2024北京一六一中高二（下）开学考

数　　学

2024.2

班级__________姓名__________学号__________.

本试卷共2页，共150分.考试时长120分钟.考生务必将答案写在答题纸上，在试卷上作答无效.

一、选择题：本大题共12道小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目的要求.把正确答案涂写在答题卡上相应的位置.

1.直线$x+\sqrt{3}y+1=0$的倾角为（　）

A.$\frac{\pi}{6}$　B.$-\frac{\pi}{6}$　C.$\frac{5\pi}{6}$　D.$\frac{2\pi}{3}$

2.已知平行六面体$ABCD-A'B'C'D'$，则下列四式中错误的是（　）

A.$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$　B.$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{CC'}$

C.$\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{CC'}$　D.$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{C'C}=\overrightarrow{AC'}$

3.$(1-2x)^{16}$的展开式中的各项系数和是（　）

A.1　B.-1　C.2^{16}　D.3^{16}

4.椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{m}=1$的焦距为2，则$m$为（　）

A.5或13　B.5　C.8或10　D.8

5.在平直角坐标系xOy中，抛物线$x^2=2py(p>0)$上纵坐标为1的点到焦点的距离为3，则p的值为（　）

A.2　B.8　C.$\sqrt{3}$　D.4

6.下列函数中，在区间$(0,+\infty)$上是增函数的是（　）

A.$y=\sqrt{x+1}$　B.$y=(x-1)^2$

C.$y=2^{-x}$　D.$y=\log_{0.5}(x+1)$

7.若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的渐近线与圆$(x-2)^2+y^2=1$相切，则双曲线的离心率为（　）

A.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　B.2　C.$\sqrt{3}$　D.$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

8.从高二年级的5名同学中选派4人作为志愿者分别承担4项不同的公益工作，若其中甲、乙两人只能从事其中的A、B两项工作，其余三人均能从事这4项工作，则不同的选派方案共有（　）

A.48 种　B.12 种　C.18 种　D.36 种

9.椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2，过 F_2 与长轴垂直的直线与椭圆交于 A,B 两点，若 $\triangle ABF_1$ 为等边三角形，则椭圆的离心率为（　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. $\sqrt{3}$

10."方程 $\frac{x^2}{m-10}-\frac{y^2}{m-8}=1$ 表示双曲线"是"$m>10$"的（　）

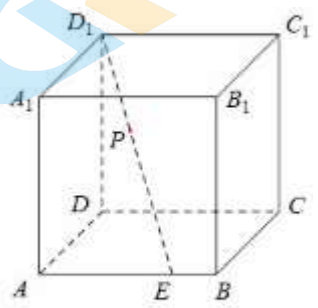
A.充分不必要条件　B.必要不充分条件

C.充要条件　D.既不充分也不必要条件

11.已知直线 $l:x+ay-2=0$ 与圆 $C:x^2+y^2-6x+2y+6=0$，则直线 l 与圆 C 的位置关系是（　）

A.相离　B.相切　C.相交　D.不能确定

12.如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为线段 AB 上的点，且 $\frac{AE}{EB}=3$，点 P 在线段 D_1E 上，则点 P 到直线 AD 距离的最小值为（　）



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　C. $\frac{3}{5}$　D. $\frac{3}{4}$

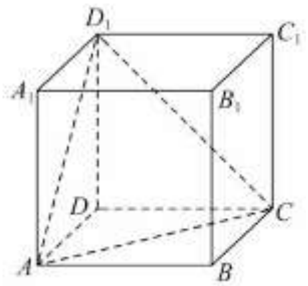
二、填空题：本大题共 6 小题，共 30 分.把答案填在答题纸中相应的横线上.

13.$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{x}\right)^9$ 展开式中的常数项是__________.

14.已知双曲线 $C:\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{2}=1$，则双曲线 C 的离心率为__________；直线 $x=2$ 与双曲线相交于 M,N 两点，则 $|MN|=$__________.

15.已知点 P 在抛物线 $y^2=4x$ 上，则点 P 到直线 $l_1:4x-3y+6=0$ 的距离和到直线 $l_2:x=-1$ 的距离之和的最小值为__________.

16.如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是平面 $A_1B_1C_1D_1$ 内一点，且 EB // 平面 ACD_1，则 $\tan\angle DED_1$ 的最大值为__________.



17.命题 p：已知 $A(1,1),B(-1,1),C(-1,-1),D(1,-1)$，满足 $\angle AMD=\angle BMC$ 的所有点 M 都在 y 轴上.能够说明命题 p 是假命题的一个点 M 的坐标为__________.

18.在平面直角坐标系 xOy 中，动点 $P(x,y)$ 到两坐标轴的距离之和等于它到定点 $(1,1)$ 的距离，记点 P 的轨迹为 C .给出下面四个结论，其中所有正确结论的序号为__________.

①曲线 C 关于原点对称；

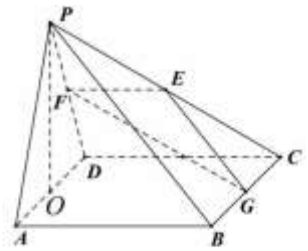
②曲线 C 关于直线 $y=x$ 对称；

③点 $(-a^2,1)(a\in R)$ 在曲线 C 上；

④在第一象限内，曲线 C 与 x,y 轴的非负半轴围成的封闭图形的面积小于 $\frac{1}{2}$.

三、解答题：本大题共 4 题，共 60 分.把答案填在答题纸中相应的位置上.

19.（本题 15 分）已知在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，$\triangle PAD$ 是正三角形，$CD\perp$ 平面 PAD ，E、F、G、O 分别是 PC、PD、BC、AD 的中点.



（1）求证：$PO\perp$ 平面 $ABCD$；

（2）求平面 EFG 与平面 $ABCD$ 所成二面角的大小.

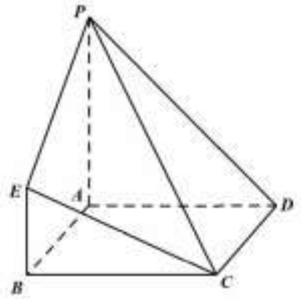
20.（本题 15 分）已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，椭圆上任意一点到椭圆的两个焦点的距离之和为 4.若直线 l 过点 $(-1,0)$，且与椭圆相交于不同的两点 A,B .

（1）求椭圆的标准方程；

（2）若线段 AB 中点的纵坐标 $\frac{1}{4}$，求直线 l 的方程.

21.（本题 15 分）在如图所示的几何体中，四边形 $ABCD$ 为正方形，$PA\perp$ 平面 $ABCD, PA\,//$

$BE, AB=PA=4, BE=2$.



（1）求证：CE // 平面 PAD；

（2）求 PD 与平面 PCE 所成角的正弦值；

（3）在棱 AB 上是否存在一点 F，使得平面 $DEF\perp$ 平面 PCE？如果存在，求 $\dfrac{AF}{AB}$ 的值；如果不存在，说明理由.

22.（本题 15 分）已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率等于 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，经过其左焦点 $F\left(-1,0\right)$ 且与 x 轴不重合的直线 l 与椭圆 C 交于 M,N 两点.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）O 为原点，在 x 轴上是否存在定点 Q，使得点 F 到直线 QM,QN 的距离总相等？若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，说明理由.

参考答案

一、选择题：本大题共 12 道小题，每小题 5 分，共 60 分.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	D	A	C	D	A	D	D	B	B	C	C

二、填空题：本大题共 6 小题，共 30 分.

13. -84　14. $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$4\sqrt{3}$　15. 2　16. $\sqrt{2}$　17. $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$（答案不唯一）　18. ②③④

三、解答题：本大题共 4 题，共 60 分.

19.（本题 15 分）

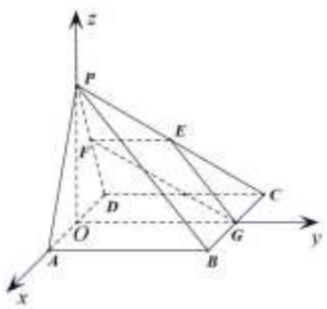
（1）证明：因为 $\triangle PAD$ 是正三角形，O 是 AD 的中点，所以 $PO\perp AD$.

又因为 $CD\perp$ 平面 $PAD, PO\subset$ 平面 PAD，所以 $PO\perp CD$.

$AD\cap CD=D, AD, CD\subset$ 平面 $ABCD$，

所以 $PO\perp$ 面 $ABCD$.

（2）如图，以 O 点为原点分别以 OA、OG、OP 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系.



则 $O(0,0,0), A(2,0,0), B(2,4,0), C(-2,4,0), D(-2,0,0), G(0,4,0), P\left(0,0,2\sqrt{3}\right)$，

$E\left(-1,2,\sqrt{3}\right), F\left(-1,0,\sqrt{3}\right), \overrightarrow{EF}=(0,-2,0), \overrightarrow{EG}=\left(1,2,-\sqrt{3}\right)$，

设平面 EFG 的法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

$$\begin{cases}-2y=0,\\ x+2y-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$$

令 $z=1$，则 $\vec{m}=\left(\sqrt{3},0,1\right)$，

又平面 $ABCD$ 的法向量 $\vec{n}=(0,0,1)$，

设平面 EFG 与平面 $ABCD$ 所成二面角为 θ，

所以$\cos\theta=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{1}{2}$.

所以平面EFG与平面$ABCD$所成二面角为$\frac{\pi}{3}$.

20.（本题 15 分）

解：（1）由题意可知$2a=4,e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得$c=\sqrt{3},b^2=a^2-c^2$，解得$b^2=1$.

所以椭圆的方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（2）由题意可知直线斜率存在

设$l:y=k(x+1)$设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

$$\begin{cases}y=k(x+1)\\x^2+4y^2=4\end{cases}$$

消y得$(1+4k^2)x^2+8k^2x+4k^2-4=0$

$$\because\Delta>0,\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{-8k^2}{1+4k^2}\\x_1x_2=\dfrac{4k^2-4}{1+4k^2}\end{cases}$$

设中点坐标为(x_0,y_0)

$$\therefore x_0=\frac{-4k^2}{1+4k^2},\therefore y_0=\frac{k}{1+4k^2}=\frac{1}{4}$$

$$\therefore k=\frac{1}{2}$$

直线方程为$x-2y+1=0$

21.（本题 15 分）

解：（1）设PA中点为G，连结EG,DG.

因为$PA\parallel BE$，且$PA=4,BE=2$，

所以$BE\parallel AG$且$BE=AG$，所以四边形$BEGA$为平行四边形.

所以$EG\parallel AB$，且$EG=AB$.

因为正方形$ABCD$，所以$CD\parallel AB,CD=AB$，

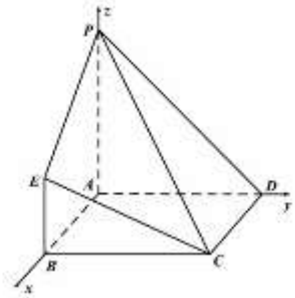
所以$EG\parallel CD$，且$EG=CD$.所以四边形$CDGE$为平行四边形.

所以$CE\parallel DG$.

因为$DG\subset$平面$PAD,CE\not\subset$平面PAD，

所以$CE\parallel$平面PAD.

（2）以 A 点为原点分别以 AB、AD、AP 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴如图建立空间坐标系，则



$B(4,0,0), C(4,4,0)$，

$E(4,0,2), P(0,0,4), D(0,4,0)$，

所以 $\overrightarrow{PC}=(4,4,-4), \overrightarrow{PE}=(4,0,-2)$，

$\overrightarrow{PD}=(0,4,-4)$.

设平面 PCE 的一个法向量为 $\vec{m}=(x,y,z)$，

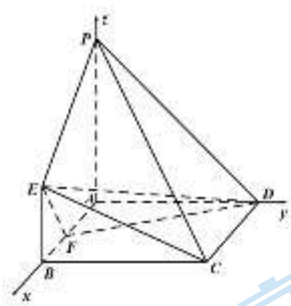
所以 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PE}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y-z=0\\ 2x-z=0\end{cases}$.

令 $x=1$，则 $\begin{cases}x=1\\ y=1\\ z=2\end{cases}$，所以 $\vec{m}=(1,1,2)$.设 PD 与平面 PCE 所成角为 α，

则 $\sin\alpha=|\cos<\vec{m},\overrightarrow{PD}>|=\left|\dfrac{\vec{m}\cdot\overrightarrow{PD}}{|\overrightarrow{PD}||\vec{m}|}\right|=\left|\dfrac{-4}{\sqrt{6}\times4\sqrt{2}}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

所以 PD 与平面 PCE 所成角的正弦值是 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

（3）依题意，可设 $F(a,0,0)$，则 $\overrightarrow{FE}=(4-a,0,2), \overrightarrow{DE}=(4,-4,2)$.



设平面 DEF 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{FE}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-2y+z=0\\ (4-a)x+2z=0\end{cases}$.

令 $x=2$，则 $\begin{cases} x=2 \\ y=\dfrac{a}{2} \\ z=a-4 \end{cases}$，

所以 $\vec{n}=\left(2,\dfrac{a}{2},a-4\right)$.

因为平面 $DEF\perp$ 平面 PCE，

所以 $\vec{m}\cdot\vec{n}=0$，即 $2+\dfrac{a}{2}+2a-8=0,$

所以 $a=\dfrac{12}{5}<4$，点 $F\left(\dfrac{12}{5},0,0\right)$.所以 $\dfrac{AF}{AB}=\dfrac{3}{5}$.

22.（本题 15 分）

解：（1）由题意得 $\begin{cases} \dfrac{1}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ a^2=b^2+1. \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=\sqrt{2}, \\ b=1. \end{cases}$

故椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$.

（2）当直线 MN 斜率存在时，设直线 MN 的方程为 $y=k(x+1)(k\neq 0)$.

由 $\begin{cases} y=k(x+1), \\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1, \end{cases}$ 消去 y 得 $(1+2k^2)x^2+4k^2x+(2k^2-2)=0$.

易得 $\Delta>0$.设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

则 $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-4k^2}{1+2k^2},① \\ x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{1+2k^2}.② \end{cases}$

设 $Q(t,0)$.由点 M,N 在 x 轴异侧，则问题等价于“QF 平分 $\angle MQN$”，且 $x_1\neq t,x_2\neq t$，

又等价于“$k_{QM}+k_{QN}=\dfrac{y_1}{x_1-t}+\dfrac{y_2}{x_2-t}=0$”，即 $y_1(x_2-t)+y_2(x_1-t)=0$.

将 $y_1=k(x_1+1),y_2=k(x_2+1)$ 代入上式，整理得 $2x_1x_2+(x_1+x_2)(1-t)-2t=0$.

将①②代入上式，整理得 $t+2=0$，即 $t=-2$，

所以 $Q(-2,0)$.

当直线 MN 的斜率不存在时，存在 $Q(-2,0)$ 也使得点 F 到直线 QM,QN 的距离相等.

故在 x 轴上存在定点 $Q(-2,0)$，使得点 F 到直线 QM,QN 的距离总相等.

关于我们

北京高考在线创办于 2014 年，隶属于北京太星网络科技有限公司，是北京地区极具影响力的中学升学服务平台。主营业务涵盖：北京新高考、高中生涯规划、志愿填报、强基计划、综合评价招生和学科竞赛等。

北京高考在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户 50W+，网站年度流量数千万量级。用户群体立足于北京，辐射全国 31 省市。

北京高考在线平台一直秉承“精益求精、专业严谨”的建设理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供新鲜的高考资讯、专业的高考政策解读、科学的升学规划等，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和北京近百所中学达成合作关系，累计举办线上线下升学公益讲座数千场，帮助数十万考生顺利通过考入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力

未来，北京高考在线平台将立足于北京新高考改革，基于对北京高考政策研究及北京高校资源优势，更好的服务全国高中家长和学生。

推荐大家关注北京高考在线网站官方微信公众号：京考一点通，我们会持续为大家整理分享最新的高中升学资讯、政策解读、热门试题答案、招生通知等内容！