山东名校考试联盟

2023年12月高三年级阶段性检测数学试题

参考答案与评分细则

一、单项选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	A	D	C	C	B	A	D

二、多项选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分。

题号	9	10	11	12
答案	AB	ABD	AC	ABD

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13．$\frac{3}{5}$；　　14．$\frac{32}{81}$；　　15．-6；　　16．$a\geqslant 2$．

四、解答题：共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．【解析】

（1）方法一：

因为等差数列$\{a_n\}$中，$a_2+a_6=16$，所以$a_4=8$，　……………………………2分

又因为$S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=\frac{5(2a_3)}{2}=30$，所以$a_3=6$，　……………………………4分

所以$a_1=2$，$d=2$，$a_n=2n$.　……………………………5分

方法二：

由$a_2+a_6=16$，$S_5=30$，得$\begin{cases}2a_1+6d=16\\5a_1+10d=30\end{cases}$　……………………………2分

解得$\begin{cases}a_1=2\\d=2\end{cases}$　……………………………4分

所以$a_n=2n$　……………………………5分

（2）由（1）得$S_n=n^2+n$，　……………………………7分

$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$， ……………………………………8 分

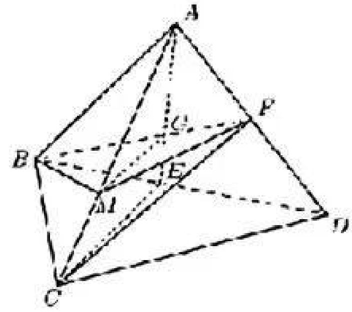
所以 $\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_n}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}<1$，得证. ………………10 分

【评分说明】

1.第（1）问两种方法均求出 a_1 与 d 的取值可直接得 4 分，写出 a_n 得 5 分；

2.第（2）问"$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$"没有单独写出，但在后面的求和过程中体现，不扣分.

18.【解析】来源：高三答案公众号



（1）证明：连接 AE 交 BF 于 G，连接 MG，

因为 E，F 分别为 BD，AD 中点，所以 G 为 $\triangle ABD$ 重心， …2 分

所以 $AG=2GE$，因为 $AM=2MC$，所以 $GM \parallel EC$， …………3 分

$GM\subset$ 面 BMF， $CE\not\subset$ 面 BMF，所以 $CE\parallel$ 平面 BMF. ……4 分

【评分说明】

1. [illegible] $\Delta EFG\sim\Delta ABG$，也给 2 分；

2. [illegible] $CE\not\subset$ 面 BMF [illegible]

3. 若没有 3 分点，[illegible].

（2）方法一：因为正三棱锥 $A-BCD$ 中， $BC=2\sqrt{2}, AB=2$，

所以 $AB^2+AC^2=BC^2$，所以 $\angle CAB=\frac{\pi}{2}$，同理 $\angle CAD=\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，

所以 $V_{A\text{-}BCD}=\frac{4}{3}$， ……………………………6 分

因为 $S_{\triangle BCD}=2S_{\triangle CDE}$， A 到面 BCD 的距离是 F 到面 BCD 距离的 2 倍，

所以 $V_{A\text{-}BCD}=4V_{F\text{-}CDE}=\frac{4}{3}$，所以 $V_{F\text{-}CDE}=\frac{1}{3}$，所以 $V_{D\text{-}CEF}=V_{F\text{-}CDE}=\frac{1}{3}$， …………8 分

又因为 $CE=\sqrt{6}$， $CF=\sqrt{5}$， $FE=1$，所以 $\cos\angle ECF=\frac{6+5-1}{2\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{30}}{6}$，则 $\sin\angle ECF=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

所以 $S_{\triangle CEF}=\frac{\sqrt{5}}{2}$， ……………………………10 分

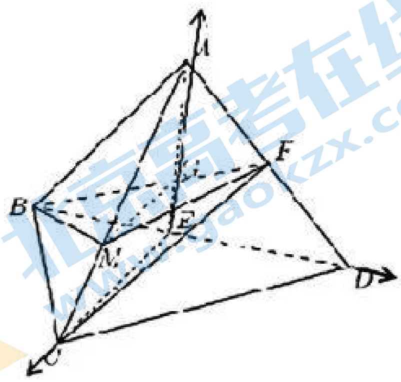
设 D 到面 CEF 的距离为 d，所以 $V_{D\text{-}CEF}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{5}}{2}d=\frac{1}{3}$，所以 $d=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. …………12 分

【评分说明】

1. 没有给出 $\triangle CEF$ 的面积，但最后结果正确，不扣分.

方法二：以 E 为坐标原点，$\overline{EC}$，$\overline{ED}$ 分别为 x,y 轴建立如图所示坐标系：

则 $E(0,0,0)$，$C(\sqrt{6},0,0)$，$B(0,-\sqrt{2},0)$，$D(0,\sqrt{2},0)$，



$A(\frac{\sqrt{6}}{3},0,\frac{2\sqrt{3}}{3})$，$M(\frac{7\sqrt{6}}{9},0,\frac{2\sqrt{3}}{9})$，$F(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{3}}{3})$ .... 1 分

（A 点 z 轴坐标分量或者三棱锥 $A-BCD$ 的高求对，即给 1 分）

设平面 BMF 法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，来源：高三答案公众号

$\vec{n}=(0,\frac{2\sqrt{3}}{3},-2\sqrt{3})$，.................................... 3 分

所以 $\overrightarrow{EC}\cdot\vec{n}=0$，$CE\not\subset$ 面 BMF，所以 $CE\parallel$ 平面 BMF． ....4 分

（2）设平面 ECF 法向量 $\vec{m}=(x,y,z)$，$\vec{m}=(0,-\sqrt{2},\sqrt{3})$， .... 8 分

所以 D 到平面 ECF 的距离 $d=\left|\frac{\overrightarrow{ED}\cdot\vec{m}}{|\vec{m}|}\right|$ .... 10 分

$=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .... 12 分

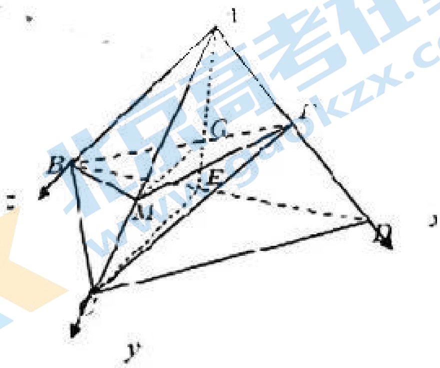
【[illegible]】

1. 若第（1）[illegible]坐标法，A 点坐标不再单独给分，其他建系方法类似给分；

2. 两个面的法向量各占 2 分；

3. 点到面的距离公式给出就给 2 分，结果计算正确再给 2 分。

方法三：（1）以 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}$ 分别为 x,y,z 轴建立如图所示坐标系：



则 $A(0,0,0)$，$C(0,2,0)$，$B(0,0,2)$，$D(2,0,0)$，

$E(1,0,1)$，$M(0,\frac{4}{3},0)$，$F(1,0,0)$ .... 1 分

设平面 BMF 法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，$\vec{n}=(4,3,2)$，............... 3 分

所以 $\overrightarrow{EC}\cdot\vec{n}=0$，$CE\not\subset$ 面 BMF，所以 $CE\parallel$ 平面 BMF． ....4 分

（2）平面 ECF 法向量 $\vec{m}=(x,y,z)$，求得 $\vec{m}=(2,1,0)$， .... 8 分

下同方法二

19.【解析】

（1）方法一：因为 $AP=2$，$PC=\sqrt{13}$，$\angle CAP=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6}$，

在 ΔPAC 中，由正弦定理知：$\dfrac{PC}{\sin\frac{\pi}{6}}=\dfrac{AP}{\sin C}$，所以 $\sin C=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$， ……………………2 分

所以 $\cos C=\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$，所以 $\sin B=\sin(\frac{\pi}{3}-C)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos C-\dfrac{1}{2}\sin C=\dfrac{5\sqrt{13}}{26}$， ……………………4 分

又在 $\triangle ABP$ 中，$\sin B=\dfrac{AP}{PB}=\dfrac{2}{PB}$，所以 $PB=\dfrac{4\sqrt{13}}{5}$． ……………………5 分

方法二：因为 $AP=2$，$PC=\sqrt{13}$，$\angle CAP=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{6}$，来源：高三答案公众号

在 ΔPAC 中，由余弦定理知：$AC^2+4-2AC\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=13$，即 $AC^2-2\sqrt{3}AC-9=0$，

所以 $AC=3\sqrt{3}$ ……………………2 分

所以 $\dfrac{1}{2}AB\cdot 2+\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\sqrt{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}AB\cdot 3\sqrt{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $AB=\dfrac{6\sqrt{3}}{5}$ ……………………4 分

又在 $Rt\triangle ABP$ 中，所以 $PB=\dfrac{4\sqrt{13}}{5}$． ……………………5 分

（2） 在 $\triangle APC$ 中，$\dfrac{AP}{\sin C}=\dfrac{PC}{\sin\frac{\pi}{6}}$，所以 $PC=\dfrac{1}{\sin C}=\dfrac{1}{\sin(\frac{\pi}{3}-B)}$， ……………………6 分

在 $\triangle ABP$ 中，$\dfrac{AP}{PB}=\sin B\Rightarrow PB=\dfrac{2}{\sin B}$． ……………………7 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}(PB+PC)\cdot AP\cos B=(\dfrac{2}{\sin B}+\dfrac{1}{\sin(\frac{\pi}{3}-B)})\cdot\cos B=\dfrac{2}{\tan B}+\dfrac{2}{\sqrt{3}-\tan B}$，……9 分

因为 $B\in(0,\frac{\pi}{3})$，所以令 $t=\tan B$，$S_{\triangle ABC}=\dfrac{2}{t}+\dfrac{2}{\sqrt{3}-t}=\dfrac{2\sqrt{3}}{t(\sqrt{3}-t)}$，$t\in(0,\sqrt{3})$， ……………11 分

所以 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时有最小值 $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$，

即当 $\tan B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 时，$\triangle ABC$ 的面积有最小值 $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$． ……………………12 分

方法二：设 $AB=x$，$AC=y$，则 $x>0$，$y>0$，

$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle ACP}\Rightarrow\dfrac{1}{2}xy\sin\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{1}{2}2x+\dfrac{1}{2}2y\sin\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow\dfrac{\sqrt{3}}{4}xy=x+\dfrac{y}{2}$， ……………… 6 分

因为 $x+\dfrac{y}{2}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\dfrac{y}{2}}=\sqrt{2}\sqrt{xy}$，当且仅当 $x=\dfrac{y}{2}$ 时取 “=”， ……………………… 7 分

所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}xy\geqslant\sqrt{2}\sqrt{xy}\Rightarrow\sqrt{xy}\geqslant\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$， ……………………… 9 分

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}xy\geqslant\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times\dfrac{4\sqrt{6}}{3}=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$，当且仅当 $\begin{cases}x=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\\ y=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\end{cases}$ 时取 “=”， ………………11 分

所以 $\triangle ABC$ 的面积的最小值为 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$. ………………………… 12 分

【评分说明】

1.方法一中没有标注 t 的取值范围，不扣分；

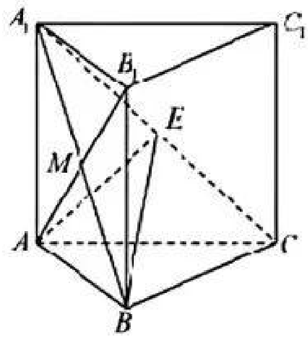
2.方法二中没有指出等号成立的条件扣一分.

20.【解析】

（1）连接 AB_1，设 $A_1B \cap AB_1 = M$，则 A_1B 中点为 M，且 $AM \perp A_1B$，………………1 分

因为平面 $A_1BC \perp$ 平面 ABB_1A_1，平面 $A_1BC \cap$ 平面 $ABB_1A_1 = A_1B$，$AM \subset$ 平面 ABB_1A_1，

所以 $AM \perp$ 平面 A_1BC，来源：高三答案公众号



因为 $BC \subset$ 平面 A_1BC，$AM \perp BC$，……………2 分

又在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$，$BB_1 \perp$ 面 ABC，$BC \subset$ 平面 ABC，

所以 $BB_1 \perp BC$，……………………………………3 分

因为 $AM \cap BB_1 = B_1$，AM、$BB_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1，

所以 $BC \perp$ 平面 ABB_1A_1，……………………………4 分

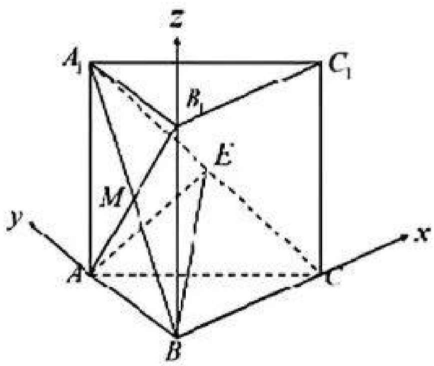
又因为 $AB \subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $AB \perp BC$；……………………………5 分

（2）由（1）得 $AM \perp$ 平面 A_1BC，

则直线 AC 与平面 A_1BC 所成的角为 $\angle ACM = \frac{\pi}{6}$，

在正方形 ABB_1A_1 中，$AB = 2, AM = \sqrt{2}, AC = 2\sqrt{2}, BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2$，…………… 7 分

建立以 B 为原点的空间直角坐标系 $B - xyz$，如图所示：



$A(0,2,0)$，$C(2,0,0)$，$M(0,1,1)$，……………………………8 分

设 $\overrightarrow{A_1E} = \lambda\overrightarrow{A_1C} = (2\lambda,-2\lambda,-2\lambda)$，$\lambda \in [0,1]$，

则 $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{A_1E} = (2\lambda, 2-2\lambda, 2-2\lambda)$，又 $\overrightarrow{BA} = (0,2,0)$

设平面 ABE 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$，

则 $\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{BA} = 2y = 0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BE} = \lambda x + (1-\lambda)y + (1-\lambda)z = 0 \end{cases}$，取 $x=1$，则 $y=0$，$z = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$，

所以平面 ABE 的法向量为 $\vec{n}=(1,0,\dfrac{\lambda}{\lambda-1})$， ……………………………………10 分

又 $AM\perp$ 平面 A_1BC，$\overrightarrow{AM}=(0,-1,1)$

设平面 CBE 的法向量为 m，则 $\vec{m}=(0,-1,1)$， ……………………………………11 分

所以 $\cos\dfrac{\pi}{3}=|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=\dfrac{|m\cdot n|}{|m||n|}=\dfrac{\dfrac{\lambda}{1-\lambda}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\dfrac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2}}}=\dfrac{1}{2}$，

解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，即当点 E 为 A_1C 中点时，平面 ABE 与平面 BCE 的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$． ……………12 分

21.【解析】

（1）对 $na_{n+1}=(2n+2)a_n+(n^2+n)2^{n+1}$ 两边同时除以 $(n^2+n)2^{n+1}$ 可得：

$\dfrac{a_{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{n\cdot 2^n}+1$． ……………………………………………3 分

于是数列 $\left\{\dfrac{a_n}{n\cdot 2^n}\right\}$ 是首项为 $\dfrac{a_1}{2}=1$，公差为1的等差数列． ……………………………………4 分

（2）由（1）可知 $\dfrac{a_n}{n\cdot 2^n}=n$，$a_n=n^2\cdot 2^n$，$b_n=\dfrac{a_n}{n}\cdot\sin\dfrac{n\pi}{2}=n\cdot 2^n\cdot\sin\dfrac{n\pi}{2}$． ………… 5 分

于是

$S_{100}=b_1+b_3+b_5+\cdots+b_{97}+b_{99}=1\times 2^1-3\times 2^3+5\times 2^5-7\times 2^7+\cdots+97\times 2^{97}-99\times 2^{99}$ ……7 分

$4S_{100}=1\times 2^3-3\times 2^5+5\times 2^7-7\times 2^9+\cdots+97\times 2^{99}-99\times 2^{101}$， ……………………………8 分

$5S_{100}=2-2\times 2^3+2\times 2^5-2\times 2^7+\cdots-2\times 2^{99}-99\times 2^{101}$， ……………………………9 分

$=2-\dfrac{16[1-(-4)^{49}]}{1-(-4)}-99\times 2^{101}$ ……………………………10 分

$=-\dfrac{6}{5}-\dfrac{4^{51}}{5}-99\times 2^{101}=-\dfrac{6}{5}-\dfrac{497}{5}\times 2^{101}$ ……………………………11 分

因此 $S_{100}=-\dfrac{6}{25}-\dfrac{994}{25}\times 4^{50}=-\dfrac{6}{25}-\left(39\dfrac{19}{25}\right)\times 4^{50}=-\dfrac{6}{25}-\dfrac{497}{25}\times 2^{101}$． ……………………12 分

【评分说明】

1. 最后结果正确，没有 10 分点不扣分.

22.【解析】

（1）由 $f_n'(x)=-1+x-x^2+\cdots+(-1)^n x^{n-1}$． ……………………………………1 分

可得

$$f_n'(-2)=-1-2-2^2-\cdots-2^{n-1}=-\frac{1-2^n}{1-2}=1-2^n,$$

故曲线 $y=f_n(x)$ 在 $x=-2$ 处的切线斜率为 $1-2^n$． ……………………………………2 分

（2）因为 $f_2(x)-2\geqslant ke^x$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，来源：高三答案公众号

则 $k\leqslant\dfrac{f_2(x)-2}{e^x}=\dfrac{-1-x+\dfrac{x^2}{2}}{e^x}$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立． ……………………………………3 分

令 $g(x)=\dfrac{-1-x+\dfrac{x^2}{2}}{e^x}$，则 $g'(x)=\dfrac{x(4-x)}{2e^x}$，

故 $g(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，在 $(0,4)$ 上单调递增，在 $[4,+\infty)$ 上单调递减 …………4 分

又 $g(0)=-1$，且当 $x>4$ 时，$g(x)>0$， ……………………………………5 分

故 $g(x)$ 的最小值为 $g(0)=-1$，

故 $k\leqslant-1$，即 k 的取值范围是 $(-\infty,-1]$． ……………………………………6 分

(3) $f_n'(-1)=-1-1-\cdots-1=-n$．

当 $x\neq-1$ 时，$f_n'(x)=-1+x-x^2+\cdots+(-1)^n x^{n-1}=-\dfrac{1-(-x)^n}{1-(-x)}=\dfrac{(-x)^n-1}{x+1}$．………………7 分

因此当 n 为奇数时，$f_n(x)=1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\cdots+\dfrac{x^{n-1}}{n-1}-\dfrac{x^n}{n}$，此时 $f_n'(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^n+1}{x+1}, & x\neq-1,\\ -n, & x=-1.\end{cases}$

则 $f_n'(x)<0$，所以 $f_n(x)$ 单调递减．

此时 $f_n(0)=1>0$． $f_1(x)=1-x$ 显然有唯一零点，无最小值．

当 $n\geqslant2$ 时，$f_n(2)=1-2+\dfrac{2^2}{2}-\dfrac{2^3}{3}+\cdots+\dfrac{2^{n-1}}{n-1}-\dfrac{2^n}{n}$

$$=(1-2)+\frac{2^2}{3}\left(\frac{3}{2}-2\right)+\cdots+\frac{2^{n-1}}{n}\left(\frac{n}{n-1}-2\right)<0.$$

且当 $x>2$ 时，

$$f_n(x)=(1-x)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{x^{n-1}}{n-1}-\frac{x^n}{n}\right)$$

$$=(1-x)+\frac{x^2}{3}\left(\frac{3}{2}-x\right)+\cdots+\frac{x^{n-1}}{n}\left(\frac{n}{n-1}-x\right)<1-x,$$

由此可知此时 $f_n(x)$ 不存在最小值．

从而当 n 为奇数时，$f_n(x)$ 有唯一零点，无最小值． ……………………………………8 分

当 $n=2k\,(k\in\mathbf{N}^*)$ 为偶数时，$f_n(x)=1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{3}+\cdots-\dfrac{x^{n-1}}{n-1}+\dfrac{x^n}{n}$，

此时 $f_n'(x)=\begin{cases}\dfrac{x^n-1}{x+1}, & x\neq -1,\\ -n, & x=-1.\end{cases}$

则 $f_n(x)$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调递减，在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，故 $f_n(x)$ 的最小值为

$$f_n(1)=(1-1)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\frac{1}{n}>0,$$

即 $f_n(x)\geqslant f_n(1)>0$，当 n 为偶数时，$f_n(x)$ 没有零点．……………………………… 9 分

在不等式 $\ln(1+x)>\dfrac{x}{x+1}\,(x>0)$ 中令 $x=\dfrac{1}{n}$ 可得 $\ln\dfrac{n+1}{n}>\dfrac{1}{n+1}$，

分别取 $n=k,k+1,\cdots,2k-1$ 可知

$$\begin{aligned}1-f_{2k}(1)&=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)\end{aligned}$$

………………………………10 分

$$\begin{aligned}&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)\\&=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}\\&<\ln\frac{k+1}{k}+\ln\frac{k+2}{k+1}+\cdots+\ln\frac{2k}{2k-1}=\ln\frac{2k}{k}=\ln 2,\end{aligned}$$

………………………………11 分

即 $m=f_{2k}(1)>1-\ln 2$．

从而当 n 为偶数时，$f_n(x)$ 没有零点，存在最小值 m，且 $m>1-\ln 2$．……………… 12 分

综上所述，当 n 为奇数时，$f_n(x)$ 有唯一零点，无最小值；当 n 为偶数时，$f_n(x)$ 没有零点，存在最小值 m，且 $m>1-\ln 2$．