2023 北京铁二中高二（上）期中

数　　学

2023.11

（试卷满分 150 分 考试时长 120 分钟）

第一部分（选择题共 50 分）

一、选择题（每题 5 分，计 50 分）

1. 直线 $\sqrt{3}x-y+1=0$ 的倾斜角的大小是（　）

A. 30°　　B. 60°　　C. 120°　　D. 150°

2. 若 a，b 是异面直线，直线 $c//a$，则 c 与 b 的位置关系是（　）

A. 相交　　B. 异面　　C. 平行　　D. 异面或相交

3. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E 是 AD 的中点，那么异面直线 D_1E 和 A_1B 所成的角的余弦值等于（　）

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$　　B. $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$　　C. $\dfrac{1}{3}$　　D. $\dfrac{2}{3}$

4. 过点 $A(-1,4)$ 作圆 $(x-2)^2+(y-3)^2=4$ 的切线，切点为 B，则切线段 AB 长为（　）

A. $\sqrt{5}$　　B. 3　　C. $\sqrt{6}$　　D. $\sqrt{7}$

5. 若点 $(k,0)$ 与 $(b,0)$ 的中点为 $(-3,0)$，则直线 $y=kx+b$ 必定经过点（　）

A. $(1,-6)$　　B. $(1,6)$　　C. $(-1,6)$　　D. $(-1,-6)$

6. 已知 $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$ 是空间两个不共线的向量，$\overrightarrow{MC}=5\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}$，那么必有（　）

A. $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}$ 共线　　B. $\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ 共线

C. $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ 共面　　D. $\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$ 不共面

7. 点 $(1,2)$ 关于直线 $x-2y-2=0$ 的对称点坐标是（　）

A. $(-1,-4)$　　B. $(3,-2)$　　C. $(0,4)$　　D. $(-1,6)$

8. 已知正方体 $ABCD-A'B'C'D'$，点 E 是 $A'C'$ 的中点，点 F 是 AE 的三等分点，且 $AF=\dfrac{1}{2}EF$，则 $\overrightarrow{AF}$ 等于（　）

A. $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AA'}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$　　B. $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AA'}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

C. $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AA'}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AD}$　　D. $\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AA'}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AD}$

9. 直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴，y 轴交于 A,B 两点，点 P 在圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 上，则 $\triangle ABP$ 面积的取

值范围是（　）

A. $[2,6]$　　B. $[4,8]$　　C. $[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$　　D. $[2\sqrt{2},3\sqrt{2}]$

10. 在平面直角坐标系中，已知点 $A(2,0),B(0,2)$，圆 $C:(x-a)^2+y^2=1$.若圆 C 上存在点 M，使得 $|MA|^2+|MB|^2=12$，则实数 a 的值不可能是（　）

A. -1　　B. 0　　C. $1+2\sqrt{2}$　　D. -2

第二部分（非选择题共 100 分）

二、填空题（每题 5 分，计 30 分）

11. 以 $A(2,3),B(4,9)$ 为直径的两个端点的圆的方程是__________.

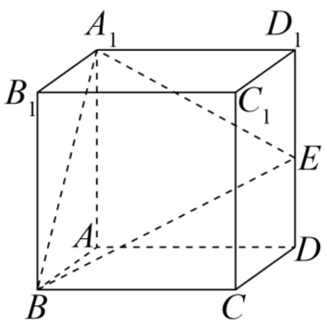
12. $P(2,\sqrt{3})$ 到直线 $x+\sqrt{3}y+t=0$ 的距离不超过 2，则实数 t 的取值范围是__________.

13. 已知向量 $\vec{a}=(2m+1,3,m-1)$，$\vec{b}=(2,m,-m)$，且 $\vec{a}\,//\,\vec{b}$，则实数 m 的值为______.

14. 设 $a\in \mathrm{R}$，已知直线 $l_1:ax+2y-1=0$ 与直线 $l_2:x+(a+1)y+4=0$，当 l_1 和 l_2 垂直时，$a=$__________；当 l_1 和 l_2 平行时，$a=$__________.

15. 若圆 C_1：$x^2+y^2=1$ 与圆 C_2：$x^2+y^2-6x-8y+m=0$ 外切，则实数 m 的值为___________.

16. 如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=2,E$ 为棱 DD_1 的中点，F 是正方形 CDD_1C_1 内部（含边界）的一个动点，且 $B_1F\,//$ 平面 A_1BE .给出下列四个结论：



①动点 F 的轨迹是一段圆弧；

②存在符合条件的点 F，使得 $B_1F\perp A_1B$；

③三棱锥 B_1-D_1EF 的体积的最大值为 $\frac{2}{3}$；

④设直线 B_1F 与平面 CDD_1C_1 所成角为 θ，则 $\tan\theta$ 的取值范围是 $[2,2\sqrt{2}]$.

其中所有正确结论的序号是__________.

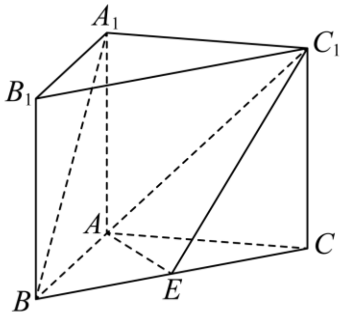
三、解答题（共 5 个大题，共计 70 分）

17. 已知直线 l 经过两直线 $3x+4y-7=0$ 与 $2x+y+2=0$ 的交点 P，且垂直于直线 $3x-2y-1=0$.

（1）求直线 l 的方程；

（2）求直线 l 与两坐标轴围成的三角形的面积 S.

18. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，E 是 BC 中点.



（1）求证：A_1B // 平面 AEC_1；

（2）若 $\angle BAC=90^\circ$，且 $AB=AC=AA_1=2$，

①求平面 AEC_1 与平面 ABB_1A_1 所成锐二面角的余弦值.

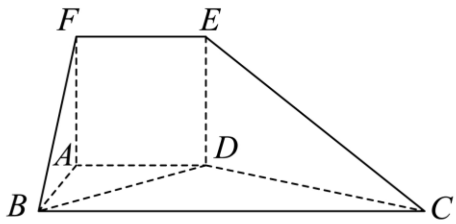
②求点 A_1 到平面 AEC_1 的距离.

19. 已知圆 G 过三点 $A(2,2),B(5,3),C(3,-1)$.

（1）求圆 G 的方程；

（2）设直线 l 的斜率为 -2，且与圆 G 相切，求直线 l 的方程.

20. 如图，在多面体 $ABCDEF$ 中，平面 $ADEF\perp$ 平面 $ABCD$．四边形 $ADEF$ 为正方形，四边形 $ABCD$ 为梯形，且 $AD//BC$，$\angle BAD=90^\circ$，$AB=AD=1$，$BC=3$.

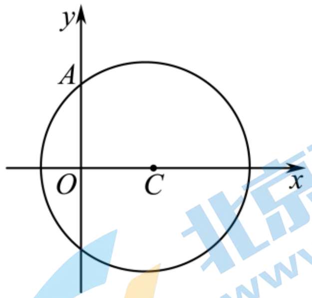


(1)求证：$AF\perp CD$；

(2)求直线 BF 与平面 CDE 所成角的正弦值；

(3)线段 BD 上是否存在点 M，使得直线 CE// 平面 AFM 若存在，求 $\dfrac{BM}{BD}$ 的值；若不存在，请说明理由.

21. 已知圆 C 的圆心坐标为 $C(3,0)$，且该圆经过点 $A(0,4)$.



（1）求圆 C 的标准方程；

（2）若点 B 也在圆 C 上，且弦 AB 长为 8，求直线 AB 的方程；

（3）直线 l 交圆 C 于 M，N 两点，若直线 AM，AN 的斜率之积为 2，求证：直线 l 过一个定点，并求

出该定点坐标.

参考答案

第一部分（选择题共 50 分）

一、选择题（每题 5 分，计 50 分）

1.【答案】B

【分析】利用直线斜率与倾斜角关系计算即可.

【详解】由题意可知该直线的斜率为$\sqrt{3}$，所以其倾斜角为60°.

故选：B

2.【答案】D

【分析】

通过反证法的思想，可以判断出选项正误.

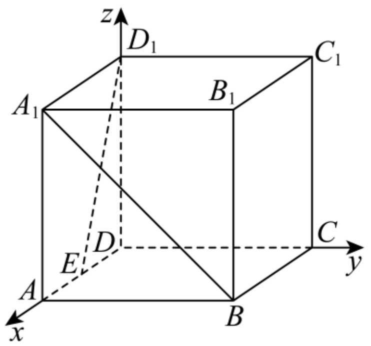
【详解】若 a，b 是异面直线，直线$c//a$，则 c 与 b 不可能是平行直线．否则，若$c//b$，则有$c//a//b$，得出 a，b 是共面直线．与已知 a，b 是异面直线矛盾，故 c 与 b 的位置关系为异面或相交，

故选：D

3.【答案】A

【分析】建立空间直角坐标系，利用坐标表示向量，利用向量求出异面直线D_1E 和 A_1B 所成角的余弦值.

【详解】建立空间直角坐标系，如图所示；



$D(0，0，0)$，$E(1，0，0)$，$D_1(0，0，2)$，$B(2，2，0)$，$A_1(2，0，2)$；

$\overrightarrow{D_1E}=(1，0，-2)$，$\overrightarrow{A_1B}=(0，2，-2)$，$\overrightarrow{D_1E}\cdot\overrightarrow{A_1B}=1\times0+0\times2-2\times(-2)=4$，

$|\overrightarrow{D_1E}|=\sqrt{1^2+0^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{A_1B}|=\sqrt{0^2+2^2+(-2)^2}=2\sqrt{2}$；

所以$\cos<\overrightarrow{D_1E}，\overrightarrow{A_1B}>=\dfrac{\overrightarrow{D_1E}\cdot\overrightarrow{A_1B}}{|\overrightarrow{D_1E}|\times|\overrightarrow{A_1B}|}=\dfrac{4}{\sqrt{5}\times2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$；

所以异面直线D_1E 和 A_1B 所成角的余弦值为$\dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

故选：A

4.【答案】C

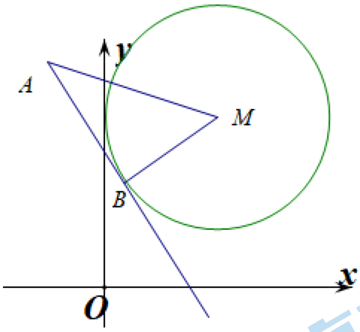
【分析】根据相切，由勾股定理即可求解.

【详解】设圆心为$M\left(2,3\right)$, 半径为$r=2$，

所以$\left|AM\right|=\sqrt{\left(-1-2\right)^2+\left(4-3\right)^2}=\sqrt{10}$，

故$\left|AB\right|=\sqrt{AM^2-r^2}=\sqrt{6}$，

故选：C



5. 【答案】A

【分析】根据中点公式可得$b=-k+6$，即可代入求解定点.

【详解】由题意可得$\dfrac{k+b}{2}=-3$，则$b=-k-6$，

所以直线方程为$y=kx+b=kx-6-k=k\left(x-1\right)-6$，

所以经过定点$\left(1,-6\right)$，

故选：A

6. 【答案】C

【分析】利用空间向量的共线定理与共面定理.

【详解】若$\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MC}$共线，则$\overrightarrow{MC}=\lambda\overrightarrow{MA}\left(\lambda\in\mathrm{R}\right)$，

又$\overrightarrow{MC}=5\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\Rightarrow\lambda\overrightarrow{MA}=5\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\Rightarrow\dfrac{\left(5-\lambda\right)}{3}\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MB}$，则$\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$共线，

与条件矛盾，故 A 错误；

同理若$\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$共线，则$\overrightarrow{MC}=\lambda\overrightarrow{MB}\left(\lambda\in\mathrm{R}\right)$，

又$\overrightarrow{MC}=5\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\Rightarrow\lambda\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\Rightarrow\dfrac{\left(\lambda+3\right)}{5}\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}$，则$\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}$共线，

与条件矛盾，故 B 错误；

根据空间向量的共面定理可知$\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}$共面，即 C 正确，D 错误.

故选：C

7. 【答案】B

【分析】根据中点关系可得$\dfrac{1+a}{2}-2\times\dfrac{2+b}{2}-2=0$，根据斜率关系可得$\dfrac{2-b}{1-a}\times\dfrac{1}{2}=-1$，解方程组求解$a$，$b$即可.

【详解】设点 $P(1,2)$ 关于直线 $x-2y-2=0$ 的对称点坐标为 $Q(a,b)$，

可得 $\frac{1+a}{2}-2\times\frac{2+b}{2}-2=0$，……①

斜率 $\frac{2-b}{1-a}\times\frac{1}{2}=-1$，……②.

由①②解得：$a=3,b=-2$.

则点 $P(1,2)$ 关于直线 l 的对称点坐标为 $(3,-2)$.

故选：B.

8.【答案】D

【分析】根据空间向量的分解，线性表示方法可求解.

【详解】因为 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'E}=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,

所以 $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AD}$.

故选:D.

9.【答案】A

【分析】求出 $A(-2,0)$, $B(0,-2)$, $|AB|=2\sqrt{2}$, 设 $P(2+\sqrt{2}\cos\theta,\sqrt{2}\sin\theta)$，点 P 到直线 $x+y+2=0$ 的距离：

$d=\frac{|2+\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta+2|}{\sqrt{2}}=\frac{|2\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+4|}{\sqrt{2}}\in[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$，由此能求出 $\triangle ABP$ 面积的取值范围.

【详解】∵直线 $x+y+2=0$ 分别与 x 轴，y 轴交于 A，B 两点，

∴令 $x=0$，得 $y=-2$，令 $y=0$，得 $x=-2$，

∴ $A(-2,0)$，$B(0,-2)$，则 $|AB|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$，

∵点 P 在圆 $(x-2)^2+y^2=2$ 上，∴设 $P(2+\sqrt{2}\cos\theta$，$\sqrt{2}\sin\theta)$，

∴点 P 到直线 $x+y+2=0$ 的距离：

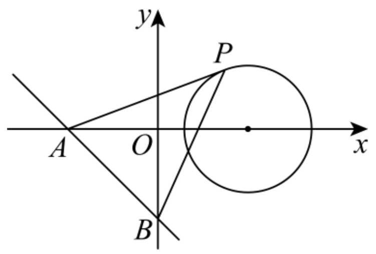
$$d=\frac{|2+\sqrt{2}\cos\theta+\sqrt{2}\sin\theta+2|}{\sqrt{2}}=\frac{|2\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+4|}{\sqrt{2}},$$

∵ $\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\in[-1,1]$，∴ $d=\frac{|2\sin(\theta+\frac{\pi}{4})+4|}{\sqrt{2}}\in[\sqrt{2},3\sqrt{2}]$，

∴ $\triangle ABP$ 面积为 $\frac{1}{2}|AB|d=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}d=\sqrt{2}d\in[2,6]$；

所以面积的范围为 $[2,6]$.

故选：A．



10．【答案】D

【分析】根据条件及两点距离公式计算 M 的轨迹，利用两圆的位置关系计算即可.

【详解】设 $M\left(x,y\right)$，由题意可知

$|MA|^2+|MB|^2=12=\left(x-2\right)^2+y^2+x^2+\left(y-2\right)^2\Rightarrow\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=4$，

即 $M\left(x,y\right)$ 是圆 $C:\left(x-a\right)^2+y^2=1$ 与圆 $D:\left(x-1\right)^2+\left(y-1\right)^2=4$ 的交点，

由两圆位置关系可知圆心距满足：$2-1\le|CD|\le1+2$，

即 $\sqrt{\left(a-1\right)^2+\left(0-1\right)^2}\in\left[1,3\right]\Rightarrow a\in\left[1-2\sqrt{2},1+2\sqrt{2}\right]$.

故选：D

第二部分（非选择题共 100 分）

二、填空题（每题 5 分，计 30 分）

11．【答案】$\left(x-3\right)^2+\left(y-6\right)^2=10$

【分析】利用圆的标准方程待定系数计算即可.

【详解】易知该圆圆心为 $A\left(2,3\right),B\left(4,9\right)$ 的中点 $C\left(3,6\right)$，半径 $r=\frac{|AB|}{2}=\sqrt{10}$，

所以该圆方程为：$\left(x-3\right)^2+\left(y-6\right)^2=10$.

故答案为：$\left(x-3\right)^2+\left(y-6\right)^2=10$.

12．【答案】$\left[-9,-1\right]$

【分析】直接利用点到直线的距离公式得到不等式，解得即可.

【详解】因为 $P\left(2,\sqrt{3}\right)$ 到直线 $x+\sqrt{3}y+t=0$ 的距离不超过 2，

所以 $d=\frac{\left|2+\sqrt{3}\times\sqrt{3}+t\right|}{\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}}\le2$，解得 $-9\le t\le-1$，

即实数 t 的取值范围是 $\left[-9,-1\right]$.

故答案为：$\left[-9,-1\right]$

13．【答案】-2

【分析】利用向量共线的性质，直接计算求解即可.

【详解】由题意得 $(2m+1):2=3:m=(m-1):(-m) \Rightarrow m=-2$

故答案为：-2

14. 【答案】 ①. $-\dfrac{1}{3}$ ②. 1或-2

【分析】当 $l_1 \perp l_2$ 时，有两种情况：①一条直线斜率不存在，另一条直线斜率为 0；②两直线斜率均存在时，满足两直线斜率之积为-1；

当 $l_1//l_2$ 时，有两种情况：①两条直线斜率均不存在；②两直线斜率相等；

【详解】由题意得 $k_{l_1}=-\dfrac{a}{2}$，

当 $l_1 \perp l_2$ 时，$a=0$ 或 $a=-1$ 不满足题意，

所以 $k_{l_2}=-\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{2}{a}$，所以 $a=-\dfrac{1}{3}$；

当 $l_1//l_2$ 时，$a=0$ 或 $a=-1$ 不满足题意，

所以 $k_{l_2}=-\dfrac{1}{a+1}=-\dfrac{a}{2}$，所以 $a=1$ 或 -2

经检验，$a=1$ 或 -2 时两直线不会重合；

故答案为：$-\dfrac{1}{3}$；1 或 -2.

15. 【答案】9

【分析】由圆心距等于半径之和求解.

【详解】解析：圆 C_2 的标准方程为 $(x-3)^2+(y-4)^2=25-m$.圆 C_1：$x^2+y^2=1$，∴$|C_1C_2|=5$.

又∵两圆外切，∴$5=1+\sqrt{25-m}$，解得 $m=9$.

故答案为：9.

16. 【答案】②③④

【分析】对于①，利用线线平行可证得平面 A_1BE // 平面 MNB_1，进而知动点 F 的轨迹；

对于②，利用垂直的性质的可判断；

对于③，利用三棱锥的体积公式可求得；

对于④，利用线面角的定义结合三角形可求解；

【详解】对于①，分别取 CC_1 和 D_1C_1 的中点 N,M，连接 MN，MB_1，NB_1，

由正方体性质知 $MN//A_1B$，$NB_1//EA_1$，$MN,NB_1 \not\subset$ 平面 A_1BE，$A_1B,EA_1 \subset$ 平面 A_1BE，所以 MN,NB_1 // 平面 A_1BE，又 $MN,NB_1 \subset$ 平面 MNB_1，$MN \cap NB_1=N$，所以平面 A_1BE // 平面 MNB_1，

当 F 在 MN 上运动时，有 B_1F // 平面 A_1BE，故动点 F 的轨迹是线段 MN，故①错误；

对于②，当 F 为线段 MN 中点时，$\because MB_1=NB_1$，$\therefore B_1F \perp MN$，

又 $MN//A_1B$，$\therefore B_1F\perp A_1B$，故②正确；

对于③，三棱锥 B_1-D_1EF 的体积 $V=\frac{1}{3}S_{D_1EF}\cdot B_1C_1=\frac{2}{3}S_{D_1EF}$，

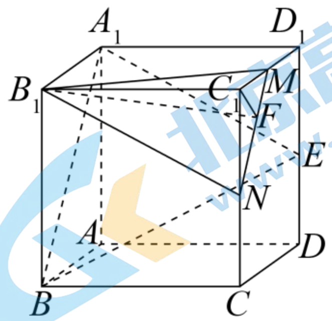
又 $S_{D_1EF\max}=\frac{1}{2}\times2\times1=1$ 所以三棱锥的体积的最大值为 $\frac{2}{3}$，故③正确；

对于④，连接 B_1F,C_1F，则 B_1F 与平面 CDD_1C_1 所成角 $\theta=\angle B_1FC_1$，则 $\tan\theta=\frac{2}{C_1F}$，

又 $\frac{\sqrt{2}}{2}\le C_1F\le1$，所以 $\tan\theta$ 的取值范围是 $\left[2,2\sqrt{2}\right]$，故④正确；

故正确结论的序号是①③④，

故答案为：②③④



三、解答题（共 5 个大题，共计 70 分）

17.【答案】(1) $2x+3y-6=0$

(2) 3

【分析】(1) 先求两直线的交点 P，再利用直线垂直的关系计算求 l 的方程即可；

(2) 根据直线方程及三角形面积公式计算即可

【小问 1 详解】

联立 $\begin{cases}3x+4y-7=0\\2x+y+2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-3\\y=4\end{cases}$，则 $P\left(-3,4\right)$，

由题意可知 $3x-2y-1=0$ 的斜率为 $\frac{3}{2}$，所以直线 l 的斜率为 $-\frac{2}{3}$，

故直线 l 的方程为：$y-4=-\frac{2}{3}\left(x+3\right)\Rightarrow2x+3y-6=0$；

【小问 2 详解】

由上可知 $x=0\Rightarrow y=2$，$y=0\Rightarrow x=3$，

即直线 l 与坐标轴的交点分别为 $\left(0,2\right),\left(3,0\right)$，

故 $S=\frac{1}{2}\times2\times3=3$.

18.【答案】(1) 证明见解析；

（2）$\frac{\sqrt{3}}{3}$；$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

【分析】（1）连接 A_1C 交 AC_1，利用中位线的性质判定线线平行，再证线面平行即可；

（2）建立合适的空间直角坐标系，利用空间向量求二面角及点面距离即可.

【小问 1 详解】

如图所示，连接 A_1C 交 AC_1 于 F 点，连接 EF，

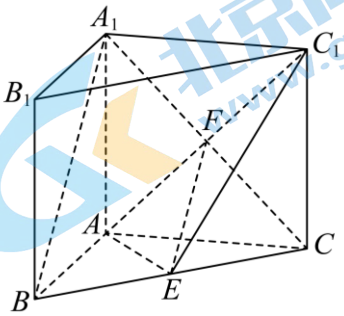
由三棱柱的特征可知侧面 ACC_1A_1 是平行四边形，则 F 是 A_1C 的中点，

又 E 是 BC 中点.

则 $EF // A_1B$，

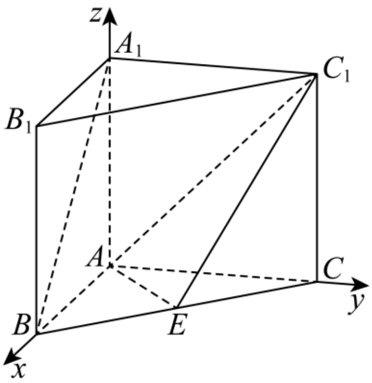
因为 $EF \subset$ 平面平面 AEC_1，$A_1B \not\subset$ 平面平面 AEC_1，

所以 $A_1B //$ 平面 AEC_1



【小问 2 详解】

由已知可得 $AA_1 \perp$ 底面 ABC，$AB \perp AC$，所以可以 A 为中心建立空间直角坐标系，建立如图所示的空间直角坐标系，



则 $\overrightarrow{AE}=(1,1,0),\overrightarrow{AC_1}=(0,2,2)$，

设平面 AEC_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=x+y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2y+2z=0\end{cases}$，

取 $y=-1$，则 $x=1,z=1$，即 $\vec{n}=(1,-1,1)$，

①易知 $\overrightarrow{AC}=(0,2,0)$ 是平面 ABB_1A_1 的一个法向量，

设平面 AEC_1 与平面 ABB_1A_1 所成角为 θ，

则 $\cos\theta=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}|}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}=\frac{2}{2\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$；

②易知 $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$，则点 A_1 到平面 AEC_1 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{AA_1}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

19.【答案】（1） $x^2+y^2-8x-2y+12=0$

（2） $2x+y-14=0$ 或 $2x+y-4=0$.

【分析】（1）利用三点坐标可根据待定系数法求解圆方程；

（2）利用直线与圆相切则圆心到直线的距离等于半径建立等式即可求解.

【小问 1 详解】

设圆 G 的方程为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，其中 $D^2+E^2-4F>0$，

因为圆 G 过三点 $A(2,2),B(5,3),C(3,-1)$，

所以 $\begin{cases}4+4+2D+2E+F=0\\25+9+5D+3E+F=0\\1+9+3D-E+F=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}D=-8\\E=-2\\F=12\end{cases}$，

圆 G 的方程为 $x^2+y^2-8x-2y+12=0$.

【小问 2 详解】

由（1）知圆 G 是以 $(4,1)$ 为圆心，以 $r=\sqrt{5}$ 为半径的圆，

设直线方程为 $y=-2x+b$，即 $2x+y-b=0$，

因为直线与圆相切，所以圆心到直线的距离为 $d=\frac{|9-b|}{\sqrt{2^2+1}}=\sqrt{5}$，

解得 $b=14$ 或 $b=4$，所以切线方程为 $2x+y-14=0$ 或 $2x+y-4=0$.

20.【答案】（Ⅰ）详见解析；（Ⅱ） $\frac{\sqrt{10}}{5}$；（Ⅲ）线段 BD 上存在点 M，使得 CE // 平面 AFM，且 $\frac{BM}{BD}=\frac{2}{3}$.

【分析】（Ⅰ）根据面面垂直的性质定理，证得 $AF\perp$ 平面 $ABCD$，由此证得 $AF\perp CD$.（Ⅱ）以 AB,AD,AF 为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系，通过计算直线 BF 的方向向量和平面 CDE 的法向量，由此计算出线面角的正弦值.（Ⅲ）设 $\frac{BM}{BD}=\lambda\left(\lambda\in(0,1]\right)$，用 λ 表示出 M 点的坐标，利用直线 CE 的方向向量和平面 AFM 的法向量垂直列方程，解方程求得 λ 的值，由此判断存在符合题意的点 M.

【详解】解：（Ⅰ）证明：因为 $ADEF$ 为正方形，

所以 $AF\perp AD$.

又因为平面 $ADEF\perp$ 平面 $ABCD$，

且平面 $ADEF \cap$ 平面 $ABCD = AD$，

所以 $AF \perp$ 平面 $ABCD$.

所以 $AF \perp CD$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）可知，$AF \perp$ 平面 $ABCD$，所以 $AF \perp AD$，$AF \perp AB$.

因为 $\angle BAD = 90°$，所以 AB, AD, AF 两两垂直.

分别以 AB, AD, AF 为 x 轴，y 轴，z 轴建立空间直角坐标系（如图）.

因为 $AB = AD = 1$，$BC = 3$，

所以 $A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,3,0), D(0,1,0), E(0,1,1), F(0,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{BF} = (-1,0,1), \overrightarrow{DC} = (1,2,0), \overrightarrow{DE} = (0,0,1)$.

设平面 CDE 的一个法向量为 $n = (x,y,z)$，

则 $\begin{cases} n \cdot \overrightarrow{DC} = 0, \\ n \cdot \overrightarrow{DE} = 0. \end{cases}$ 即 $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$

令 $x = 2$，则 $y = -1$，

所以 $n = (2,-1,0)$.

设直线 BF 与平面 CDE 所成角为 θ，

则 $\sin\theta = \left|\cos\langle n, \overrightarrow{BF}\rangle\right| = \dfrac{|2\times(-1)|}{\sqrt{5}\times\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{10}}{5}$.

（Ⅲ）设 $\dfrac{BM}{BD} = \lambda\left(\lambda \in (0,1]\right)$，

设 $M(x_1, y_1, z_1)$，则 $(x_1 - 1, y_1, z_1) = \lambda(-1,1,0)$，

所以 $x_1 = 1-\lambda, y_1 = \lambda, z_1 = 0$，所以 $M(1-\lambda, \lambda, 0)$，

所以 $\overrightarrow{AM} = (1-\lambda, \lambda, 0)$.

设平面 AFM 的一个法向量为 $m = (x_0, y_0, z_0)$，则 $\begin{cases} m \cdot \overrightarrow{AM} = 0, \\ m \cdot \overrightarrow{AF} = 0. \end{cases}$

因为 $\overrightarrow{AF} = (0,0,1)$，所以 $\begin{cases} (1-\lambda)x_0 + \lambda y_0 = 0, \\ z_0 = 0. \end{cases}$

令 $x_0 = \lambda$，则 $y_0 = \lambda - 1$，所以 $m = (\lambda, \lambda-1, 0)$.

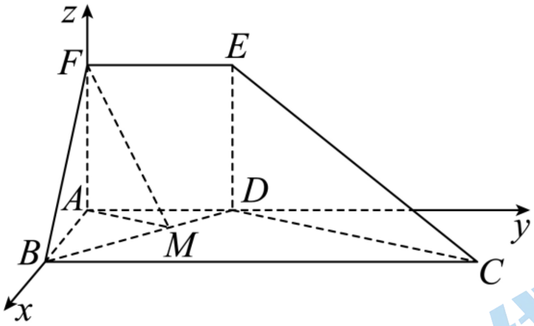
在线段 BD 上存在点 M，使得 $CE //$ 平面 AFM 等价于存在 $\lambda \in [0,1]$，使得 $m \cdot \overrightarrow{CE} = 0$.

因为 $\overrightarrow{CE} = (-1,-2,1)$，由 $m \cdot \overrightarrow{CE} = 0$，

所以 $-\lambda - 2(\lambda - 1) = 0$，

解得 $\lambda=\frac{2}{3}\in[0,1]$，

所以线段 BD 上存在点 M，使得 $CE//$ 平面 AFM，且 $\frac{BM}{BD}=\frac{2}{3}$.



【点睛】本小题主要考查面面垂直的性质定理，考查利用空间向量法求解线面所成角的正弦值，考查线面平行的向量表示，考查空间想象能力和逻辑推理能力，属于中档题.

21.【答案】（1）$(x-3)^2+y^2=25$（2）$x=0$ 或 $7x+24y-96=0$（3）证明见解析，定点 $(-6,-12)$

【分析】

（1）圆以 $(3,0)$ 为圆心，$|AB|=5$ 为半径，直接写出圆的标准方程；

（2）对直线的斜率进行讨论，再利用弦长公式和点到直线距离公式，可求得直线的斜率，再由点斜式方程求得答案；

（3）设直线 MN：$y=kx+t$，$M(x_1,kx_1+t)$，$N(x_2,kx_2+t)$，利用

$k_{AM}\cdot k_{AN}=2$ 得到 k,t 的关系，从而证得结论.

【详解】（1）圆以 $(3,0)$ 为圆心，$|AB|=5$ 为半径，

所以圆的标准方程为 $(x-3)^2+y^2=25$.

（2）①k 不存在时，直线 l 的方程为：$x=0$，$|AB|=2\sqrt{5^2-3^2}=8$，满足题意；

②k 存在时，设直线 l 的方程为：$y=kx+4$，

$d=\sqrt{5^2-4^2}=3$

$d=\frac{|3k+4|}{\sqrt{k^2+1}}=3,\therefore k=-\frac{7}{24}$，

所以直线 l 的方程为：$7x+24y-96=0$，

综上所述，直线 l 的方程为 $x=0$ 或 $7x+24y-96=0$.

（3）设直线 MN：$y=kx+t$，$M(x_1,kx_1+t)$，$N(x_2,kx_2+t)$，

$k_{AM}\cdot k_{AN}=\frac{kx_1+t-4}{x_1}\cdot\frac{kx_2+t-4}{x_2}=2$

$\Rightarrow(k^2-2)x_1x_2+k(t-4)(x_1+x_2)+(t-4)^2=0$ ①

联立方程$\begin{cases} y=kx+t \\ (x-3)^2+y^2=25 \end{cases} \Rightarrow (k^2+1)x^2+(2kt-6)x+t^2-16=0$，

所以$x_1+x_2=\dfrac{-(2kt-6)}{1+k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{t^2-16}{1+k^2}$代入①

得$(k^2-2)(t^2-16)+(kt-4k)(-2kt+6)+(t-4)^2(1+k^2)=0$，

化简得$k=\dfrac{t}{6}+2$，所以直线l的方程为：$y=\left(\dfrac{t}{6}+2\right)x+t$，所以过定点$(-6,-12)$.

【点睛】本题考查圆的标准方程、弦长公式、点到直线距离、直线过定点问题，考查函数与方程思想、转化与化归思想、分类讨论思想，考查逻辑推理能力和运算求解能力，求解时注意对斜率存在和存在的讨论.

北京高一高二高三期中试题下载

京考一点通团队整理了【**2023 年 10-11 月北京各区各年级期中试题&答案汇总**】专题，及时更新最新试题及答案。

通过【**京考一点通**】公众号，对话框回复【**期中**】或者点击公众号底部栏目<**试题专区**>，进入各年级汇总专题，查看并下载电子版试题及答案！