清华附中高三2019年12月月考试卷数学

一、选择题(共8小题：共40分)

1.已知集合$A=\{-1，0，1\}$，$B=\{x|x^2<1\}$，则$A\cup B=$(　)

A.$\{-1，1\}$　　B.$\{-1，0，1\}$　　C.$\{x|-1\le x\le 1\}$　　D.$\{x|x\le 1\}$

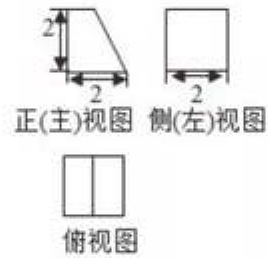
2.设等差数列$\{a_n\}$的前n项的和为S_n，且$S_{13}=52$，则$a_4+a_8+a_9=$(　)

A.8　　B.12　　C.16　　D.20

3.若$\log_2 a+\log_{\frac{1}{2}} b=2$，则有(　)

A.$a=2b$　　B.$b=2a$　　C.$a=4b$　　D.$b=4a$

4.一个棱长为2的正方体被一个平面截去一部分后，剩余几何体的三视图如图所示，则截去的几何体是(　)



A.三棱锥　　B.三棱柱　　C.四棱锥　　D.四棱柱

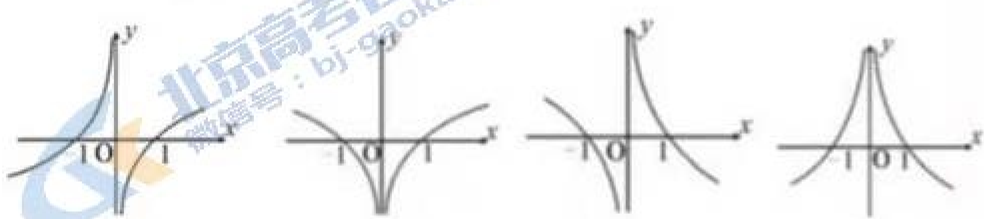
5.已知直线$x-y+m=0$与圆O：$x^2+y^2=1$相交于A，B两点，且$\triangle OAB$为正三角形，则实数m的值为(　)

A.$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B.$\frac{\sqrt{6}}{2}$　　C.$\frac{\sqrt{3}}{2}$或$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D.$\frac{\sqrt{6}}{2}$或$-\frac{\sqrt{6}}{2}$

6.“$a=-1$”是“函数$f(x)=\ln\left(\frac{2x}{1+x}+a\right)$为奇函数”的(　)

A.充分不必要条件　　B.必要不充分条件　　C.充分必要条件　　D.既不充分也不必要条件

7.函数$f(x)=\frac{x\log_a|x|}{|x|}$($0<a<1$)图象的大致形状是(　)



A　　B　　C　　D

8.某学校运动会的立定跳远和 30 秒跳绳两个单项比赛分成预赛和决赛两个阶段，如表下为 10 名学生的预赛成绩，其中有三个数据模糊.

学生序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
立定跳远(单位：米)	1.92	1.96	1.78	1.76	1.74	1.72	1.80	1.82	1.68	1.60
30 秒跳绳(单位：次)	63		75	60	63	72	70	a	b	65

在这 10 名学生中，进入立定跳远快赛的有 8 人，同时进入立定跳远决赛和 30 秒跳绳决赛的有 6 人，则(　　)

A.2 号学生进入 30 秒跳绳决赛　　B.5 号学生进入 30 秒跳绳决赛

C.8 号学生进入 30 秒跳绳决赛　　D.9 号学生进入 30 秒跳绳决赛

二、填空题(共 6 小题;共 30 分)

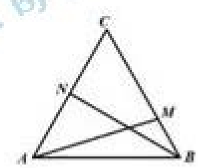
9.直线 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ 被圆$(x-2)^2+y^2=4$ 截得的弦长为________

10.函数 $f\left(x\right)=\sin^2 2x$ 的最小正周期是________

11.在△ABC 中，$\angle A=\dfrac{2\pi}{3}$，$a=\sqrt{3}c$，则 $\dfrac{b}{c}=$________

12.已知正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 $4\sqrt{2}$，M 是棱 BC 的中点，点 P 在底面 $ABCD$ 内，点 Q 在线段 A_1C_1 上，若 $PM=1$，则 PQ 长度的最小值为________

13.如图，在等边三角形 ABC 中，$AB=2$，点 N 为 AC 的中点，点 M 是边 CB(包括端上的一个动点，则 $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}$ 的最小值是_______



14.已知 A，B，C，D 四点共面，$BC=2$，$AB^2+AC^2=20$，$\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{CA}$，则$\left|\overrightarrow{BD}\right|$的最大值为__________

三、解答题(共 6 小题;共 80 分)

15.(13 分)已知数列$\{b_n\}$，满足 $b_1=4$ 且 $\dfrac{b_n}{n}-\dfrac{b_{n-1}}{n-1}=2(n\geqslant 2)$.

(I)求证$\{b_n\}$是单增数列;

(II)求数列$\left\{\dfrac{1}{b_n}\right\}$的前 n 项和 S_n.

16.(13 分)已知函数 $f\left(x\right)=2\cos x\left(\sin x+\sqrt{3}\cos x\right)-\sqrt{3}$.

(I)求 $f(x)$的单调递增区间；

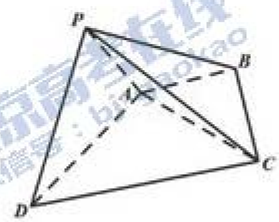
(II)若 $f(x)$在区间 $\left[m,\dfrac{\pi}{6}\right]$ 上的最小值为-2，求 m 的最大值.

17.(14 分)如图，在四棱锥 P-$ABCD$ 中，$\triangle PAD$ 为等边三角形，边长为 2，$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形，$AB\perp BC$，AC=1，$\angle DAC$=90°，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$.

(I)证明：$AC\perp$ 平面 PAD；

(II)求平面 PAD 与平面 PBC 所成锐二面角的余弦值；

(III)棱 PD 上是否存在一点 E，使得 AE∥平面 PBC?若存在，求出 $\dfrac{PE}{PD}$ 的值；若不存在，请说明理由.



18.(13 分)已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的焦点为 F_1，F_2，离心率为 $\dfrac{1}{2}$，点 P 为椭圆 C 上一动点，且 $\triangle PF_1F_2$ 的面积最大值为 $\sqrt{3}$，O 为坐标原点.

(I)求椭圆 C 的方程；

(II)设点 $M(x_1, y_1)$，$N(x_2, y_2)$为椭圆 C 上的两个动点，当 $x_1x_2+y_1y_2$ 为多少时，点 O 到直线 MN 的距离为定值.

19.(13 分)已知函数 $f\left(x\right)=\left(-1-a-x\right)e^{-x}-\frac{1}{2}ax^2-a^2x$，其中 $a(a\in R)$为常数.

(I)当 $a=0$ 时，求函数 $f(x)$在 $x=0$ 处的切线方程；

(II)若函数 $f(x)$在(0，1)存在极小值，求 a 的取值范围.

20.(14 分)已知$\{a_n\}$是由非负整数组成的无穷数列． 对每一个正整数 n，该数列前 n 项的最大值记为 A_n，第 n 项之后各项 a_{n+1}，a_{n+2}，…的最小值记为 B_n，记 $d_n=A_n-B_n$.

(I)若数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\begin{cases}5-n,1\leqslant n\leqslant 4\\1,n\geqslant\ldots 5\end{cases}$，求数列$\{d_n\}$的通项公式.

(II)证明："数列$\{a_n\}$单调递增"是"$\forall n\in N^*$，$dn<0$"的充要条件；

(III)若 $d_n=a_n$ 对任意 $n\in N^*$恒成立，证明：数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=0$.