合肥一中 2024 届高三上学期期末质量检测卷·数学

参考答案、提示及评分细则

1. A　$\frac{3+a\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{(3+a\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{5}=\frac{6-a}{5}+\frac{3+2a}{5}\mathrm{i}$，$\frac{3+a\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$的实部与虚部相等，则$\frac{6-a}{5}=\frac{3+2a}{5}$，所以 $a=1$. 故选 A.

2. B　因为 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{x\mid a<x<a^2\}$，若 $A\subseteq B$，则$\begin{cases}a<1,\\a^2>3,\end{cases}$所以 $a<-\sqrt{3}$. 故选 B.

3. B　由图易得 A 正确；与 2021 年相比，2022 年人工智能应用渗透率增长最快的是电信和医疗行业，B 错误；2021 年十大行业人工智能应用渗透率的极差为 $81\%-25\%=56\%$，C 正确；2022 年十大行业人工智能应用渗透率的中位数是$\frac{45\%+40\%}{2}=42.5\%$，D 正确. 故选 B.

4. D　$2\sin 80^\circ\cos 20^\circ=2\sin(60^\circ+20^\circ)\cos 20^\circ=(\sqrt{3}\cos 20^\circ+\sin 20^\circ)\cos 20^\circ=\sqrt{3}\cos^2 20^\circ+\sin 20^\circ\cos 20^\circ=\frac{\sqrt{3}(1+\cos 40^\circ)}{2}+\frac{\sin 40^\circ}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin(40^\circ+60^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos 10^\circ$，$2\sin 80^\circ\cos 20^\circ-\frac{\sin 20^\circ}{2\sin 10^\circ}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos 10^\circ-\cos 10^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 D.

5. C　C_1 的焦点为 $(1,0)$，C_2 的焦点为 $(0,1)$，过 C_1 与 C_2 焦点的直线方程为 $x+y=1$，A 错误；C_1 与 C_2 有 $(0,0)$，$(4,4)$ 2 个公共点，B 错误；与 x 轴平行的直线与 C_1 有 1 个交点，与 C_2 最多有 2 个交点，C 正确；C_1 与 C_2 关于直线 $y=x$ 对称，若存在直线与 C_1 和 C_2 都相切，则该切线也关于直线 $y=x$ 对称，不妨设为 $y=-x+t$，与 $x^2=4y$ 联立得 $x^2+4x-4t=0$，由 $\Delta=0$ 得 $t=-1$，所以直线 $y=-x-1$ 与 C_1 和 C_2 都相切，D 错误. 故选 C.

6. C　由 $\ln y=\ln x+\ln(y-x)$ 得 $y=x(y-x)=xy-x^2$，所以 $y=\frac{x^2}{x-1}$，由 $x>0$，$y>0$ 得 $x>1$，所以 $f(x)=\frac{x^2}{x-1}(x>1)$，排除 AB，由 $f(2)=4$，可排除 D. 故选 C.

7. A　由题意可得惊鸟铃的体积约为$\frac{1}{3}\times\pi\times 8^2\times 20-\frac{1}{3}\times\pi\times 8^2\times 18=128(\mathrm{cm}^3)$，所以该惊鸟铃的质量约为 $128\times 8.96=1146.88(\mathrm{g})\approx 1(\mathrm{kg})$. 故选 A.

8. B　满足$\frac{k^2-k+2}{2}\leqslant n\leqslant\frac{k^2+k}{2}$的 n 的值共有 k 个，对应的数列的项也有 k 个，这 k 项的和为$\left(1+\frac{2}{k}\right)2^k\times k=(k+2)2^k=(k+1)2^{k+1}-k2^k$，设 $b_n=(n+1)2^{n+1}-n2^n$，数列 $\{a_n\}$ 的前 28 项和就是数列 $\{b_n\}$ 的前 7 项和，其和为 $8\times 2^8-2=2\,046$. 故选 B.

9. CD　由椭圆定义得 $|PF_1|+|PF_2|=4$，$|F_1F_2|=2\sqrt{3}$，$|PF_1|+|PF_2|-|F_1F_2|=4-2\sqrt{3}$，A 错误；$|PF_1||PF_2|\leqslant\left(\frac{|PF_1|+|PF_2|}{2}\right)^2=4$，当 $|PF_1|=|PF_2|$ 时取等号，B 错误；$F_1(-\sqrt{3},0)$，$F_2(\sqrt{3},0)$，设 $P(x,y)$，则 $-2\leqslant x\leqslant 2$，$y^2=1-\frac{x^2}{4}$，$|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|=2\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{\frac{3}{4}x^2+1}$，由 $-2\leqslant x\leqslant 2$，可得 $2\leqslant|\overrightarrow{PF_1}+\overrightarrow{PF_2}|\leqslant 4$，C 正确；$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=x^2-3+y^2=\frac{3}{4}x^2-2$，$-2\leqslant\frac{3}{4}x^2-2\leqslant 1$，D 正确. 故选 CD.

10. ACD　因为 $P(A)=P(AB+A\overline{B})=P(AB)+P(A\overline{B})$，$P(B)=P(AB+\overline{A}B)=P(AB)+P(\overline{A}B)$，因为 $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$，所以 $P(A)=P(B)$，A 正确；因为 $P(A+B)=P(AB+\overline{A}B+A\overline{B})=P(AB)+P(\overline{A}B)+P(A\overline{B})=P(AB)+\frac{1}{2}=1$，所以 $P(AB)=\frac{1}{2}$，$P(A)=P(B)=P(AB)+P(A\overline{B})=\frac{3}{4}$，

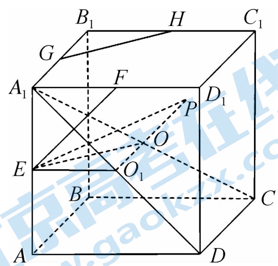
$P(AB)\neq P(A)P(B)$，B 错误，C 正确；$P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\dfrac{2}{3}$，D 正确. 故选 ACD.

11. ABD　设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，对于 A，因为 $f'(x)=a+3\cos 3x$，要使 $f'(x)=f'(x_1)$，则 $x=\pm x_1+\dfrac{2k\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，$x$ 的值有无数个，A 正确；对于 B，存在点 A，B，使得曲线 $y=f(x)$ 在点 A，B 处的切线垂直，即存在 x_1，x_2，使得 $f'(x_1)f'(x_2)=(a+3\cos 3x_1)(a+3\cos 3x_2)=-1$，因为 $a-3\leqslant a+3\cos 3x_1\leqslant a+3$，$a-3\leqslant a+3\cos 3x_2\leqslant a+3$，所以 $(a-3)(a+3)\leqslant-1$，$-2\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 2\sqrt{2}$，B 正确；对于 C，对于任意点 A，B，直线 AB 的斜率恒小于 1，则 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<1$，即 $\dfrac{f(x_1)-x_1-[f(x_2)-x_2]}{x_1-x_2}<0$，所以 $y=f(x)-x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数，所以 $f'(x)-1=a-1+3\cos 3x\leqslant a+2\leqslant 0$，$a\leqslant-2$，C 错误；对于 D，曲线 $y=f(x)$ 在点 A，B 处的切线都过原点，则 $a+3\cos 3x_1=\dfrac{ax_1+\sin 3x_1}{x_1}$，整理得 $\tan 3x_1=3x_1$，同理可得 $\tan 3x_2=3x_2$，所以 $\dfrac{\tan 3x_1-\tan 3x_2}{x_1-x_2}=3$，D 正确. 故选 ABD.

12. -160　$\dfrac{(2x-y)^6}{x^2y^3}$ 的展开式中 x 的系数即 $(2x-y)^6$ 展开式中 x^3y^3 的系数，即 $C_6^3\cdot 2^3\cdot(-1)^3=-160$.

13. $\dfrac{2}{3}$ 或 $\dfrac{8}{3}$　因为 $f(x+\pi)=f(-x)$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 对称，所以 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\omega+\dfrac{\pi}{6}\right)=\pm 1$，即 $\dfrac{\pi}{2}\omega+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=\dfrac{2}{3}+2k$，$k\in\mathbf{Z}$，$\because\omega>0$，$\therefore k\geqslant 0$，$k\in\mathbf{Z}$，因为 $f(x)$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{12}\right)$ 上单调，所以 $\dfrac{\pi}{12}-\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\leqslant\dfrac{T}{2}$，解得 $\omega\leqslant 3$. 经检验，当 $k=0$ 时，$\omega=\dfrac{2}{3}$，当 $k=1$ 时，$\omega=\dfrac{8}{3}$ 均满足题意.

14. $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$　点 E，F，G，H 都在球 O 的表面上，则球 O 是正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱切球，球心为对角线 A_1C 的中点，半径为 $\sqrt{2}$，取 A_1D 的中点 O_1，则点 P 为 O_1O 延长线与球 O 表面的交点时点 P 到平面 ADD_1A_1 的距离最大，此时 $O_1P=1+\sqrt{2}$，$O_1E=1$，$PE=\sqrt{O_1E^2+O_1P^2}=\sqrt{4+2\sqrt{2}}$. 连接 OE，则 $OE/\!/AC/\!/GH$，$\angle PEO$ 就是异面直线 PE 与 GH 所成角，因为 $OE=OP=\sqrt{2}$，所以 $\cos\angle PEO=\dfrac{\frac{1}{2}PE}{OE}=\dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$，所以异面直线 PE 与 GH 所成角的余弦值的平方为 $\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$.



15. 解：$\because\triangle ABC$ 中三边 a，b，c 的对角分别为 A，B，C，

$\therefore\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

又 $\because\sin^2B+\sin^2C=\sin^2A+\sin B\sin C$，

$\therefore b^2+c^2=a^2+bc$，即 $b^2+c^2-a^2=bc$，

$\therefore\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$. ………………………………………………………… 3 分

(1) $\because S=2\sqrt{3}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}bc\cdot\sqrt{1-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}bc$，

$\therefore bc=8$，$\therefore a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc(1+\cos A)$

$=6^2-2\times 8\times\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=12$，

$\therefore a=2\sqrt{3}$. ………………………………………………………… 6 分

(2) $f(x)=3x^2-\dfrac{\ln x}{\cos A}-4x+1=3x^2-2\ln x-4x+1(x>0)$,

$f'(x)=6x-\dfrac{2}{x}-4=\dfrac{6x^2-4x-2}{x}=\dfrac{2(x-1)(3x+1)}{x}$, ………………………………………………… 8 分

$\because x>0$, $\therefore f'(x)$在$(0,1)$上为负,在$(1,+\infty)$上为正,

$\therefore f(x)$在$(0,1)$上为减函数,在$(1,+\infty)$上为增函数, ………………………………………… 10 分

$\therefore f(x)_{\min}=f(1)=3-4+1=0$, $\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上只有一个零点. ………………………… 12 分

$\therefore$要使 $f(x)$在$(0,t)$上有零点,则 t 的取值范围是$(1,+\infty)$. ……………………………………… 13 分

16. 解:(1) $\overline{x}=900+\dfrac{28+33+45+50+59+67+67+75+82+94}{10}=960$, ………………………………… 2 分

所以 $\mu=960$. ……………………………………………………………………………………………… 3 分

(2)由(1)知, $X\sim N(960,20^2)$,

$P(X<940)=P(X<\mu-\sigma)=\dfrac{1-P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)}{2}\approx\dfrac{1-0.68}{2}=0.16$.

该生产线上生产的 1 000 个零部件中,质量分数低于 940 的个数约为

$0.16\times1\ 000=160$. …………………………………………………………………………………… 7 分

(3)每个零部件的质量分数在$[940,980]$内的概率为 $P(\mu-\sigma\leqslant X\leqslant\mu+\sigma)\approx0.68$,

由题意可知 $\xi\sim B(n,0.68)$,

则 $P(\xi=10)=C_n^{10}\times0.68^{10}\times0.32^{n-10}$, ……………………………………………………… 9 分

设 $f(n)=C_n^{10}\times0.68^{10}\times0.32^{n-10}(n\geqslant10)$,

则$\dfrac{f(n+1)}{f(n)}=\dfrac{C_{n+1}^{10}\times0.68^{10}\times0.32^{n-9}}{C_n^{10}\times0.68^{10}\times0.32^{n-10}}=\dfrac{0.32n+0.32}{n-9}$, ……………………………………………… 11 分

令$\dfrac{0.32n+0.32}{n-9}>1$,得 $n<\dfrac{9.32}{0.68}\approx13.7$,

所以当 $n\leqslant13$ 时, $f(n+1)>f(n)$, ……………………………………………………………… 12 分

令$\dfrac{0.32n+0.32}{n-9}<1$,得 $n>\dfrac{9.32}{0.68}\approx13.7$,

所以当 $n\geqslant14$ 时, $f(n+1)<f(n)$, ……………………………………………………………… 14 分

所以 $n=14$ 时, $f(n)$最大,故使 $P(\xi=10)$最大的 n 的值为 14. …………………………………… 15 分

17. 解:(1)当点 G 为 DE 中点时,平面 $AFG\perp$平面 ABC,证明如下: ………………………………… 1 分

因为四棱锥 $A-BCDE$ 是正四棱锥,

所以 $AD=AE$, $AG\perp DE$. ……………………………………………………………………………… 2 分

在正方形 $BCDE$ 中, $DE/\!/BC$,所以 $AG\perp BC$,

在正方形 $BCDE$ 中, $CD\perp BC$,因为 $AF/\!/CD$,

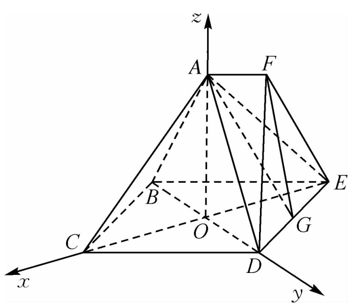
所以 $AF\perp BC$, ……………………………………………………………………………………… 4 分

因为 $AF\cap AG=A$, $AF,AG\subset$平面 AFG,

所以 $BC\perp$平面 AFG, ………………………………………………………………………………… 5 分

因为 $BC\subset$平面 ABC,

所以平面 $ABC\perp$平面 AFG. ………………………………………………… 6 分



(2)连接 BD,与 CE 交于点 O,连接 AO,因为四棱锥 $A-BCDE$ 是正四棱锥,

所以 OC,OD,OA 两两垂直,以 O 为坐标原点,以直线 OC,OD,OA 分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $O(0,0,0)$, $A(0,0,3)$, $B(0,-3,0)$, $C(3,0,0)$, $D(0,3,0)$, $F(-1,1,3)$, ……………………………… 9 分

所以$\overrightarrow{BA}=(0,3,3)$，$\overrightarrow{CA}=(-3,0,3)$，$\overrightarrow{DF}=(-1,-2,3)$. ………………………… 10 分

设平面 ABC 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则有$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{CA}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}3y+3z=0,\\ -3x+3z=0,\end{cases}$

取 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(1,-1,1)$，………………………… 13 分

设直线 DF 与平面 ABC 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{DF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{DF}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|(-1)\times1+(-2)\times(-1)+3\times1|}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+3^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\dfrac{2\sqrt{42}}{21}$，

故直线 DF 与平面 ABC 所成角的正弦值为$\dfrac{2\sqrt{42}}{21}$. ………………………… 15 分

18. (1)解：双曲线 C_2 的一条渐近线的方程为 $y=\dfrac{1}{2}x$，

因为双曲线 C_1 的一条渐近线与双曲线 C_2 的一条渐近线垂直，

所以双曲线 C_1 的一条渐近线的方程为 $y=-2x$，所以$\dfrac{b}{a}=2$，$b=2a$，………………………… 3 分

$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5}a$，所以 C_1 的一个焦点为 $F(\sqrt{5}a,0)$，

点 F 到双曲线 C_2 的一条渐近线 $y=\dfrac{1}{2}x$ 的距离为$\dfrac{\sqrt{5}a}{\sqrt{5}}=a=2$，

所以 $b=4$，C_1 的方程为$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{16}=1$. ………………………… 7 分

(2)证明：设 $A(m,n)$，则$\dfrac{m^2}{4}-\dfrac{n^2}{16}=1$，即 $4m^2-n^2=16$，$m^2\geqslant4$， ………………………… 8 分

由题意，得 $A'(n,m)$，设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，不失一般性，设 $A'P$ 的斜率为$\dfrac{1}{2}$，

则直线 $A'P$ 的方程为 $y-m=\dfrac{1}{2}(x-n)$，与$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 联立得

$x_1=\dfrac{2}{n-2m}+\dfrac{n-2m}{2}=-\dfrac{2m+n}{8}-m+\dfrac{1}{2}n=\dfrac{3}{8}n-\dfrac{5}{4}m$，

直线 $A'Q$ 的方程为 $y-m=-\dfrac{1}{2}(x-n)$，与$\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 联立得

$x_2=\dfrac{2m+n}{2}+\dfrac{2}{2m+n}=\dfrac{2m+n}{2}+\dfrac{2m-n}{8}=\dfrac{3}{8}n+\dfrac{5}{4}m$，………………………… 15 分

所以 $|A'P||A'Q|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}|x_1-n|\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{2}|x_2-n|=\dfrac{5}{4}\left|\dfrac{25n^2}{64}-\dfrac{25m^2}{16}\right|=\dfrac{125}{64}\left|\dfrac{n^2}{4}-m^2\right|=\dfrac{125}{16}$，

故 $|A'P||A'Q|$ 为定值$\dfrac{125}{16}$. ………………………… 17 分

19. 解：(1)由题意 $x(x-1)\equiv0(\mathrm{mod}3)$，所以 $x=3k$ 或 $x-1=3k(k\in\mathbf{Z})$，即 $x=3k$ 或 $x=3k+1(k\in\mathbf{Z})$.

………………………… 4 分

(2)由(1)可得 $\{a_n\}$ 为 $\{3,4,6,7,9,10,\cdots\}$，所以 $a_n=\begin{cases}3\times\dfrac{n+1}{2}(n\text{ 为奇数}),\\ 3\times\dfrac{n}{2}+1(n\text{ 为偶数}).\end{cases}$ ………………………… 6 分

①因为 $b_n=a_{n+1}-a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，所以 $b_n=\begin{cases}1(n\text{ 为奇数}),\\ 2(n\text{ 为偶数}).\end{cases}$

$S_{2\,024}=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{2\,024}=3\times1\,012=3\,036$. ………………………… 9 分

②$c_n=\tan a_{2n+1}\cdot\tan a_{2n-1}=\tan 3n\cdot\tan 3(n+1)(n\in\mathbf{N}^*)$. ………………………… 10 分

因为 $\tan 3n\cdot\tan 3(n+1)=\dfrac{\tan 3(n+1)-\tan 3n}{\tan 3}-1$，………………………… 13 分

所以 $T_n=c_1+c_2+\cdots c_n=\left(\dfrac{\tan 6-\tan 3}{\tan 3}-1\right)+\left(\dfrac{\tan 9-\tan 6}{\tan 3}-1\right)+\cdots+\left(\dfrac{\tan 3(n+1)-\tan 3n}{\tan 3}-1\right)$

$=\dfrac{\tan 3(n+1)-\tan 3}{\tan 3}-n=\dfrac{\tan 3(n+1)}{\tan 3}-n-1$. ………………………… 17 分