北京市陈经纶中学 2019—2020 届入学检测

高三数学

（时间　100 分钟　　满分 150 分）

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，40 分）

1．已知集合 $A=\{x\,|\,x>1\}$，集合 $B=\{x\,|\,x^2<4\}$，则 $A\cap B=$　　　　　　（　　）

A．$\{x\,|\,x>-2\}$　　B．$\{x\,|\,1<x<2\}$　　C．$\{x\,|\,1\le x<2\}$　　D．R

2．设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量，则“存在实数 λ，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$”是“$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$”的(　)条件

A. 充分而不必要　　B. 必要而不充分　　C. 充分必要　　D. 既不充分也不必要

3．已知平面向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角为 60°，$\boldsymbol{a}=(\sqrt{3},1)$，$|\boldsymbol{b}|=1$，则 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=$　　　　（　　）

A. 2；　　B. $\sqrt{7}$；　　C. $2\sqrt{3}$；　　D. $2\sqrt{7}$

4．为了得到函数 $y=\sin x+\cos x$ 的图像，只需把 $y=\sin x-\cos x$ 的图象上所有的点（　　）

A.向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度　　B.向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

C.向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度　　D.向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度

5.下列函数中，同时满足：①图象关于 y 轴对称；② $\forall x_1,x_2\in(0,+\infty)(x_1\neq x_2)$，$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0$

的是　　　　（　　）

A．$f(x)=x^{-1}$　B. $f(x)=\log_2|x|$　　C. $f(x)=\cos x$　　D. $f(x)=2^{x+1}$

6. 已知平面 $\alpha\cap\beta=l$，m 是 α 内不同于 l 的直线，那么下列命题中错误的是　　（　　）

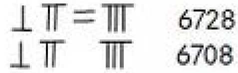
A．若 $m/\!/\beta$，则 $m/\!/l$　　B．若 $m/\!/l$，则 $m/\!/\beta$

C．若 $m\perp\beta$，则 $m\perp l$　　D．若 $m\perp l$，则 $m\perp\beta$

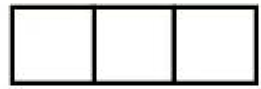
7．算筹是在珠算发明以前我国独创并且有效的计算工具，为我国古代数学的发展做出了很大贡献.在算筹计数法中，以“纵式”和“横式”两种方式来表示数字，如下图：

数字 / 形式	1	2	3	4	5	6	7	8	9
纵式	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

表示多位数时，个位用纵式，十位用横式，百位用纵式，千位用横式，以此类推，遇零则置空，如下图：

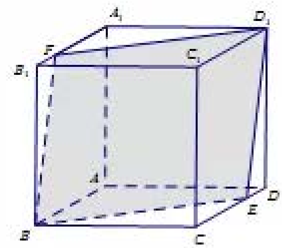


如果把 5 根算筹以适当的方式全部放入右面的表格中，那么可以表示的三位数的个数为 (　　)



A. 46　B. 44　C. 42　D. 40

8．在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E,F 分别为线段 CD 和 A_1B_1 上的动点，且满足 $CE=A_1F$，则四边形 D_1FBE 所围成的图形（如图所示阴影部分）分别在该正方体有公共顶点的三个面上的正投影的面积之和 (　　)



A. 有最小值 $\frac{3}{2}$

B.有最大值 $\frac{5}{2}$

C. 为定值 3

D. 为定值 2

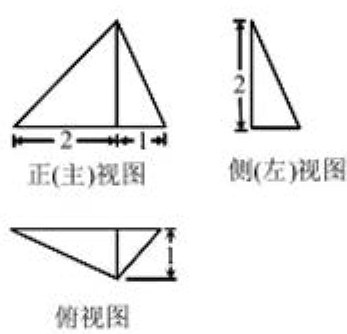
选择题答案：1 B　2B　3C　4 C　5 B　6D　7B　8D

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．在复平面内，复数 $\frac{2i}{1-i}$ 对应的点到原点的距离为_____.

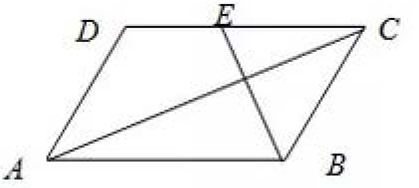
10．$\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c .若 $b=6, a=2c, B=\frac{\pi}{3}$，则 $\triangle ABC$ 的面积为__________.

11．某三棱锥的三视图如图所示，则在该三棱锥表面的四个三角形中，等腰三角形的个数为___.



12．已知 $x>0$，$y>0$，且 $2x+y=1$，则 $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}$ 的最小值是__________.

13．如图所示，平行四边形 $ABCD$ 中，$AB=2AD=2$，$\angle BAD=60^\circ$，E 是 DC 中点，那么向量 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{EB}$ 所成角的余弦值等于________.



14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2ax, & x<1,\\ \dfrac{a\ln x}{x}, & x\ge 1.\end{cases}$

① 当 $x<1$ 时，若函数 $f(x)$ 有且只有一个极值点，则实数 a 的取值范围是__________；

② 若函数 $f(x)$ 的最大值为 1，则 $a=$__________.

填空题答案：

9. $\sqrt{2}$；　10. $6\sqrt{3}$；　11. 2；　12．8;　13. $\frac{\sqrt{7}}{14}$；　14. $a<1$；-1

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

15．(本小题满分 14 分）在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，向量 $\boldsymbol{m}=(\cos(A-B),\sin(A-B))$，$\boldsymbol{n}=(\cos B,-\sin B)$，且 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{3}{5}$.

(1)求 $\sin A$ 的值；

(2)若 $a=4\sqrt{2}$，$b=5$，求角 B 的大小及向量 $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 方向上的投影．

[解]　(1)由 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=-\frac{3}{5}$,

得 $\cos(A-B)\cos B-\sin(A-B)\sin B=-\frac{3}{5}$,　　　……….2 分

化简得 $\cos A=-\frac{3}{5}$.　　　……….4 分

因为 $0<A<\pi$,　　　……….5 分

所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$. ……….7 分

(2)由正弦定理，得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,

则 $\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{5\times\frac{4}{5}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ……….9 分

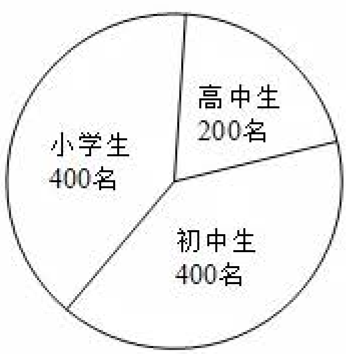
因为 $a>b$，所以 $A>B$，且 B 是 $\triangle ABC$ 一内角，则 $B=\frac{\pi}{4}$. ……….11 分

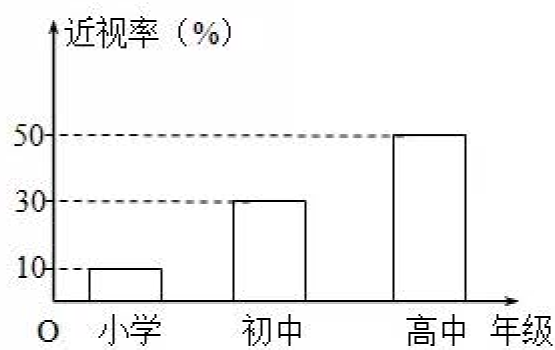
由余弦定理得 $(4\sqrt{2})^2=5^2+c^2-2\times5c\times\left(-\frac{3}{5}\right)$,

解得 $c=1$，$c=-7$(舍去)， ……….13 分

故向量 $\overrightarrow{BA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 方向上的投影为 $|\overrightarrow{BA}|\cos B=c\cos B=1\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. ……….14 分

16.（本小题满分 16 分）已知某校中小学生人数和近视情况分别如图所示. 为了解该校中小学生的近视形成原因，用分层抽样的方式从中抽取一个容量为 50 的样本进行调查.





(Ⅰ) 求样本中高中生、初中生及小学生的人数；

(Ⅱ) 从该校初中生和高中生中各随机抽取 1 名学生，用频率估计概率，求恰有 1 名学生近视的概率；

(III) 假设高中生样本中恰有 5 名近视学生，从高中生样本中随机抽取 2 名学生，用 X 表示 2 名学生中近视的人数，求随机变量 X 的分布列和数学期望.

解：(Ⅰ) 采用分层抽样，样本容量与总体容量的比为：$50:1000=1:20$，

所以样本中高中生、初中生及小学生的人数分别为：$10,20,20$. ……….4 分

(Ⅱ) 设事件 A 为"从该校初中生抽取 1 名学生是近视"，事件 B 为"从该校高中生抽取 1 名学生是近视". ……….1 分

故所求概率为 $P(A\overline{B}+\overline{A}B)=P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=P(A)P(\overline{B})+P(\overline{A})P(B)$.

由题意知：$P(A)=0.3, P(B)=0.5$.

故所求概率为：$0.3\times0.5+0.7\times0.5=0.5$. ………10 分

（III）随机变量 X 的所有可能取值为：0，1，2. ………11 分

$P(X=0)=\dfrac{C_5^2}{C_{10}^2}=\dfrac{2}{9}$，$P(X=1)=\dfrac{C_5^1\cdot C_5^1}{C_{10}^2}=\dfrac{5}{9}$，$P(X=2)=\dfrac{C_5^2}{C_{10}^2}=\dfrac{2}{9}$. ………14 分

所以随机变量 X 的分布列为：

X	0	1	2
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

………15 分

所以 $E(X)=0\times\dfrac{2}{9}+1\times\dfrac{5}{9}+2\times\dfrac{2}{9}=1$. ………16 分

17.（本小题满分 17 分）如图 1，在△ABC中，D，E分别为AB，AC的中点，O为DE的中点，$AB=AC=2\sqrt{5}$，$BC=4$．将△ADE沿DE折起到△A_1DE的位置，使得平面$A_1DE\perp$平面$BCED$，F为A_1C的中点，如图 2.

（I）求证：EF // 平面 A_1BD；

（II）求证：平面 $A_1OB\perp$平面 A_1OC；

（III）线段 OC 上是否存在点 G，使得 $OC\perp$平面 EFG？说明理由．

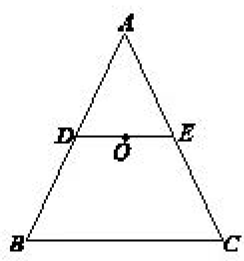


图 1

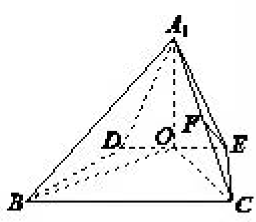
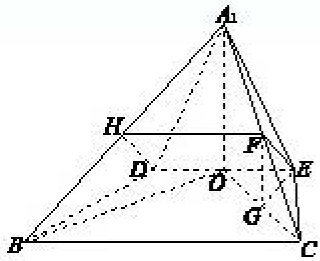


图 2

解：（Ⅰ）取线段 A_1B 的中点 H，连接 HD，HF．[1 分]



因为在△ABC 中，D，E 分别为 AB，AC 的中点，

所以 $DE//BC$，$DE=\frac{1}{2}BC$．

因为 H，F 分别为 A_1B，A_1C 的中点，

所以 $HF//BC$，$HF=\frac{1}{2}BC$，

所以 $HF//DE$，$HF=DE$，

所以 四边形 $DEFH$ 为平行四边形，[3 分]

所以 $EF//HD$．[4 分]

因为 $EF\not\subset$平面 A_1BD，$HD\subset$平面 A_1BD，

所以 $EF//$ 平面 A_1BD．[5 分]

（Ⅱ）因为在△ABC 中，D，E 分别为 AB，AC 的中点，

所以 $AD=AE$．

所以 $A_1D=A_1E$，又 O 为 DE 的中点，

所以 $A_1O\perp DE$．[6 分]

因为平面 $A_1DE\perp$平面 $BCED$，且 $A_1O\subset$平面 A_1DE，

所以 $A_1O\perp$平面 $BCED$，[8 分]

所以 $CO\perp A_1O$．[9 分]

在△OBC 中，$BC=4$，易知 $OB=OC=2\sqrt{2}$，

所以 $CO\perp BO$，

所以 $CO\perp$平面 A_1OB，[10 分]

所以 平面 $A_1OB\perp$平面 A_1OC．[11 分]

（Ⅲ）线段 OC 上不存在点 G，使得 $OC\perp$平面 EFG．[12 分]

否则，假设线段 OC 上存在点 G，使得 $OC\perp$平面 EFG，

连接 GE，GF，

则必有 $OC\perp GF$，且 $OC\perp GE$．

在Rt△A_1OC 中，由 F 为 A_1C 的中点，$OC\perp GF$，

得 G 为 OC 的中点．[12 分]

在△EOC 中，因为 $OC\perp GE$，

所以 $EO=EC$，

这显然与 $EO=1$，$EC=\sqrt{5}$ 矛盾！

所以线段 OC 上不存在点 G，使得 $OC\perp$平面 EFG．[17 分]

18.（本小题满分 17 分）已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x-1}{x}-ax$.

（Ⅰ）当 $a=2$时，（ⅰ）求曲线 $y=f(x)$在点 $(1,f(1))$处的切线方程；

（ⅱ）求函数 $f(x)$的单调区间；

（Ⅱ）若$1<a<2$，求证：$f(x)<-1$.

（Ⅰ）当 $a=2$时，$f(x)=\dfrac{\ln x-1}{x}-2x$.

$$f'(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}-2=\frac{2-2x^2-\ln x}{x^2}.$$

（ⅰ）可得 $f'(1)=0$，又 $f(1)=-3$，所以 $f(x)$ 在点（$1,-3$）处的切线方程为 $y=-3$.

....3 分

（ⅱ）在区间（$0,1$）上 $2-2x^2>0$，且 $-\ln x>0$，则 $f'(x)>0$.

在区间（$1,+\infty$）上 $2-2x^2<0$，且 $-\ln x<0$，则 $f'(x)<0$.

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为（$0,1$），单调递减区间为（$1,+\infty$）. ....8 分

（Ⅱ）由 $x>0$，$f(x)<-1$，等价于 $\dfrac{\ln x-1}{x}-ax<-1$，等价于 $ax^2-x+1-\ln x>0$.

设 $h(x)=ax^2-x+1-\ln x$，只须证 $h(x)>0$ 成立. ....9 分

因为 $h'(x)=2ax-1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2ax^2-x-1}{x}$，$1<a<2$， ....10 分

由 $h'(x)=0$，得 $2ax^2-x-1=0$ 有异号两根.

令其正根为 x_0，则 $2ax_0^{\ 2}-x_0-1=0$. .... 11 分

在 $(0,x_0)$上 $h'(x)<0$，在 $(x_0,+\infty)$上 $h'(x)>0$. .... 12 分

则 $h(x)$ 的最小值为 $h(x_0)=ax_0^2-x_0+1-\ln x_0$

$$=\frac{1+x_0}{2}-x_0+1-\ln x_0$$

$$=\frac{3-x_0}{2}-\ln x_0.$$ .... 14 分

又 $h'(1)=2a-2>0$，$h'(\dfrac{1}{2})=2(\dfrac{a}{2}-\dfrac{3}{2})=a-3<0$，

所以 $\dfrac{1}{2}<x_0<1$.

则 $\dfrac{3-x_0}{2}>0,-\ln x_0>0$. .... 16 分

因此 $\frac{3-x_0}{2}-\ln x_0>0$，即 $h(x_0)>0$.所以 $h(x)>0$

所以 $f(x)<-1$. ....17 分

19．（本小题满分 16 分）已知 x 为实数，用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，例如 $[1.2]=1$，$[-1.2]=-2$，$[1]=1$．对于函数 $f(x)$，若存在 $m\in R$ 且 $m\notin Z$，使得 $f(m)=f([m])$，则称函数 $f(x)$ 是"和谐"函数．

（Ⅰ）判断函数 $f(x)=x^2-\frac{1}{3}x$，$g(x)=\sin\pi x$ 是否是"和谐"函数；（只需写出结论）

（Ⅱ）设函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的周期函数，其最小周期为 T，若 $f(x)$ 不是"和谐"函数，求 T 的最小值．

（Ⅲ）若函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ 是"和谐"函数，求 a 的取值范围．

解：（Ⅰ）$f(x)=x^2-\frac{1}{3}x$ 是"和谐"函数， ------------3 分

$g(x)=\sin\pi x$ 不是"和谐"函数. ----------6 分

（Ⅱ）T 的最小值为 1. ---------8 分

因为 $f(x)$ 是以 T 为最小正周期的周期函数，所以 $f(T)=f(0)$.

假设 $T<1$，则 $[T]=0$，所以 $f([T])=f(0)$，矛盾. ----------------10 分

所以必有 $T\geq 1$，

而函数 $l(x)=x-[x]$ 的周期为 1，且显然不是是"和谐"函数，

综上，T 的最小值为 1. ------------------11 分

（Ⅲ）当函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ 是"和谐"函数时，

若 $a=0$，则 $f(x)=x$ 显然不是"和谐"函数，矛盾. ----------------12 分

若 $a<0$，则 $f'(x)=1-\frac{a}{x^2}>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0),(0,+\infty)$ 上单调递增，

此时不存在 $m\in(-\infty,0)$，使得 $f(m)=f([m])$，

同理不存在 $m\in(0,\infty)$，使得 $f(m)=f([m])$，

又注意到 $m[m]\geq 0$，即不会出现 $[m]<0<m$ 的情形，

所以此时 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ 不是"和谐"函数. ---------------13 分

当 $a>0$时，设 $f(m)=f([m])$，所以 $m+\frac{a}{m}=[m]+\frac{a}{[m]}$，所以有 $a=m[m]$，其中 $[m]\neq 0$，

当 $m>0$时，

因为 $[m]<m<[m]+1$，所以 $[m]^2<m[m]<[m]([m]+1)$，

所以 $[m]^2<a<[m]([m]+1)$. --------------------14 分

当 $m<0$时， $[m]<0$，

因为 $[m]<m<[m]+1$，所以 $[m]^2>m[m]>[m]([m]+1)$，

所以 $[m]^2>a>[m]([m]+1)$. ------------------15 分

记 $k=[m]$，综上，我们可以得到

“$a>0$且 $\forall k\in \mathbf{N}^*, a\neq k^2$且 $a\neq k(k+1)$”. -----------------16 分