x + b_1y = m_1$ 有特解 $(x_0, y_0) \in N^2$，所以其通解为 $\begin{cases} x = x_0 + kb_1, \\ y = y_0 - ka_1. \end{cases}$

令 $x_0 + kb_1 \geq 0, y_0 - ka_1 \geq 0$，得 $-\dfrac{x_0}{b_1} \leq k \leq \dfrac{y_0}{a_1}$，即 $\dfrac{y_0}{a_1} - \dfrac{m_1}{a_1b_1} \leq k \leq \dfrac{y_0}{a_1}$.

该区间整数个数为 $\dfrac{m_1}{a_1b_1} + c(m)$ 个，其中 $|c(m_1)| \leq 2$，每个 k 对应一个解 (x, y)，所以解数为

$$\frac{m_1}{a_1b_1} + c = \frac{m(a,b)}{ab} + O(1).$$

其次，由于 $(c, (a, b)) = 1$，所以

$$\begin{aligned} & ax + by = n - cz_0 \text{ 有解 } (x, y) \\ & \Leftrightarrow cz_0 \equiv n \pmod{(a,b)} \\ & \Leftrightarrow z_0 \equiv n \cdot c^{-1} \pmod{(a,b)}. \end{aligned}$$

另外，由于 $\dfrac{(n-cz)(a,b)}{ab}$ 是线性函数（关于 z），所以

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq z \leq \frac{n}{c}} \frac{(n-cz)(a,b)}{ab} &= \frac{1}{(a,b)} \sum_{0 \leq z \leq \frac{n}{c}} \frac{(n-cz)(a,b)}{ab} + \sum_{0 \leq z \leq \frac{n}{c}} O(1) \frac{(a,b)}{ab} \\ &= \frac{1}{(a,b)} \sum_{0 \leq z \leq \frac{n}{c}} \frac{(n-cz)(a,b)}{ab} + o(n^2). \end{aligned}$$

原方程

$$\sum_{\substack{cz\equiv n \pmod{(a,b)} \\ 0\le z\le \frac{n}{c}}}\left(\frac{(n-cz)(a,b)}{ab}+O(1)\right)=\left(\sum_{0\le z\le \frac{n}{c}}\frac{(n-cz)(a,b)}{ab}\right)\cdot\frac{1}{(a,b)}+o(n^2)+n\cdot O(1)$$

$$=\sum_{0\le z\le \frac{n}{c}}\frac{(n-cz)}{ab}=\sum_{\substack{0\le t\le n\\ c\mid t}}\frac{n-t}{ab}=\left(\sum_{0\le t\le n}\frac{n-t}{ab}\right)\frac{1}{c}+o(n^2)$$

$$=\sum_{0\le t\le n}\frac{n-t}{abc}=\frac{\sum\limits_{0\le t\le n} t}{abc}=\frac{1}{2abc}\cdot n^2+o(n^2).$$

（解题人：姚博文）

题 4. 在平面直角坐标系中有一椭圆盘，其内部的整点数为 L，椭圆面积为 S，周长为 P，求证：

$$L\le \frac{P}{2}+S+1.$$

证明： 设椭圆内部整点集为 A，取 A 的凸包 K 为整点凸多边形.

凸集 K 包含于椭圆，因此 K 的面积 $S(K)$ 和周长 $P(K)$ 分别小于 S 和 P.

设 K 的内部和边界上分别有 L_1,L_2 个点.

根据匹克定理，$S(K)=L_1+\frac{L_2}{2}-1$. 而在 K 的周长上，任何两个整点距离至少是 1，因此 $L_2\le P(K)\le P$.

又有 $L=L_1+L_2$，因此

$$L=L_1+L_2=S(K)+1+\frac{L_2}{2}\le S+1+\frac{P}{2}.$$

（解题人：罗 炜）

题 5. $A_1A_2A_3A_4$ 是圆内接四边形，$A_iA_{i+1}=a_i$ $(A_5=A_1)$，圆心 O 到 A_iA_{i+1} 距离记为 h_i. 求证：

$$R^2\left(\sum_{i=1}^{4}a_i^2\right)<2a_1a_2a_3a_4\left(\sum_{1\le i<j\le 4}\frac{h_ih_j}{a_ia_j}\right)，其中 R 为半径.$$

证明： 设 J_1,J_2,J_3,J_4 分别为 a_1,a_2,a_3,a_4 所对的圆周角，则 $\sum\limits_{i=1}^{4}J_i=\pi$，$a_i=2R\sin J_i,h_i=\cos J_i$.

目标不等式等价于

$$\sum_{i=1}^{4}\sin^2 J_i<2\sum_{1\le i<k\le 4}\sin J_i\sin J_k\cos J_m\cos J_n,$$

其中 m,n 是 $\{1,2,3,4\}$ 中去掉 i,k 剩下的两个指标.

利用

$$\sin A\cos B\sin C\cos D+\sin A\cos B\cos C\sin D=\sin A\cos B\sin(C+D)$$

及 $\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin(A+B)$，还有四个 J_i 之和为 π，得到目标不等式等价于

$$\sum_{i=1}^{4}\sin^2 J_i<\sin^2(J_1+J_2)+\sin^2(J_1+J_3)+\sin^2(J_1+J_4).$$

不妨设 J_1 最大，考虑函数

$$f(x)=\sin^2(J_1+x)-\sin^2 x=\frac{1}{2}(\cos 2x-\cos(2J_1+2x))=\sin J_1\sin(J_1+2x).$$

三个角度 $J_1+2J_2, J_1+2J_3, J_1+2J_4$ 之和为 $2\pi+J_1$，因此分别对应于圆上的三个弦长的一半，这三个弦长与一个长度为 $2\sin J_1$ 的弦可构成一个封闭的四边形，因此

$$\sin(J_1+2J_2)+\sin(J_1+2J_3)+\sin(J_1+2J_4)>\sin J_1.$$

得证. **（解题人：罗 炜）**

题 6. 设 p 为奇素数，求证：$\sum\limits_{i=1}^{p-1} i^{p-1}\equiv(p-1)!+p \pmod{p^2}$.

证法一： 考虑

$$f(x)=:(x-1)(x-2)\cdots[x-(p-1)]+1-x^{p-1}=a_{p-2}x^{p-2}+\cdots+a_1x+(p-1)!+1.$$

于是我们只要证明 $\sum\limits_{x=0}^{p-1} f(x)\equiv 0 \pmod{p^2}$ 即可.

注意到, $\deg f=p-2$, 但在模 p 意义下, $1,2,\cdots,p-1$ 这 $p-1$ 个数是 f 的根.

根据数论的 Lagrange 定理知：f 的每一项系数都是 p 的倍数.

$$\sum_{x=0}^{p-1} g(x)=\sum_{x=0}^{p-1}\sum_{i=1}^{p-2} a_i x^i=\sum_{i=1}^{p-2}\left(a_i\sum_{x=0}^{p-1} x^i\right).$$

由于 a_i 都是 p 的倍数, 以及

$$\sum_{x=1}^{p-1} x^i=\sum_{j=1}^{p-1}(g^j)^i=\frac{g^i(g^{i(p-1)}-1)}{g^i-1}=\begin{cases}0, & 若\ p-1\nmid i\\ -1, & 若\ p-1\mid i\end{cases},$$

其中, g 是模 p 的原根. 求和上标 $1\le i\le p-2$, 所以 $\sum\limits_{x=0}^{p-1} g(x)\equiv 0 \pmod{p^2}$, 于是我们得到

$$\sum_{x=0}^{p-1} f(x)\equiv p[(p-1)!+1]\equiv 0 \pmod{p^2}.$$

证毕. **（解题人：吴宇培）**

注： 关于原根的那个结论在处理这种多项式求和时十分有用. 我的母校南京师范大学数科院的纪春岗老师给去年 3 月根源杯提供的第四题也用到了这个结论. 一旦出现这样的多项式求和, 该结果很有用, 有兴趣读者可以看看 2012 年 IMO Shortlists N8.

证法二： 根据费马小定理，可以找到整数 $x_1,\ldots,x_{p-1}$ 使得 $j^{p-1}=1+px_j$ 对 $1\le j<p$ 成立.

将这些式子做连乘，展开并模 p^2 计算，可得

$$(p-1)!^{p-1}\equiv(1+px_1)(1+px_2)\ldots(1+px_{p-1})\equiv 1+p(x_1+\ldots+x_{p-1}) \pmod{p^2}.$$

其次，威尔逊定理给出 $(p-1)!=kp-1$，k 是整数，则

$$(p-1)!^{p-1}=(-1+kp)^{p-1}\equiv(-1)^{p-1}+(-1)^{p-2}(p-1)pk\equiv 1+pk \pmod{p^2}.$$

因此

$$\begin{aligned}1^{p-1}+2^{p-1}+\ldots+(p-1)^{p-1}&=p-1+p(x_1+\ldots+x_{p-1})\\&\equiv p-1+kp\equiv p+(p-1)! \pmod{p^2}.\end{aligned}$$

（解题人：罗 炜）

题 7. 对 $n\geq 4$，设 P 是圆内接 n 边形，用 $(n-3)$ 条对角线将 P 分为没有公共面积的 $(n-2)$ 个三角形，L 是这些三角形的内切圆半径之和. 求证：L 不随对角线的分割方式而改变.

证明： 我们先证命题对圆内接四边形成立.

不妨设圆的半径为 R，四边形的四条边所对圆周角为 A,B,C,D. 则有两种剖分方式，其中一种的两个三角形的三边长分别为 $2R\sin A, 2R\sin B, 2R\sin(A+B)$；$2R\sin C, 2R\sin D, 2R\sin(C+D)$.

内接圆半径为三角形面积两倍除以周长，因此其中一个三角形内接圆半径，为 $2R$ 乘以

$$\begin{aligned}\frac{\sin A\sin B\sin(A+B)}{\sin A+\sin B+\sin(A+B)}&=\frac{\frac{1}{2}(\cos(A-B)-\cos(A+B))\sin(A+B)}{2\sin(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A-B}{2})+2\sin(\frac{A+B}{2})\cos(\frac{A+B}{2})}\\&=\frac{(\cos^2(\frac{A-B}{2})-\cos^2(\frac{A+B}{2}))2\cos(\frac{A+B}{2})}{2\cos(\frac{A-B}{2})+2\cos(\frac{A+B}{2})}\\&=\cos(\frac{A-B}{2})\cos(\frac{A+B}{2})-\cos^2(\frac{A+B}{2})\\&=\frac{1}{2}(\cos A+\cos B)-\frac{1+\cos(A+B)}{2}.\end{aligned}$$

利用

$$A+B+C+D=\pi,\quad \cos(A+B)+\cos(C+D)=0,$$

因此剖分形成的两个三角形的内切圆半径之和为 $\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C+\cos D-1)$，与剖分无关.

对于一般的情形，可以每次选择剖分中两个有公共边的三角形，将这两个三角形合并成的四边形，用另一种方式剖分，这样形成一个操作，从一个剖分变成另一个剖分.

根据前面结果，操作前后的剖分的所有三角形内切圆半径之和不变. 任何两个剖分可以通过多次这种操作转换，因此所有剖分形成的三角形内切圆半径之和都相同.

事实上，可以用上面的剖分操作，将任何剖分变成这样的剖分：

所有剖分用到的对角线从顶点 1 出发. 设有剖分，从顶点 1 出发的对角线没有全部用到，例如 $1,j$ 没有用到，但 $1,j-1$ 用到，设 $k>j$ 是最小的 k，使得 $1,k$ 用到. 则剖分中有三角形 $1,j-1,k$，设 $j-1,l,k$ 是剖分中与这个三角形相邻的三角形，其中 $j-1<l<k$. 则前面操作将剖分中边 $j-1,k$ 去掉，换成边 $1,l$. 因此增加了一条从 1 出发的边. 归纳可得，所有剖分变成同一个剖分，用到的对角线都是从 1 出发.

证毕. **（解题人：罗 炜）**

题 8. A 是集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的子集，满足 $A\geq 4\sqrt{n}$，且存在四项等差数列 $x_1<x_2<x_3<x_4$，使得对 $x_i\ (1\leq i\leq 4)$，都可以表示成 A 中两个不同元素的和.

题 8. 设 $A \subset \{1,2,\dots,n\}$，满足 $|A| \geq 4\sqrt{n}$. 求证：存在 $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ 成等差数列，且 x_i 为 A 中两数之和（$i=1,2,3,4$）.

证明： 显然 $n \geq 16$ 时，才会有相应 A 存在.

任取 $B \subset A$，$|B| = 2[\sqrt{n}]$，令 $C = A - B$ 为 B 在 A 中的补集. 考虑集合 $B \times C$，及 $B \times C$ 上的函数

$$f(b,c) = b + 2c,\quad b \in B,\ c \in C.$$

$|B \times C| > 2[\sqrt{n}] \cdot (4\sqrt{n} - 2[\sqrt{n}]) > 3n$，最后的不等式只需 $2[\sqrt{n}] > \sqrt{n}$ 即可，对 $n \geq 16$ 总成立.

f 的取值范围包含于 $\{3,4,\dots,3n-1\}$，至多 $3n-3$ 个可能值.

根据抽屉原则，存在不同数对 $(b,c),(d,e) \in B \times C$，使得 $b+2c = d+2e$，显然 $b \neq d$（否则 $c = e$ 矛盾），根据 B,C 取法，$b \neq c, b \neq e, d \neq c, d \neq e$. 不妨设 $b > d$，则 $e > c$，$b - d = 2(e-c)$.

可以看出 $d+c < d+e < b+c < b+e$ 构成等差数列，满足题目条件.