

2020年全国高中数学联赛新疆赛区预赛

满分150分 时间：120分钟

一、填空题（本大题共10小题，每小题8分，共80分。）

1. 不等式 $1+2^x < 3^x$ 的解集为_____。

2. 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差和等比数列 $\{b_n\}$ 的公比都是 $d(d \neq 1)$ ，且 $a_1 = b_1, a_4 = b_4, a_{10} = b_{10}$ ，若存在 $m \in \mathbb{N}^*$ 使得 $a_m = b_{21}$ ，则 $m =$ _____。

3. 已知复数 z 满足 $|z|=1$ ，则 $|z+iz+1|$ 的最小值为_____。

4. $\triangle ABC$ 的三边分别为 a, b, c ，点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，已知 $b^2 - 2b + c^2 = 0$ ，那么 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AO}$ 的取值范围是_____。

5. 直线 $x-2y-1=0$ 与抛物线 $y^2=4x$ 交于 A, B 两点， C 为抛物线上的一点， $\angle ACB=90^\circ$ ，则点 C 的坐标为_____。

6. 由集合 $\{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ 中选出5个数，组成该集合的子集，从这些子集中任取一个，则取出的子集满足该子集中的5个数中任意两个数的和都不等于11的概率为_____。

7. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) (\omega > 0)$ ，若 $f(0) = -f(\frac{\pi}{2})$ ，且 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有且仅有三个零点，则 $\omega =$ _____。

8. 现有一个能容纳10个半径为1的小球的封闭的正四面体容器，则该容器棱长最小值为_____。

9. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 2020\}$ ，对于集合 A 的每一个非空子集的所有元素，计算它们乘积的倒数，则所有这些倒数的和为_____。

10. 11个女孩与 n 个男孩去采蘑菇，所有这些孩子共采到 $n^2 + 9n - 2$ 个蘑菇，并且每个孩子采到的个数都相同，则 $n =$ _____。

二、解答题（本大题共4小题，其中第11题16分，第12-14题每小题18分）

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$ ， $f(0) = f(1)$ ，且对任意不同的 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ ，

都有 $|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1|$ ，求证： $|f(x_2) - f(x_1)| < \frac{1}{2}$ 。

12. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_n^2 = \sum_{i=1}^n a_i^3$ 。

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 求证： $\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i^2} < 1.65$ 。

13. 已知 a, b, c, d 为正实数, 且 $ab + bc + cd + da = 1$.

求证:
$$\frac{a^2}{b+c+d} + \frac{b^2}{a+c+d} + \frac{c^2}{a+b+d} + \frac{d^2}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}$$

14. 设椭圆 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$ 有一个内接 $\triangle PAB$, 射线 OP 与 x 轴正向成 $\frac{\pi}{3}$ 角, 直线 AP, BP 的斜率

适合条件 $k_{AP} + k_{BP} = 0$.

(I) 求证: 过 A, B 的直线的斜率 k 是定值; (II) 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

2020年全国高中数学联赛新疆赛区预赛答案

一、填空题（本大题共10小题，每小题8分，共80分。）

1. 不等式 $1 + 2^x < 3^x$ 的解集为_____.

【答案】 $(1, +\infty)$

【解析】 即 $(\frac{1}{3})^x + (\frac{2}{3})^x < 1$. 令 $f(x) = (\frac{1}{3})^x + (\frac{2}{3})^x$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为减函数, 且 $f(1) = 1$. 所以解集为 $(1, +\infty)$.

2. 等差数列 $\{a_n\}$ 的公差和等比数列 $\{b_n\}$ 的公比都是 $d (d \neq 1)$, 且 $a_1 = b_1, a_4 = b_4, a_{10} = b_{10}$. 若存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $a_m = b_{22}$, 则 $m =$ _____.

【答案】 130

【解析】 由题得 $\begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_1 + 3d = b_1 \cdot d^3 \\ a_1 + 9d = b_1 \cdot d^9 \end{cases}$. 消去 a_1, b_1 得 $d^6 + d^3 - 2 = 0$, 解得 $d^3 = -2$, 或 1 (舍去)

所以 $a_1 + 3d = b_1 \cdot d^3$, 得 $d = -b_1$. $\therefore a_1 + (m-1)d = b_1 \cdot d^{22} = -128b_1$, 解得 $m = 130$.

3. 已知复数 z 满足 $|z| = 1$, 则 $|z + iz + 1|$ 的最小值为_____.

【答案】 $\sqrt{2} - 1$

【解析】

解法一: 设 $z = \cos \theta + i \sin \theta$, 则

$$|z + iz + 1| = \sqrt{(1 + \cos \theta - \sin \theta)^2 + (\cos \theta + \sin \theta)^2} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2} \cos(\theta + \frac{\pi}{4})}$$

所以, $|z + iz + 1|_{\min} = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

解法二: $|z + iz + 1| = |\bar{z} - (-1 - i)|$. 由复数的几何意义知, $|\bar{z} - (-1 - i)|$ 表示复数 \bar{z} 对应的点与点 $(-1, -1)$ 的距离. 而复数 \bar{z} 对应的点在单位圆上, 故: $|z + iz + 1|_{\min} = \sqrt{2} - 1$

4. $\triangle ABC$ 的三边分别为 a, b, c , 点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, 已知 $b^2 - 2b + c^2 = 0$, 那么 $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AO}$ 的取值范围是_____.

【答案】 $[-\frac{1}{4}, 2)$

【解析】 延长 AO 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 D , 得到

关注北京高考在线官方微信: 北京高考资讯 (ID:bj-gaokao), 获取更多试题资料及排名分析信息。

$$\overline{BC} \cdot \overline{AO} = \overline{AO} \cdot \overline{AC} - \overline{AO} \cdot \overline{AB} = \frac{1}{2} \overline{AD} \cdot \overline{AC} - \frac{1}{2} \overline{AD} \cdot \overline{AB}$$

$$= \frac{1}{2} (b^2 - c^2) = \left(b - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

因为 $c^2 = -b^2 + 2b > 0$, 所以 $b \in (0, 2)$, 故 $\overline{BC} \cdot \overline{AO} \in [-\frac{1}{4}, 2)$.

故答案为: $[-\frac{1}{4}, 2)$.

5. 直线 $x - 2y - 1 = 0$ 与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点, C 为抛物线上的一点, $\angle ACB = 90^\circ$, 则点 C 的坐标为_____.

【答案】(1, -2) 或 (9, -6).

【解析】设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(t^2, 2t)$, 由 $\begin{cases} x - 2y - 1 = 0, \\ y^2 = 4x, \end{cases}$ 得 $y^2 - 8y - 4 = 0$, 则 $y_1 + y_2 = 8$,

$y_1 \cdot y_2 = -4$. 又 $x_1 = 2y_1 + 1, x_2 = 2y_2 + 1$, 所以

$$x_1 + x_2 = 2(y_1 + y_2) + 2 = 18,$$

$$x_1 \cdot x_2 = 4y_1 \cdot y_2 + 2(y_1 + y_2) + 1 = 1.$$

因为 $\angle ACB = 90^\circ$, 所以 $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 0$, 即有 $(t^2 - x_1)(t^2 - x_2) + (2t - y_1)(2t - y_2) = 0$,

$$\text{即: } t^4 - (x_1 + x_2)t^2 + x_1 \cdot x_2 + 4t^2 - 2(y_1 + y_2)t + y_1 \cdot y_2 = 0.$$

$$\text{即: } t^4 - 14t^2 - 16t - 3 = 0,$$

$$\text{即: } (t^2 + 4t + 3)(t^2 - 4t - 1) = 0.$$

显然 $t^2 - 4t - 1 \neq 0$, 否则 $t^2 - 2 \cdot 2t - 1 = 0$, 则点 C 在直线 $x - 2y - 1 = 0$ 上, 从而点 C 与点 A 或点 B 重合. 所以 $t^2 + 4t + 3 = 0$, 解得 $t_1 = -1, t_2 = -3$.

故所求点 C 的坐标为 (1, -2) 或 (9, -6).

6. 由集合 $\{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ 中选出 5 个数, 组成该集合的子集, 从这些子集中任取一个, 则取出的子集满足该子集中的 5 个数中任意两个数的和都不等于 11 的概率为_____.

【答案】 $\frac{8}{63}$

【解析】易知由集合 $\{1, 2, 3, 4, \dots, 10\}$ 中选出 5 个数, 组成的该集合的子集个数为: $C_{10}^5 = 252$; 满足子集中的 5 个数中任意两个数的和都不等于 11 的子集个数, 可以这样考虑: 先把数字分成 5 组: $\{1, 10\}$,

{2, 9}, {3, 8}, {4, 7}, {5, 6}, 由于选出的 5 个数中, 任意两个数的和都不等于 11, 所以从每组中任选一个数字即可, 故共可组成 $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ (个) 这样的子集.

所以概率为: $P = \frac{32}{252} = \frac{8}{63}$

7. 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x - \frac{\pi}{6}) (\omega > 0)$, 若 $f(0) = -f(\frac{\pi}{2})$, 且 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有且仅有三个零点, 则

$\omega =$ _____ .

【答案】 $\frac{14}{3}$ 或 6

【解析】 因为 $f(0) = -f(\frac{\pi}{2})$, 所以 $\frac{1}{2} = \sin(\frac{\pi}{2}\omega - \frac{\pi}{6})$. 即 $\frac{\pi}{2}\omega - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ 或 $\frac{\pi}{2}\omega - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, 即 $\omega = \frac{2}{3} + 4k$ 或 $\omega = 2 + 4k, (k \in \mathbb{Z})$, 又因为在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上有且仅有三个零点, $\frac{2\pi}{\omega} < \frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{\omega}$, 所以 $4 < \omega < 8$, 所以 $\omega = \frac{14}{3}$ 或 6.

8. 现有一个能容纳 10 个半径为 1 的小球的封闭的正四面体容器, 则该容器棱长最小值为 _____.

【答案】 $4 + 2\sqrt{6}$

【解析】 这 10 个小球成棱锥形来放, 第一层 1 个, 第二层 3 个, 第三层 6 个, 即每一条棱是 3 个小球, 于是正四面体的一条棱长就应该是 4 倍的小球的半径加上 2 倍的球心到四面体顶点的距离到棱长上的射影的长度, 又球心到顶点的距离为 3, 正四面体的高和棱所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 故容器棱长的最小值为

$$4 + 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{6}}{3} = 4 + 2\sqrt{6}$$

9. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 2020\}$, 对于集合 A 的每一个非空子集的所有元素, 计算它们乘积的倒数, 则所有这些倒数的和为 _____.

【答案】 2020

【解析】 集合 A 的 $2^{2020} - 1$ 个非空子集中, 每一个集合的所有元素之积分别为: 1, 2, ..., 2020, 1×2 , $1 \times 3 \dots$, 2019×2020 , ..., $1 \times 2 \times \dots \times 2020$, 它们的倒数和为

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2020} + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{1 \times 3} + \dots + \frac{1}{2019 \times 2020} + \dots + \frac{1}{1 \times 2 \times \dots \times 2020} \\ & = (1+1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2020}\right) - 1 = 2 \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{2021}{2020} - 1 = 2020. \end{aligned}$$

10. 11 个女孩与 n 个男孩去采蘑菇, 所有这些孩子共采到 $n^2 + 9n - 2$ 个蘑菇, 并且每个孩子采到的个数都相同, 则 $n =$ _____.

【答案】 9

【解析】由于各个孩子采到的蘑菇数目一样多，故孩子总数 $n+11$ 能整除蘑菇总数，而：

$$n^2 + 9n - 2 = (n+11)(n-2) + 20, \text{ 从而 } n+11 \text{ 能整除 } 20, \text{ 由于 } n+11 > 11, \text{ 故 } n=9$$

二、解答题（本大题共 4 小题，其中第 11 题 16 分，第 12-14 题每小题 18 分）

11. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$ ， $f(0) = f(1)$ ，且对任意不同的 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ ，

都有 $|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1|$ ，求证： $|f(x_2) - f(x_1)| < \frac{1}{2}$ 。

【解析】

证明 设 $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ 。

(1) 若 $0 < x_2 - x_1 \leq \frac{1}{2}$ ，则 $|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1| \leq \frac{1}{2}$ ，即 $|f(x_2) - f(x_1)| < \frac{1}{2}$ ；

(2) 若 $\frac{1}{2} < x_2 - x_1 < 1$ ，则 $|f(x_2) - f(x_1)| = |f(x_2) + f(0) - f(1) - f(x_1)| = |f(x_2) - f(1) + f(0) - f(x_1)| \leq$

$|f(x_2) - f(1)| + |f(0) - f(x_1)| < |x_2 - 1| + |x_1 - 0|$ ，而 $|x_2 - 1| + |x_1 - 0| = 1 - x_2 + x_1 - 1 = -(x_2 - x_1) < 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ，

所以 $|f(x_2) - f(x_1)| < \frac{1}{2}$ 。

综上所述，对任意不同的 $x_1, x_2 \in [0, 1]$ 都有 $|f(x_2) - f(x_1)| < \frac{1}{2}$ 。

12. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $S_n^2 = \sum_{i=1}^n a_i^3$ 。

(I) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(II) 求证： $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2} < 1.65$ 。

【答案】(I) $a_n = n$ ；(II) 证明见解析

【解析】

(I) 由 $\begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i^3 = S_n^2 \\ \sum_{i=1}^{n+1} a_i^3 = S_{n+1}^2 \end{cases}$ 得到 $a_{n+1}^3 = S_{n+1}^2 - S_n^2 = (S_{n+1} + S_n)(S_{n+1} - S_n) = (S_{n+1} + S_n)a_{n+1}$ 。

因为 $a_{n+1} > 0$ ，所以 $a_{n+1}^2 = 2S_n + a_{n+1}$ ，即 $2S_n = a_{n+1}^2 - a_{n+1}$ ， $2S_{n-1} = a_n^2 - a_n$ (n. 2)。

两式相减，得 $2a_n = a_{n+1}^2 - a_{n+1} - a_n^2 + a_n$ ，进而 $(a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} + a_n$ 。

因为 $a_{n+1} + a_n > 0$ ，所以 $a_{n+1} - a_n = 1$ (n. 2)。

又由已知 $a_1 = 1, a_2 = 2$ ，所以，对任意 $n \in \mathbb{N}$ ，有 $a_{n+1} - a_n = 1$ 。

即 $\{a_n\}$ 是等差数列，故 $a_n = n$ 。

$$(II) \frac{1}{a_k^2} = \frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-\frac{1}{2})(k+\frac{1}{2})} = \frac{1}{k-\frac{1}{2}} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}, k \in N^*$$

$$\begin{aligned} \text{所以当 } n \geq 3 \text{ 时, } \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2} &< 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3-\frac{1}{2}} - \frac{1}{3+\frac{1}{2}}\right) + \left(\frac{1}{4-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4+\frac{1}{2}}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{n+\frac{1}{2}} < 1.65 \end{aligned}$$

当 $n=1$ 时, 左边 $= 1 < 1.65$ 成立, 当 $n=2$ 时, 左边 $= 1 + \frac{1}{4} < 1.65$ 成立,

$$\text{所以 } \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k^2} < 1.65.$$

13. 已知 a, b, c, d 为正实数, 且 $ab+bc+cd+da=1$,

$$\text{求证: } \frac{a^3}{b+c+d} + \frac{b^3}{a+c+d} + \frac{c^3}{a+b+d} + \frac{d^3}{a+b+c} \geq \frac{1}{3}$$

【解析】

证明: 由柯西不等式, 可得:

$$\text{左式} \times [a(b+c+d) + b(a+c+d) + c(a+b+d) + d(a+b+c)] \geq (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

$$\text{下证 } (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \geq \frac{2}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd):$$

由 $ab+bc+cd+da=1$, 可得 $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 1$.

$$\text{而 } ab+ac+ad+bc+bd+cd = 1+ac+bd \leq 1 + \frac{1}{2}(a^2+c^2) + \frac{1}{2}(b^2+d^2) \leq \frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)$$

$$\text{故 } (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq \frac{2}{3}(ab+ac+ad+bc+bd+cd).$$

14. 设椭圆 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{6} = 1$ 有一个内接 $\triangle PAB$, 射线 OP 与 x 轴正向成 $\frac{\pi}{3}$ 角, 直线 AP, BP 的斜率

适合条件 $k_{AP} + k_{BP} = 0$.

(I) 求证: 过 A, B 的直线的斜率 k 是定值;

(II) 求 $\triangle PAB$ 面积的最大值.

$$\text{【答案】 (I) 定值 } \sqrt{3}; \text{ (II) } (S_{\triangle PAB})_{\max} = \sqrt{3}$$

【解析】

(I) 证明: 易知直线 OP 的方程为 $y = \sqrt{3}x$, 将此方程代入 $3x^2 + y^2 = 6$, 可求得交点

$P(1, \sqrt{3})$. 由题意可设直线 PA, PB 的方程分别为 $y - \sqrt{3} = -k(x-1)$ 和 $y - \sqrt{3} = k(x-1)$,

分别与椭圆方程联立, 可求得 A, B 的横坐标分别为 $x_A = \frac{k^2 + 2\sqrt{3}k - 3}{3 + k^2}$, $x_B = \frac{k^2 - 2\sqrt{3}k - 3}{3 + k^2}$.

从而 $y_A = \frac{-k(2\sqrt{3}k - 6)}{3 + k^2} + \sqrt{3}$, $y_B = \frac{k(-2\sqrt{3}k - 6)}{3 + k^2} + \sqrt{3}$,

所以 $k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{12k}{3 + k^2} \cdot \frac{3 + k^2}{4\sqrt{3}k} = \sqrt{3}$ (定值).

(II) 不妨设直线 AB 的方程为 $y = \sqrt{3}x + b$, 与椭圆方程联立

消去 y 得 $6x^2 + 2\sqrt{3}bx + (b^2 - 6) = 0$,

有 $|AB|^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = 4(x_A - x_B)^2 [4(x_A + x_B)^2 - 4x_Ax_B]$

$$= 4\left[(-\frac{\sqrt{3}}{3}b)^2 - \frac{2}{3}(b^2 - 6)\right] = -\frac{4}{3}b^2 + 16.$$

点 P 到直线 AB 的距离 $d = \frac{|\sqrt{3} - \sqrt{3} + b|}{2} = \frac{|b|}{2}$,

所以 $S_{\triangle PAB}^2 = \frac{1}{4} \times \frac{b^2}{4} \times (16 - \frac{4}{3}b^2) = \frac{b^2}{12} (12 - b^2) \leq \frac{1}{12} \left[\frac{b^2 + (12 - b^2)}{2}\right]^2 = 3$,

当且仅当 $b^2 = 12 - b^2$, 即 $b = \pm\sqrt{6}$ 时, $(S_{\triangle PAB})_{\max} = \sqrt{3}$.

关于我们

北京高考资讯是专注于北京新高考政策、新高考选科规划、志愿填报、名校强基计划、学科竞赛、高中生涯规划的超级升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有北京高考在线网站（www.gaokzx.com）和微信公众平台等媒体矩阵。

目前，北京高考资讯微信公众号拥有30W+活跃用户，用户群体涵盖北京80%以上的重点中学校长、老师、家长及考生，引起众多重点高校的关注。
北京高考在线官方网站：www.gaokzx.com

北京高考资讯 (ID: bj-gaokao)
扫码关注获取更多



关注北京高考在线官方微信：[北京高考资讯 \(ID:bj-gaokao\)](https://www.gaokzx.com)，获取更多试题资料及排名分析信息。