2022 北京通州高三（上）期中

数　　学

2022 年 11 月

本试卷共 4 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，请将答题卡交回。

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x\,|\,0<x\leqslant 4\}$，$B=\{-1,2,3,4,5\}$，则 $A\cap B=$

（A）$\{2\}$　　（B）$\{2,3\}$　　（C）$\{2,3,4\}$　　（D）$\{2,3,4,5\}$

（2）在复平面内，复数 $z=\mathrm{i}(2+\mathrm{i})$，其中 i 是虚数单位，则复数 z 对应的点 Z 在

（A）第一象限　　（B）第二象限　　（C）第三象限　　（D）第四象限

（3）已知 $\boldsymbol{a}=(1,-2)$，$\boldsymbol{b}=(-2,x)$，若 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，则实数 x 的值为

（A）-4　　（B）4　　（C）-1　　（D）1

（4）已知函数 $f(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{1+2^x}$，则对任意实数 x，有

（A）$f(-x)+f(x)=0$　　（B）$f(-x)-f(x)=0$

（C）$f(-x)+f(x)=-1$　　（D）$f(-x)+f(x)=1$

（5）已知函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上恒有 $f'(x)>0$，对于 $x_1,x_2\in(a,b)$，则“$x_1>x_2$”是“$f(x_1)>f(x_2)$”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（6）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+1$，记 $b_n=a_{2n-1}$，则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为

（A）n^2　　（B）$(n+1)^2$　　（C）$\dfrac{n(n+1)}{2}$　　（D）$n(n+1)$

（7）设函数 $f(x)=\sin(\omega x-\dfrac{\pi}{6})+k(\omega>0)$，若 $f(x)\leqslant f(\dfrac{\pi}{3})$ 对任意的实数 x 都成立，则 ω 的一个可取值为

（A）4　　（B）5　　（C）7　　（D）8

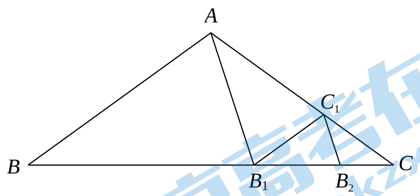
（8）0.618 是无理数 $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的近似值，被称为黄金比值. 我们把腰与底的长度比为黄金比值的等腰三角形称为黄金三角形. 如图，$\triangle ABC$ 是顶角为 A，底 $BC=2$ 的第一个黄金三角形，$\triangle B_1CA$ 是顶角为 B_1 的第二个黄金三角形，$\triangle C_1B_1C$ 是顶角为 C_1 的第三个黄金三角形，$\triangle B_2CC_1$ 是顶角为 B_2 的第四个黄金三角形⋯，那么依次类推，第 2022 个黄金三角形的周长大约为

（A）2.236×0.618^{2021}

（B）2.236×0.618^{2022}

（C）4.472×0.618^{2021}

（D）4.472×0.618^{2022}



（9）在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=\dfrac{2\pi}{3}$，$AC$边的中点为$D$，且$BD=1$，则$BA\cdot BC$的最大值为

（A）2　　（B）3　　（C）$2\sqrt{3}$　　（D）4

（10）已知函数$f(x)=\begin{cases}\ln(2-x), x\leqslant 1,\\ -x^2+1, x>1,\end{cases}$设$g(x)=|f(x)|-ax+a$，若函数$g(x)$有两个零点，则实数$a$的取值范围是

（A）$(-1,0)$　　（B）$[0,2]$　　（C）$(2,+\infty)$　　（D）$(-1,0)\cup(2,+\infty)$

第二部分（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（11）函数$f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{1}{x}$的定义域是______.

（12）已知命题 P：“$\forall x\in \mathbf{R}, x^2+x\geqslant 1$”，则 P 的否定是______.

（13）已知复数$z_1=2+a\mathrm{i}\ (a\in\mathbf{R})$，$z_2=3+\mathrm{i}$，如果$\dfrac{z_1}{z_2}$为纯虚数，那么$a=$_____.

（14）已知矩形$ABCD$，$AB=3$，$AD=4$．P为矩形$ABCD$所在平面内一点，$PA=1$，$PC=2\sqrt{6}$．则$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PD}=$______.

（15）过原点作曲线$y=\mathrm{e}^x$的切线，则切点坐标为______；切线的斜率为______.

（16）已知$\triangle ABC$满足$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}>0$．给出下列四个结论：

①$\triangle ABC$为锐角三角形；

②$\sin A<\cos B$；

③$\overrightarrow{AB}^2>\overrightarrow{CB}^2+\overrightarrow{CA}^2$；

④$\cos A\cos B>\sin A\sin B$.

其中所有正确结论的序号是__________.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（17）（本小题 12 分）

已知函数$f(x)=2\sin x\cos x-\sqrt{3}\cos 2x$.

（Ⅰ）求$f(x)$的最小正周期；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值和最小值.

（18）（本小题 12 分）

在 $\triangle ABC$ 中，三个内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c（$b>c$），且 $a=7$，$c=5$，$C=\frac{\pi}{4}$.

（Ⅰ）求 $\sin A$ 的值；

（Ⅱ）设 $\triangle ABC$ 的面积为 S，求 S 的值.

（19）（本小题 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 为公比不为 1 的等比数列，数列 $\{b_n\}$ 为等差数列，且 $a_1=2$，$b_1=1$，再从条件①，条件②，条件③中任选两个作为已知，求：

（Ⅰ）求 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）设 $c_n=b_{a_n}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

条件①：$a_1+a_2=6$；

条件②：$2b_1+a_3=b_4$；

条件③：$b_1+b_2+b_3=3a_2$.

注：如果选择多种符合要求的条件分别解答，按第一种解答计分.

（20）（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=\ln x+\frac{a}{x}-1$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅲ）当 $a=1$ 时，$\forall s,t$，且 $s>t>0$，请判断 $\ln s-\ln t$ 与 $\frac{s-t}{s}$ 的大小.（只要求写出结论）

(21)（本小题 14 分）

已知函数 $f(x)=e^{x}\sin x$

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

（Ⅱ）设 $g(x)=f'(x)$，试判断曲线 $y=g(x)$ 与直线 $y=2x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上交点的个数，并说明理由.

(22)（本小题 15 分）

已知无穷数列 $\{a_n\}$，若无穷数列 $\{b_n\}$ 满足：$\forall n\in N^*$，都有 $|b_n-a_n|\leqslant 1$，则称 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ “接近”.

（Ⅰ）设 $a_n=(\frac{1}{2})^{n-1}$，$b_n=2\times(\frac{1}{3})^{n}+1$，试判断 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 是否“接近”，并说明理由；

（Ⅱ）若数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 均为等差数列，他们的公差分别为 d_1，d_2. 求证：$\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ “接近”的必要条件是“$d_1=d_2$”；

（Ⅲ）已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，若存在数列 $\{b_n\}$ 满足：$\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ “接近”，且 b_2-b_1，b_3-b_2，b_4-b_3，$\cdots$，$b_{201}-b_{200}$ 中至少有 100 个正数，求 d 的取值范围.

（考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效）

参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

题号	（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）
答案	C	B	B	A	C	A	D	C	D	D

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（11）$(-1,0)\cup(0,+\infty)$　　（12）$\exists x\in\mathbf{R}, x^2+x<1$　　（13）-6

（14）0　　（15）$(1,\mathbf{e})$；$\mathbf{e}$　　（16）②③④

说明：（15）题两空前 3 后 2；（16）题全选对 5 分，漏选 3 分，其他情况 0 分。

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

（17）（本小题 12 分）

解：（Ⅰ）$f(x)=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$

$=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$.　　……………………………………………4 分

所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π .　　……………………………………………6 分

（Ⅱ）因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，

所以 $2x-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}]$，于是

当 $2x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$，即 $x=0$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值 $-\sqrt{3}$；

当 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{5\pi}{12}$ 时，函数 $f(x)$ 取得最大值 2 .　　………………………………12 分

（18）（本小题 12 分）

解：（Ⅰ）由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$ 得，

$\frac{7}{\sin A}=\frac{5}{\sin\frac{\pi}{4}}$，

所以 $\sin A=\frac{7\sqrt{2}}{10}$.　　……………………………………………4 分

（Ⅱ）由余弦定理 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ 得

$5^2=7^2+b^2-2\times 7b\times\frac{\sqrt{2}}{2}$

解得 $b=4\sqrt{2}$，　$b=3\sqrt{2}$.

因为 $b=3\sqrt{2}<5=c$ 与已知 $b>c$ 矛盾，

所以 $b=4\sqrt{2}$.

所以 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=14$. ……………………………………………12 分

（法 2）也可以由 $\sin B=\sin(\pi-(A+C))=\sin(A+C)$

当 A 为锐角时， $\sin B=\frac{4}{5}$

当 A 为钝角时， $\sin B=\frac{3}{5}<\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin C$，与已知 $b>c$ 矛盾

所以 $\sin B=\frac{4}{5}$

所以 $S=\frac{1}{2}ac\sin B=14$.

（19）（本小题 13 分）

解：选择条件①，条件②

（Ⅰ）设 $\{a_n\}$ 的公比为 q， $\{b_n\}$ 的公差为 d，

因为 $a_1+a_2=6$， $a_1=2$，所以 $a_2=4$， $q=\frac{a_2}{a_1}=2$.

所以 $a_n=2^n$. ……………………………………………4 分

因为 $2b_1+a_3=b_4$，所以有 $2+8=1+3d$，解得 $d=3$

所以 $b_n=3n-2$. ……………………………………………8 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 $a_n=2^n$ ， $b_n=3n-2$.

所以 $c_n=b_{a_n}=3\times 2^n-2$. ……………………………………………10 分

从而数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=3\times(2^1+2^2+2^3+\cdots+2^n)-2n$

$$=3\times\frac{2\times(1-2^n)}{1-2}-2n$$

$$=6\times 2^n-2n-6.$$ ……………………………………………13 分

选择条件①，条件③

（Ⅰ）设 $\{a_n\}$ 的公比为 q， $\{b_n\}$ 的公差为 d，

因为 $a_1+a_2=6$， $a_1=2$，所以 $a_2=4$， $q=\frac{a_2}{a_1}=2$.

所以 $a_n=2^n$. ……………………………………………4 分

因为 $b_1+b_2+b_3=3a_2$，所以有 $b_1+d=4$，解得 $d=3$.

所以 $b_n = 3n-2$. ……………………………………………8 分

（Ⅱ）解法同上

选择条件②，条件③

（Ⅰ）设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，$\{b_n\}$ 的公差为 d，

于是有

$$\begin{cases}2+2q^2=1+3d,\\3+3d=6q,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}q=2,\\d=3\end{cases}.$$

所以 $a_n = 2^n$，$b_n = 3n-2$. ……………………………………………8 分

（Ⅱ）解法同上

（20）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1$，$f(1)=0$.

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$，$f'(1)=0$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=0$. ……………………………………4 分

（Ⅱ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$. ……………………………………………5 分

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=a$

当 $a\leqslant 0$ 时，有 $f'(x)>0$，所以函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增.

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,a)$ 上单调递减.

所以 $a\leqslant 0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,+\infty)$；$a>0$ 时函数 $f(x)$ 单调递增区间为 $(a,+\infty)$，单调递减区间为 $(0,a)$. ……………………………………………10 分

（Ⅲ）$\ln s-\ln t>\frac{s-t}{s}$. ……………………………………………14 分

（21）（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$.

$f'(x)=\mathbf{e}^x(\sin x+\cos x)$. ……………………………………………1 分

令 $f'(x)=\mathbf{e}^x(\sin x+\cos x)>0$

解得 $2k\pi-\frac{\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{3\pi}{4}$

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(2k\pi-\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{3\pi}{4})$ $k\in \mathbf{Z}$. ··························4 分

（II）由（I） $g(x)=e^{x}(\sin x+\cos x)$，

曲线 $y=g(x)$ 与直线 $y=2x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上交点的个数等价于 $g(x)=2x$ 的根个数.

···5 分

于是有 $e^{x}(\sin x+\cos x)=2x$.

即 $e^{x}(\sin x+\cos x)-2x=0$

设 $F(x)=e^{x}(\sin x+\cos x)-2x$.

$F'(x)=2e^{x}\cos x-2=2(e^{x}\cos x-1)$.

设 $H(x)=e^{x}\cos x-1$.

$H'(x)=e^{x}(\cos x-\sin x)=\sqrt{2}e^{x}\cos(x+\frac{\pi}{4})$.

此时，x，$H'(x)$，$H(x)$ 变化情况如下：

x	$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$
$H'(x)$	+	0	−
$H(x)$	↗	极大值	↘

于是有 $H(0)=0$，$H(\frac{\pi}{4})>H(0)=0$，$H(\pi)=-e^{\pi}-1<0$.

由零点存在定理可知 $H(x)=e^{x}\cos x-1$ 在 $(0,\pi)$ 存在唯一零点. ························11 分

设 $H(x)=e^{x}\cos x-1$ 零点为 x_0，则有 $F(x)$ 在 $x\in(x_0,\pi)$ 上单调递减，在 $(0,x_0)$ 单调递增.

因为 $F(0)=1$，$F(x_0)>F(0)=1$，$F(\pi)=-e^{\pi}-2\pi<0$.

所以 $F(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上存在唯一零点，

即曲线 $y=g(x)$ 与直线 $y=2x$ 在区间 $(0,\pi)$ 上交点的个数为 1. ·························14 分

（22）（本小题 15 分）

解：（I）$\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ “接近”

因为 $0<2\times(\frac{1}{3})^{n}\leqslant\frac{2}{3}$，$0<(\frac{1}{2})^{n-1}\leqslant 1$，

又因为 $\dfrac{2\times(\frac{1}{3})^n}{(\frac{1}{2})^{n-1}}=(\frac{2}{3})^n<1$

所以有 $-1<2\times(\frac{1}{3})^n-(\frac{1}{2})^{n-1}<0$

所以 $\left|2\times(\frac{1}{3})^n-(\frac{1}{2})^{n-1}+1\right|\leqslant 1$

所以 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ “接近”．　　　　　　　　　　…………………………………………4 分

（Ⅱ）假设 $d_1\neq d_2$，不妨设 $d_1<d_2$，

则 $b_n-a_n=(n-1)(d_2-d_1)+b_1-a_1$

令 $(n-1)(d_2-d_1)+b_1-a_1=1$，

则 $n=\dfrac{1+a_1-b_1}{d_2-d_1}+1$．

当 $\dfrac{1+a_1-b_1}{d_2-d_1}+1\leqslant 0$ 时，令 $N=0$，当 $n>N$ 时有 $b_n-a_n=(n-1)(d_2-d_1)+b_1-a_1>1$．

此时 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 不“接近”．

当 $\dfrac{1+a_1-b_1}{d_2-d_1}+1>0$ 时，令 $N=\left[\dfrac{1+a_1-b_1}{d_2-d_1}+1\right]$，当 $n>N$ 时有 $b_n-a_n=(n-1)(d_2-d_1)+b_1-a_1>1$

此时 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 不“接近”．

同理得 $d_1>d_2$ 时，$\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 不“接近”．

综上 $d_1\neq d_2$，$\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 不“接近”

与 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ “接近”矛盾，

所以有 $d_1=d_2$

所以“$d_1=d_2$”是“$\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ “接近””的必要条件. ……………………………………9 分

（Ⅲ）因为 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列，

所以 $a_n=a_1+(n-1)d$．

若存在数列 $\{b_n\}$ 满足：$\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ “接近”，

则 $\forall n\in\mathrm{N}^*$，都有 $|b_n-a_n|\leqslant 1$．

即 $-1\leqslant b_n-a_n\leqslant 1$．

即 $a_n-1\leqslant b_n\leqslant a_n+1$．

则 $b_n-b_{n-1}\leqslant 2+a_n-a_{n-1}$

即 $b_n-b_{n-1}\leqslant 2+d$

当 $d\leqslant -2$ 时，$\forall n\in\mathrm{N}^*$，都有 $b_n-b_{n-1}\leqslant 2+d\leqslant 0$

与 b_2-b_1，b_3-b_2，b_4-b_3，…，$b_{201}-b_{200}$ 中至少有 100 个正数矛盾.

当 $d=0$ 时，可取 $b_n=a_n-(\frac{1}{2})^n$

则 $|b_n-a_n|=(\frac{1}{2})^n<1$，且 b_2-b_1，b_3-b_2，b_4-b_3，$\cdots$，$b_{201}-b_{200}$ 均为正数，符合题意.

当 $d>0$ 时，可取 $b_n=a_n+\frac{1}{2}$

则 $|b_n-a_n|=\frac{1}{2}<1$，且 b_2-b_1，b_3-b_2，b_4-b_3，$\cdots$，$b_{201}-b_{200}$ 均为正数，符合题意.

当 $-2<d<0$ 时，可取 $b_n=a_n+(-1)^n$

则 $|b_n-a_n|=1$，$b_{2n}-b_{2n-1}=a_{2n}-a_{2n-1}+2=2+d>0$

即 b_2-b_1，b_3-b_2，b_4-b_3，$\cdots$，$b_{201}-b_{200}$ 中有 100 个正数.

综上所述 d 的取值范围是 $(-2,+\infty)$. ……………………………………………15 分

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 40W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承 ‘’ 精益求精、专业严谨 ‘’ 的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数百场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。