执信　深外　育才 2024 届高三联考

数学参考答案及评分意见

1.C 【解析】$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 2,x\in\mathbf{Z}\}=\{0,1,2\}$，$\therefore A\cap B=\{0,1,2\}$.故选 C.

2.D 【解析】要使函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}+(x-1)^0$ 有意义，则 $\begin{cases}9-x^2>0,\\x-1\neq 0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}-3<x<3,\\x\neq 1,\end{cases}$ $\therefore f(x)$ 定义域是 $(-3,1)\cup(1,3)$.故选 D.

3.B 【解析】若 $m>n>0$，则 $\dfrac{n+1}{m+1}>\dfrac{n}{m}>0$ 成立，即充分性成立；由 $\dfrac{n+1}{m+1}>\dfrac{n}{m}$，得 $\dfrac{n+1}{m+1}-\dfrac{n}{m}=\dfrac{m(n+1)-n(m+1)}{m(m+1)}=\dfrac{m-n}{m(m+1)}>0$，则 $m>n>0$ 不一定成立，即必要性不成立，则 p 是 q 的充分不必要条件.故选 B.

4.D 【解析】$\because \cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos 2\alpha$，$\therefore \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)=\sqrt{2}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$，$\therefore(\cos\alpha+\sin\alpha)\cdot\left(\cos\alpha-\sin\alpha-\dfrac{1}{2}\right)=0$.又 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则 $\sin\alpha>0,\cos\alpha>0$，即 $\cos\alpha+\sin\alpha>0$，所以 $\cos\alpha-\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，所以 $2\alpha\in(0,\pi)$，$\sin 2\alpha>0$.由 $\cos\alpha-\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ 两边平方可得 $1-\sin 2\alpha=\dfrac{1}{4}$，即 $\sin 2\alpha=\dfrac{3}{4}$.故选 D.

5.C 【解析】由题意知 $a_3+a_9=2a_6$，$b_4+b_6+b_8=3b_6$，$\therefore\dfrac{a_3+a_9}{b_4+b_6+b_8}=\dfrac{2a_6}{3b_6}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{a_6}{b_6}$.$\because$ 等差数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 S_n,T_n，$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{n+2}{3n+4}$，$\therefore\dfrac{S_{11}}{T_{11}}=\dfrac{11a_6}{11b_6}=\dfrac{11+2}{33+4}=\dfrac{13}{37}$，$\therefore\dfrac{a_3+a_9}{b_4+b_6+b_8}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{a_6}{b_6}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{13}{37}=\dfrac{26}{111}$.故选 C.

6.B 【解析】因为 $\cos 37^\circ=0.8$，所以 $\sin 37^\circ=0.6$.因为 $\angle BCD=68^\circ$，$\angle CDB=37^\circ$，所以 $\angle CBD=180^\circ-68^\circ-37^\circ=75^\circ$.又 $\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.在 $\triangle BCD$ 中，由正弦定理得 $\dfrac{CD}{\sin\angle CBD}=\dfrac{CB}{\sin\angle CDB}$，即 $BC=\dfrac{CD\sin\angle CDB}{\sin\angle CBD}=\dfrac{37.6\times\sin 37^\circ}{\sin 75^\circ}$.又 $\triangle ABC$ 中，$\tan\angle ACB=\tan 64^\circ=\dfrac{AB}{BC}$，所以 $AB=BC\times\tan 64^\circ=2\times\dfrac{37.6\times\sin 37^\circ}{\sin 75^\circ}\approx\dfrac{2\times 37.6\times 0.6}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}\approx 47$（米）.故选 B.

7.A 【解析】令 $f(x)=e^x-(x+1)$，则 $f'(x)=e^x-1$，当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以 $f(0.04)=e^{0.04}-1.04>f(0)=0$，即 $e^{0.04}>1.04$.令 $g(x)=\ln x-x$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-1=\dfrac{1-x}{x}$，当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，所以 $g(1.04)=\ln(1.04)-1.04<g(1)=-1<0$，即 $\ln 1.04<1.04$，所以 $c>b>a$.故选 A.

8.D 【解析】因为 $f(3x-2)$ 为偶函数，所以 $f(3x-2)=f(-3x-2)$，所以 $f(x-2)=f(-x-2)$，$f(x)=f(-x-4)$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称，不能确定 $f(x)$ 的图象是否关于直线 $x=1$ 对称，A 错误；因为 $f(2x-1)$ 为奇函数，所以 $f(2x-1)=-f(-2x-1)$，所以 $f(x-1)=-f(-x-1)$，所以 $f(x)=-f(-x-2)$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(-1,0)$ 中心对称，又 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-2$ 对称，故 $f(x)$ 的对称中心为 $(-1+2k,0)$，$k\in\mathbf{Z}$，故 C 错误，且函数 $f(x)$ 的周期为 4，故 B 错误；$f(2\,023)=f(506\times 4-1)=f(-1)=0$，故 D 正确.故选 D.

9.ABD 【解析】对于 A，因为 $-1\leqslant\sin x\leqslant1$，故正确；对于 B，当 $x=\frac{1}{e}$ 时，等式成立，故正确；对于 C，当 $x=0$ 时，$x^2=0$，故错误；对于 D，$\forall x\in\mathbf{R}$，$3^x>0$，成立，故正确.故选 ABD.

10.BC 【解析】$f(x)$ 关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称，则 $\frac{\pi}{6}\omega+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\omega=\frac{3}{2}+6k$，$k\in\mathbf{Z}$.又 $0<\omega<4$，故当 $k=0$ 时，$\omega=\frac{3}{2}$，$f(x)=\sin\left(\frac{3}{2}x+\frac{\pi}{4}\right)$，将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到 $g(x)=\cos\frac{3}{2}x$.令 $\frac{3}{2}x=k\pi$ $(k\in\mathbf{Z})$，则对称轴方程为 $x=\frac{2k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，显然 $x=\frac{\pi}{3}$ 不满足，故 A 错误；令 $\frac{3x}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，则 $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，所以对称中心为 $\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},0\right)(k\in\mathbf{Z})$，显然 $k=-1$ 时，$\left(\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3},0\right)=\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$，故 B 正确；令 $2k\pi\leqslant\frac{3x}{2}\leqslant\pi+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，整理得 $\frac{4k\pi}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2\pi}{3}+\frac{4k\pi}{3}(k\in\mathbf{Z})$，所以单调递减区间为 $\left[\frac{4k\pi}{3},\frac{2\pi}{3}+\frac{4k\pi}{3}\right](k\in\mathbf{Z})$，显然，$k=0$ 时，C 正确；最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\frac{3}{2}}=\frac{4\pi}{3}$，故 D 不正确.故选 BC.

11.ABD 【解析】因为 $a>0,b>0,ab=4a+b\geqslant2\sqrt{4ab}=4\sqrt{ab}$，当且仅当 $4a=b$ 时等号成立，所以 $ab\geqslant16$，故 A 正确；由 $4a+b=ab$ 得 $b=\frac{4a}{a-1}>0$，$a>1$，同理 $b>4$，$2a+b=2a+\frac{4a}{a-1}=2(a-1)+\frac{4}{a-1}+6\geqslant2\sqrt{2(a-1)\times\frac{4}{a-1}}+6=4\sqrt{2}+6$，当且仅当 $2(a-1)=\frac{4}{a-1}$，即 $a=1+\sqrt{2}$ 时等号成立，故 B 正确；$a=5,b=5$ 时满足题意，但 $a-b=0$，故 C 错误；由 $4a+b=ab$ 得 $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1$，所以 $2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{16}{b^2}\right)\geqslant\left(\frac{1}{a}+\frac{4}{b}\right)^2=1$，当且仅当 $\frac{1}{a^2}=\frac{16}{b^2}$ 即 $b=4a$ 时等号成立，所以 $\frac{1}{a^2}+\frac{16}{b^2}\geqslant\frac{1}{2}$，故 D 正确.故选 ABD.

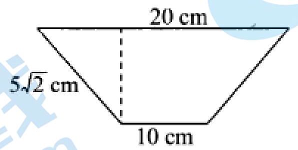
12.BCD 【解析】对于 A，由 $\lambda+\mu+\gamma=1$ 可知，点 P 在平面 A_1BD 内，所以 $|PA|$ 的最小值即点 A 到平面 A_1BD 的距离，易得最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，故 A 错误；对于 B，由 $\lambda=1,\mu=\gamma$ 可知，点 P 在直线 BC_1 上，易知，$BC_1/\!/AD_1$，所以 $BC_1/\!/$ 平面 AB_1D_1，即 $PB/\!/$ 平面 AB_1D_1，故 B 正确；对于 C，由 $\lambda=\mu=1,\gamma=\frac{1}{2}$ 可知，点 P 为线段 CC_1 的中点，取 BD 中点为 O，连接 PO,A_1O，可得 $\angle POA_1$ 为二面角 $P-BD-A_1$ 的平面角，根据勾股定理可得 $\angle POA_1=\frac{\pi}{2}$，故平面 $PBD\perp$ 平面 A_1BD，C 正确；对于 D，以 $\{AB,AD,AA_1\}$ 为基底建立空间直角坐标系，易得 $P(\lambda,\mu,0)$，又 $\lambda\mu=1$，可知点 P 在平面 xAy 内，易知 $|PA|\geqslant\sqrt{2}$，所以直线 PA_1 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成角的正切值为 $\frac{|AA_1|}{|PA|}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，D 正确.

13.0 【解析】由复数 $z=\frac{1+i}{2-2i}=\frac{1+i}{2(1-i)}=\frac{(1+i)^2}{2(1-i)(1+i)}=\frac{1}{2}i$，可得 $\bar{z}=-\frac{1}{2}i$，所以 $z+\bar{z}=\frac{1}{2}i+\left(-\frac{1}{2}i\right)=0$.故答案为 0.

14.$\sqrt{3}$ 【解析】因为单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 两两夹角均为 $\frac{2}{3}\pi$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=1\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$，且 $\boldsymbol{a}+$

$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$,则$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}|^2=|\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}|^2=\boldsymbol{b}^2+4\boldsymbol{c}^2+4\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=1+4+4\times\left(-\frac{1}{2}\right)=3$,所以$|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{c}|=\sqrt{3}$.故答案为$\sqrt{3}$.

15.1 167 【解析】据题意可知,这个“升”的内部可以看作正四棱台,如图为垂直底面的内截面,则棱台的高为$\sqrt{(5\sqrt{2})^2-\left(\frac{20-10}{2}\right)^2}=5$,则该正四棱台的体积为$\frac{1}{3}\times(10^2+20^2+\sqrt{10^2\times20^2})\times5=\frac{3\,500}{3}\approx1\,167(\mathrm{mL})$.故答案为1 167.



16.$[0,e^2]$ 【解析】当$x=1$时,$g(x)=0$,显然$f(x)\geqslant g(x)$恒成立,此时$a\in\mathbf{R}$.当$x\in(1,+\infty)$时,$f(x)\geqslant g(x)$等价于$\frac{e^x}{x-1}\geqslant a$;当$x\in(-\infty,1)$时,$f(x)\geqslant0$等价于$\frac{e^x}{x-1}\leqslant a$.构造函数$h(x)=\frac{e^x}{x-1}$,求导得$h'(x)=\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$,当$x\in(-\infty,1)$时,$h'(x)<0$,此时函数$h(x)$单调递减,且$h(x)=\frac{e^x}{x-1}<0$,只需$a\geqslant0$,即可满足$\frac{e^x}{x-1}\leqslant a$恒成立.当$x\in(1,2)$时,$g'(x)<0$,此时函数$g(x)$单调递减;当$x\in(2,+\infty)$时,$g'(x)>0$,函数$g(x)$单调递增,所以$g(x)$在$(1,+\infty)$上的最小值为$g(2)=\frac{e^2}{2-1}=e^2$,只需$g(2)=e^2\geqslant a$,即可满足$\frac{e^x}{x-1}\leqslant a$恒成立.综上,实数$a$需满足$\begin{cases}a\in\mathbf{R},\\a\geqslant0,\\e^2\geqslant a,\end{cases}$即$0\leqslant a\leqslant e^2$.故答案为$[0,e^2]$.

17.解:(1)因为$nS_{n+1}=(n+2)S_n$,所以$\frac{S_{n+1}}{S_n}=\frac{n+2}{n}$,所以$\frac{S_2}{S_1}=\frac{3}{1},\frac{S_3}{S_2}=\frac{4}{2},\frac{S_4}{S_3}=\frac{5}{3},\cdots,\frac{S_n}{S_{n-1}}=\frac{n+1}{n-1}$,

累乘得$\frac{S_n}{S_1}=\frac{3}{1}\times\frac{4}{2}\times\frac{5}{3}\times\cdots\times\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{2},n\geqslant2$. ………… 1分

$S_1=a_1=1$,所以$S_n=\frac{n(n+1)}{2},n\geqslant2$. ………… 2分

又$S_1=a_1=1$符合式子,所以$S_n=\frac{n(n+1)}{2},n\in\mathbf{N}^*$. ………… 3分

当$n\geqslant2$时,$S_{n-1}=\frac{n^2-n}{2}$,两式相减得$S_n-S_{n-1}=\frac{n^2+n-n^2+n}{2}=n$,

即$a_n=n(n\geqslant2,n\in\mathbf{N}^*)$,又$a_1=1$符合上式,所以$a_n=n(n\in\mathbf{N}^*)$. ………… 5分

(2)由(1)得$b_n=2^n$,则$c_n=\frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)}=\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}$, ………… 8分

所以$c_1+c_2+\cdots+c_n=\left(\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^2-1}\right)+\left(\frac{1}{2^2-1}-\frac{1}{2^3-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)$

$=\frac{1}{2^1-1}-\frac{1}{2^{n+1}-1}=1-\frac{1}{2^{n+1}-1}$,

故 c_n 的前 n 项和为 $1-\frac{1}{2^{n+1}-1}(n\in\mathbf{N}^*)$. …………………………………………………… 10 分

18.(1)**证明**:因为 $PB=PC$,O 是 BC 的中点,所以 $PO\perp BC$. …………………………………… 1 分

在直角△POC 中,$PC=\sqrt{3}$,$OC=1$,所以 $PO=\sqrt{2}$. …………………………………………… 2 分

在矩形 $ABCD$ 中,$AB=1$,$BC=2$,所以 $DO=\sqrt{2}$. ………………………………………………… 3 分

又因为 $PD=2$,所以在△POD 中,$PD^2=PO^2+OD^2$,即 $PO\perp OD$, ……………………………… 4 分

而 $BC\cap OD=O$,BC,$OD\subset$平面 $ABCD$,所以 $PO\perp$平面 $ABCD$, ………………………………… 5 分

而 $PO\subset$平面 PBC,所以平面 $PBC\perp$平面 $ABCD$. ……………………………………………… 6 分

(2)**解**:由(1)知,平面 $PBC\perp$平面 $ABCD$,平面 $PBC\cap$平面 $ABCD=BC$,且 $DC\perp BC$,$DC\subset$平面 $ABCD$,

所以 $DC\perp$平面 PBC,

所以 $DC\perp PC$,即△PCD 是直角三角形. ……………………………………………………………… 8 分

因为 $PC=\sqrt{3}$,$CD=1$,所以 $S_{\triangle PCD}=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ……………………………………… 9 分

又知 $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times 1\times 2=1$, …………………………………………………………………… 10 分

且 $PO\perp$平面 $ABCD$.

设点 A 到平面 PCD 的距离为 d,

则 $V_{A-PCD}=V_{P-ACD}$, ……………………………………………………………………………………… 11 分

即 $\frac{1}{3}\times S_{\triangle PCD}\times d=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ACD}\times PO$,

$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times d=\frac{1}{3}\times 1\times\sqrt{2}$,

解得 $d=\frac{2\sqrt{6}}{3}$,

所以点 A 到平面 PCD 的距离为 $\frac{2\sqrt{6}}{3}$. ……………………………………………………………… 12 分

19.**解**:(1)在△ADC 中,由正弦定理可得 $\frac{CD}{\sin\angle CAD}=\frac{AC}{\sin\angle ADC}$,

即 $CD=\frac{AC}{\sin\angle ADC}\cdot\sin\frac{\pi}{6}$. …………………………………………………………………… 2 分

在△ADB 中,由正弦定理可得 $\frac{AD}{\sin B}=\frac{AB}{\sin\angle ADB}$,即 $AD=\frac{AB}{\sin\angle ADB}\cdot\sin\frac{\pi}{4}$. ……………………… 4 分

因为 $\angle ADC+\angle ADB=\pi$,所以 $\sin\angle ADC=\sin\angle ADB$, …………………………………… 5 分

所以 $\frac{CD}{AD}=\frac{AC\sin\frac{\pi}{6}}{AB\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{AC}{\sqrt{2}AB}$,

因为 $AC=2AB$,所以 $\frac{CD}{AD}=\sqrt{2}$. ……………………………………………………………………… 6 分

(2)当 $AD=4$ 时，由(1)可知 $CD=4\sqrt{2}$. ·· 7 分

设 $AB=x$，则 $AC=2x$，

在 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理可得 $CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos\frac{\pi}{6}$， ······························ 10 分

代入化简可得 $x^2-2\sqrt{3}x-4=0$，解得 $x=\sqrt{3}+\sqrt{7}$ 或 $x=\sqrt{3}-\sqrt{7}$（舍）， ························ 11 分

所以 $AC=2\sqrt{3}+2\sqrt{7}$. ·· 12 分

20.**解**：(1)由 $a_{n+1}=2a_n+1$，得 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$.

又 $a_1=1$，所以数列 $\{a_n+1\}$ 是以 $a_1+1=2$ 为首项，2 为公比的等比数列， ······································ 2 分

故 $a_n+1=2\times2^{n-1}=2^n$，

所以 $a_n=2^n-1$. ·· 4 分

(2)$b_n=na_n=n\times2^n-n$，

所以 $T_n=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n-(1+2+3+\cdots+n)$， ······································· 5 分

设 $E_n=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$，$F_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. ···························· 7 分

$E_n=1\times2+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+n\times2^n$，

$2E_n=1\times2^2+2\times2^3+3\times2^4+\cdots+n\times2^{n+1}$，

作差得 $-E_n=2+2^2+2^3+\cdots+2^n-n\times2^{n+1}=\frac{2(1-2^n)}{1-2}-n\times2^{n+1}$，

化简得 $E_n=(n-1)\times2^{n+1}+2$， ·· 10 分

所以 $T_n=E_n-F_n=(n-1)\times2^{n+1}-\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}+2$. ··· 12 分

21.**解**：(1)在正方形 $ABCD$ 中，$AB/\!/CD$，

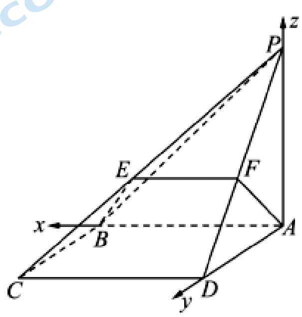
$\because CD$ 不在平面 PAB 内，且 $AB\subset$ 平面 PAB，$\therefore CD/\!/$ 平面 PAB.

$\because AB\subset$ 平面 $ABEF$，平面 $ABEF\cap$ 平面 $PCD=EF$，

$\therefore CD/\!/EF$.

$\because$ 点 F 是 PD 的中点，$\therefore$ 点 E 是 PC 的中点. ··· 3 分

以 A 为坐标原点，AB 所在直线为 x 轴，AD 所在直线为 y 轴，AP 所在直线为 z 轴，建立空间直角坐标系，如图.



由题意得 $A(0,0,0)$，$B(2,0,0)$，$C(2,2,0)$，$D(0,2,0)$，$P(0,0,2)$，$E(1,1,1)$，则 $\overrightarrow{PC}=(2,2,-2)$，$\overrightarrow{AB}=(2,0, 0)，$\overrightarrow{AE}=(1,1,1)$. …………………………………………………………………………………… 4 分

设平面 $ABEF$ 的一个法向量 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB}=2x=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=x+y+z=0,\end{cases}$ 取 $y=1$，得 $\boldsymbol{n}=(0,1,-1)$. …………………………………………… 5 分

设直线 PC 与平面 ABE 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{PC}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{PC}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2+2}{2\sqrt{3}\times\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，

∴PC 与平面 ABE 所成角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. …………………………………………………… 6 分

(2)∵点 F 是 PD 的中点，∴$F(0,1,1)$，…………………………………………………………… 7 分

∴$\overrightarrow{AF}=(0,1,1)$，设$\overrightarrow{PG}=\lambda\overrightarrow{PB}=(2\lambda,0,-2\lambda)(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，$\overrightarrow{EP}=(-1,-1,1)$，则$\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{EP}+\overrightarrow{PG}=(2\lambda-1,-1,1-2\lambda)$.

设直线 EG 与直线 AF 所成角为 α，

则 $\cos\alpha=\dfrac{|\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EG}|}{|\overrightarrow{AF}|\cdot|\overrightarrow{EG}|}=\dfrac{|-1+1-2\lambda|}{\sqrt{2}\times\sqrt{(2\lambda-1)^2+1^2+(2\lambda-1)^2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， ………………………………… 9 分

整理得 $4\lambda^2-8\lambda+3=0$，解得 $\lambda=\dfrac{1}{2}$，$\lambda=\dfrac{3}{2}$（舍去），…………………………………………… 11 分

∴在线段 PB 上存在一点 G，使得直线 EG 与直线 AF 所夹的角为 45°，此时 G 为 AB 中点. ……… 12 分

22.(1)**解**：$f'(x)=\dfrac{a}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{(a-1)x+a}{x(x+1)}$，$x>0$.

(ⅰ)当 $a\geqslant1$ 时，$f'(x)>0$，函数在$(0,+\infty)$上单调递增；…………………………………… 1 分

(ⅱ)当 $0<a<1$ 时，令 $f'(x)=0$，解为 $x=\dfrac{a}{1-a}$，

且 $x\in\left(0,\dfrac{a}{1-a}\right)$时，$f'(x)>0$；$x\in\left(\dfrac{a}{1-a},+\infty\right)$时，$f'(x)<0$.

所以函数 $f(x)$的增区间为$\left(0,\dfrac{a}{1-a}\right)$，减区间为$\left(\dfrac{a}{1-a},+\infty\right)$. ………………………………… 3 分

(2)**解**：由(1)知当 $0<a<1$ 时，$f(x)$的增区间为$\left(0,\dfrac{a}{1-a}\right)$，减区间为$\left(\dfrac{a}{1-a},+\infty\right)$，

由题可知，对任意 $0<a<1$，均有 $f\left(\dfrac{a}{1-a}\right)=\ln(1-a)+a\ln a-a\ln(1-a)+m>0$ 成立，

等价于 $m>-\ln(1-a)-a\ln a+a\ln(1-a)$恒成立. …………………………………………………… 4 分

令 $g(a)=(a-1)\ln(1-a)-a\ln a$，$0<a<1$，

则 $g'(a)=\ln\left(\dfrac{1}{a}-1\right)$，令 $g'(a)=0$，得 $a=\dfrac{1}{2}$.

且 $a\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$时，$g'(a)>0$；$a\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$时，$g'(a)<0$.

所以 $g(a)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上递增，在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上递减，…………………………………………………………………………… 6 分

所以 $[g(a)]_{\max}=g\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2$，所以 $m>\ln 2$. …………………………………………………………………………… 7 分

所以当 $m>\ln 2$ 时，$f\left(\frac{a}{1-a}\right)>0$，

且当 $x\to 0$ 时，$f(x)<0$；当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)<0$.

所以若对任意 $0<a<1$，函数 $f(x)$ 有 2 个零点，m 的取值范围为 $(\ln 2,+\infty)$. …………………………………… 8 分

(3)**证明**：由题意 $\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^3\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}>2^{-\frac{n^2}{2}}$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$ 且 $n\geqslant 2$，

两边取对数得 $\ln\left(\frac{1}{n}\right)+2\ln\left(\frac{2}{n}\right)+3\ln\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+(n-1)\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)>-\frac{n^2}{2}\ln 2$，

化简得 $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n}\ln\left(\frac{2}{n}\right)+\frac{3}{n}\ln\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+\frac{n-1}{n}\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)>-\frac{n}{2}\ln 2$. ………………………………… 9 分

由(2)可知，$a\in(0,1)$ 时，$a\ln a+(1-a)\ln(1-a)\geqslant-\ln 2$（当且仅当 $a=\frac{1}{2}$ 时取等号），

取 $a=\frac{k}{n}$，$k=1,2,\cdots n-1$，得

$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{n-1}{n}\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)>-\ln 2$，

$\frac{2}{n}\ln\left(\frac{2}{n}\right)+\frac{n-2}{n}\ln\left(\frac{n-2}{n}\right)>-\ln 2$，

……

$\frac{n-1}{n}\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)+\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)>-\ln 2$，……………………………………………………………………………………… 10 分

于是 $2\left[\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n}\ln\left(\frac{2}{n}\right)+\frac{3}{n}\ln\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+\frac{n-1}{n}\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]>-n\ln 2$，

即 $\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{2}{n}\ln\left(\frac{2}{n}\right)+\frac{3}{n}\ln\left(\frac{3}{n}\right)+\cdots+\frac{n-1}{n}\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)>-\frac{n}{2}\ln 2$，

命题得证. …… 12 分